SOCIETATEA ROMÂNĂ DE ŞTIINŢE, SECŢIA MATEMATICĂ

BULLETIN MATHÉMATIQUE

DE LA SOCIÉTÉ ROUMAINE DES SCIENCES

TOME 36 (1)

1934

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA CENTRALĂ
BUCUREŞTI
1 9 3 4

C. 23.999.

SUR LE PROLONGEMENT DES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPERIEUR

PAR

TIBERIU POPOVICIU

Le présent travail a pour but de compléter sur certains points la théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur qui a été exposée dans notre Thèse [1]).

Nous considérons des fonctions $f(x)$ définies, *uniformes* et *réelles* de la variable *réelle* x sur un ensemble linéaire et borné E.

Désignons par $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1})$ le déterminant de VAN DER MONDE des quantités α_i et par $U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}; f)$ le déterminant qu'on déduit de $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1})$ lorsqu'on y remplace les éléments de la dernière colonne par

$$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_{k+1})$$

respectivement.

Le quotient

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}; f] = \frac{U(\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_{k+1}; f)}{V(\alpha_1, {}_2, \ldots, \alpha_{k+1})}$$

est *la différence divisée d'ordre k* de la fonction $f(x)$ pour les points *distincts* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$.

Les différences divisées sont liées par la relation de récurrence

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}; f] = \frac{[\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{k+1}; f] - [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f]}{\alpha_{k+1} - \alpha_1}$$

$$[\alpha; f] = f(\alpha).$$

La fonction $f(x)$ sera appelée *convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe* ou *concave d'ordre n* sur l'ensemble E suivant que les différences divisées d'ordre $n+1$ sur tous les groupes de $n+2$ points de E sont > 0, ≥ 0, $= 0$, ≤ 0 ou < 0.

Ces fonctions forment *la classe des fonctions d'ordre n.*

---

[1]) „Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles" Paris 1933.

Il peut arriver qu'une fonction possède à la fois plusieurs propriétés de convexité d'ordres différents. Nous dirons qu'elle est *de la classe* $(a, b, c, \ldots)$ si elle possède des propriétés d'ordre $a, b, c, \ldots$ Pour mettre en évidence la nature de la fonction nous affecterons les nombres $a, b, c, \ldots$ d'indices de la manière suivante: $a, a^*, \bar{a}, a', a'^*$ suivant que la fonction est non-concave, convexe, polynomiale, non-convexe ou concave d'ordre a. Il est utile de distinguer les fonctions de signe invariable. Nous conviendrons de les appeler *fonctions d'ordre* -1, et nous affecterons ce nombre d'indices, comme plus haut, suivant que la fonction reste $\geq 0, > 0, = 0, \leq 0$ ou < 0.

Nous désignerons aussi par:

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f \mid x)$$

le polynome de Lagrange pour les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ relativement à la fonction $f(x)$, donc le polynome de degré $k-1$ qui prend les valeurs $f(\alpha_i)$ aux points α_i.

Dans la suite nous ferons constamment usage des propriétés des fonctions d'un ordre donné ou d'une classe donnée qui sont démontrées dans notre Thèse. Nous prions le lecteur de vouloir bien s'y rapporter.

I.

Position du problème du prolongement

1. Nous dirons que la fonction $f(x)$ d'une classe donnée sur E *se prolonge* sur un autre ensemble E_1, s'il existe une fonction $f_1(x)$ *de la même classe* définie sur $E + E_1$ et qui coïncide avec $f(x)$ sur E. Nous dirons que la fonction se prolonge au *sens large* si on regard la convexité et la polynomialité comme des cas particuliers de la non-concavité. Dans le cas contraire, nous dirons que la fonction se prolonge au *sens strict.* Ce prolongement est plus restrictif et implique le prolongement au sens large.

Pour simplifier le langage nous appelons *ordre maximum* de $f(x)$ le plus grand ordre qui intervient dans sa classe.

2. Nous étudierons tout particulierement le prolongement des fonctions définies sur un ensemble fini de m points

$$(1) \qquad x_1 < x_2 < \ldots < x_m.$$

Les propriétés suivantes sont immédiates.

Toute fonction d'ordre 0 *ou* 1 *définie sur* (1) *se prolonge au sens strict sur tout ensemble* E_1.

Toute fonction d'ordre maximum 1 *définie sur* (1) *se prolonge au sens large sur tout ensemble* E_1.

Il suffit évidemment de démontrer que la fonction est prolongeable dans l'intervalle (x_1, x_m), puisqu'elle l'est sur un point à gauche de x_1 ou à droite de x_m. Construisons une fonction dérivable réalisant le prolongement.

Il suffit de regarder la représentation géométrique de la fonction pour voir qu'on peut prendre

$$f_1'(x_1),\ f_1'(x_2),\ f_1'(x_3) \ldots$$

tels que cette suite vérifie justement les propriétés de convexité de la dérivée d'une fonction de la forme considérée et tels aussi qu'on ait

$$f_1'(x_1) \leq [x_1, x_2; f], \quad f_1'(x_m) \geq [x_{m-1}, x_m; f]$$

$$[x_{i-1}, x_i; f] \leq f_1'(x_i) \leq [x_i, x_{i+1}; f]$$

$$i = 2, 3, \ldots, m-1$$

sans égalité si la fonction est convexe. On peut maintenant construire $f_1(x)$ dans (x_i, x_{i+1}) telle qu'elle ait une dérivée continue se réduisant à $f_1'(x_i), f_1'(x_{i+1})$ aux points x_i, x_{i+1} et remplissant les conditions exigées par le prolongement. (On peut par exemple prendre $f_1(x)$ représentée par un arc d'ellipse vérifiant les conditions voulues).

Il est à remarquer que le prolongement au sens strict d'une fonction d'ordre maximum 1 n'est pas toujours possible. Par exemple si la fonction est de la classe $(0, 1^*)$ et si $f(x_i) = f(x_{i+1})$ son prolongement est nécessairement de la classe $(0, 1)$ la fonction devant se réduire à une constante dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}). Au contraire une fonction de la classe $(0^*, 1^*)$ est toujours prolongeable au sens strict.

3. Soit $f(x)$ d'ordre $n > 1$ sur (1). Nous pouvons supposer $m > n+2$ car si $m = n+2$ le problème est entièrement résolu par le polynome

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f \mid x).$$

Nous allons examiner le prolongement sur un points x distinct des points (1). Ce point est compris entre x_i, x_{i+1} (à gauche de x_1 si $i = 0$, à droite de x_m si $i = m$). Le prolongement ne dépend que des $n+1$ premiers points à gauche de x et des $n+1$ premiers points à droite de x [2]). Il faut donc tout simplement écrire que la fonction est de la classe voulue sur l'ensemble

$$x_{i-n}, x_{i-n+1}, \ldots x_i, x, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n+1}$$

où on convient de considérer les points $x_1, x_2, \ldots, x_i$ à gauche de x si $i < n+1$ (aucun si $i = 0$) et les points $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_m$ à droite de x si $i > m-n-1$ (aucun si $i = m$) et nous garderons cette convention dans la suite sans le dire explicitement.

2) Voir loc. cit. 1) p. 19.

Les conditions de prolongeabilité sont donc

$$(2) \qquad y_j = [x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n}, x; f] \geq 0 \text{ ou } > 0$$
$$j = i - n,\ i - n + 1, \ldots, i + 1$$

suivant que la fonction est non-concave ou convexe et suivant qu'il s'agit d'un prolongement large ou strict.

Pour que la fonction se prolonge sur le point x il faut et il suffit que les inégalités (2) soient compatibles par rapport à $f(x)$ régardée comme un paramètre. La fonction est alors prolongée par toute valeur de $f(x)$ vérifiant ces inégalités.

L'inégalité (2) signifie que $f(x)$ a une position précise par rapport aux polynomes

$$P_j = P(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n}; f \mid x)$$
$$j = i - n, i - n + 1, \ldots, i + 1.$$

On trouve facilement l'interprétation géométrique suivante:

Les polynomes $P_{i-n}, P_{i-n+2}, P_{i-n+4}, \ldots$ ont une fonction limite supérieure $\overline{g}_i(x)$ et une fonction limite inférieure $\underline{g}_i(x)$. De même soient $\overline{h}_i(x)$, $\underline{h}_i(x)$ les deux fonctions limites correspondantes des polynomes $P_{i-n+1}, P_{i-n+3}, P_{i-n+5}, \ldots$.

Nous avons alors

$$\overline{g}_i(x) \leq f(x) \leq \underline{h}_i(x) \text{ ou } \overline{g}_i(x) < f(x) < \underline{h}_i(x) \text{ si } \frac{|n-i+1| + n - i + 1}{2} \text{ pair}$$

$$\underline{g}_i(x) \leq f(x) \leq \overline{h}_i(x) \text{ ou } \underline{g}_i(x) > f(x) > \overline{h}_i(x) \text{ si } \frac{|n-i+1| + n - i + 1}{2} \text{ impair}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour le prolongeabilité s'expriment donc de la manière suivante:

$$\overline{g}_i(x) \leq \underline{h}_i(x) \text{ ou } \overline{g}_i(x) < \underline{h}_i(x) \text{ si } \frac{|n-i+1| + n - i + 1}{2} \text{ est pair}$$

$$\underline{g}_i(x) \geq \overline{h}_i(x) \text{ ou } \underline{g}_i(x) > \overline{h}_i(x) \text{ si } \frac{|n-i+1| + n - i + 1}{2} \text{ est impair}$$

4. Intróduisons la notation suivante

$$\Delta^j_{n+1} = [x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n+1}; f],\ j = 1, 2, \ldots, m - n - 1$$

Posons

$$\delta^i_{j,j+1} = y_j (x - x_j) + y_{j+1} (x_{j+n+1} - x)$$

nous avons alors

$$(3) \qquad \delta^i_{j,j+1} = (x_{j+n+1} - x_j)\, \Delta^j_{n+1}$$

Les conditions $\delta^i_{j,j+1} \geq 0$, ou > 0 sont donc effectivement vérifiées, autrement dit les inégalités $y_j \geq 0$ ou > 0, $y_{j+1} \geq 0$ ou > 0 sont toujours compatibles.

Posons en général

$$(4) \qquad \delta^i_{j,j+2p+1} = \delta^i_{j,j+2p+1}(x) = y_j (x - x_j)(x - x_{j+1}) \ldots (x - x_{j+2p}) +$$
$$+ y_{j+2p+1} (x_{j+n+1} - x)(x_{j+n+2} - x) \ldots (x_{j+n+2p+1} - x).$$

Ces quantités ne contient pas le paramètre $f(x)$ et l'inégalité

$$\delta^i_{j,j+2p+1} \geq 0 \text{ ou } > 0$$
$$i - n \leq j \leq i + 1,\ p > 0,\ j + 2p + 1 \leq i + 1,\ 0 < j \leq m - n - 1$$

exprime justement la compatibilité des inégalités $y_j \geq 0$ ou > 0, $y_{j+2p+1} \geq 0$ ou > 0.

Les quantités (4) peuvent d'ailleurs s'exprimer facilement à l'aide des (3). Ces sont des polynomes de degré $2p$ en x ne dépendant de la fonction donnée que par l'intermédiaire de ses différences divisées d'ordre $n + 1$, ce qui était à prévoir.

Les inégalités (5) *expriment donc les conditions de prolongeabilité.*

Lorsqu'il n'y a qu'au plus trois quantités y_j le nombre des conditions est égale à zéro, donc:

Toute fonction d'ordre n *sur* (1) *se prolonge au sens strict sur tout point à gauche de* x_3 *et tout point à droite de* x_{m-2}.

Toute fonction d'ordre n *définie sur* $n + 3$ *points se prolonge au sens strict sur tout point.*

La propriété suivante résulte du fait que les (4) sont des polynomes:

Si une fonction convexe d'ordre n sur les points (1) se prolonge au sens strict sur un point x, elle se prolonge aussi au sens strict sur tout point dans le voisinage de x.

Les points sur lesquels une fonction convexe se prolonge au sens strict forment un nombre fini d'intervalles ouverts. Les extrémités de ces intervalles ($\pm \infty$ exclus) sont des points où on peut faire le prolongement au sens large; nous les appelerons *les points singuliers* de la fonction convexe.

II.

Etude de quelques cas simples de prolongement

5. Nous allons étudier complètement les fonctions d'ordre 2 définies sur (1). Dans ce cas les quantités (4) s'écrivent

$$\delta^i_{i-2,i+1} = (x - x_{i-1})(x - x_i)(x_{i+1} - x_{i-2})\, \Delta_3^{i-2} +$$
$$+ (x - x_i)(x - x_{i+1})(x_{i+2} - x_{i-1})\, \Delta_3^{i-1} +$$
$$+ (x - x_{i+1})(x - x_{i+2})(x_{i+3} - x_i)\, \Delta_3^{i}$$
$$i = 3, 4, \ldots, m - 3.$$

On voit facilement que *si la fonction est convexe elle se prolonge au voisinage de tout point* x_i.

Dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}) peuvent exister 2, 1, ou 0 points singuliers suivant que l'équation $\delta^i_{i-2,i+1}(x) = 0$ a deux racines rélles inégales, une racine double ou aucune racine réelle dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}). Désignons par α_i, β_{i+1} ces points

$$x_i < \alpha_i \leq \beta_{i+1} < x_{i+1}.$$

Prenons α_i, β_{i+1} arbitrairement dans (x_i, x_{i+1}) et écrivons l'identité en x

$$\delta^i_{i-2,i+1} = A(x-\alpha_i)(x-\beta_{i+1}).$$

Nous en déduisons

$$(6) \qquad \frac{(x_{i+1}-x_{i-2})\,\Delta_3^{i-2}}{A_i} = \frac{(x_{i+2}-x_{i-1})\,\Delta_3^{i-1}}{A'_i} = \frac{(x_{i+3}-x_i)\,\Delta_3^{i}}{A''_i}$$

où

$$A_i = (x_{i+2}-x_i)(\alpha_i - x_{i+1})(\beta_{i+1}-x_{i+1})$$

$$A'_i = (\alpha_i+\beta_{i+1})(x_{i+1}x_{i+2}-x_i x_{i-1}) + \alpha_i\beta_{i+1}(x_i+x_{i-1}-x_{i+2}-x_{i+1}) - \\ - x_{i-1}x_{i+1}(x_{i+2}-x_i) - x_i x_{i+2}(x_{i+1}-x_{i-1})$$

$$A''_i = (x_{i+1}-x_{i-1})(\alpha_i - x_i)(\beta_{i+1}-x_i).$$

Ces relations déterminent Δ_3^{i-2}, Δ_3^{i-1}, Δ_3^i quand α_i, β_{i+1} sont données et on voit que A_i, A'_i, A''_i sont positifs lorsque les points α_i, β_{i+1} sont dans (x_i, x_{i+1}).

Il en résulte *qu'on peut prendre arbitrairement les deux points singuliers* α_i, β_{i+1}.

Plus généralement on peut déterminer toutes les fonctions d'ordre 2 ayant pour points singuliers les points

$$(7) \qquad \alpha_{i_1}, \beta_{i_1+1}, \alpha_{i_2}, \beta_{i_2+1}, \alpha_{i_3}, \beta_{i_3+1}, \ldots$$

pris arbitrairement dans les intervalles (x_{i_1}, x_{i_1+1}), (x_{i_2}, x_{i_2+1}), ... pourvu que $i_1 > i_i + 1$, $i_3 > i_2 + 1, \ldots$

6. Nous allons démontrer maintenant que *dans deux intervalles consecutifs* (x_i, x_{i+1}), (x_{i+1}, x_{i+2}) *ne peuvent pas exister à la fois des points singuliers.*

On devrait en effet avoir

$$(8) \qquad A''_i A_{i+1} - A'_i A'_{i+1} = 0.$$

Désignons le premier membre par $F(\alpha_i, \beta_{i+1}; \alpha_{i+1}, \beta_{i+2})$ et posons

$$F_1(\alpha_i, \beta_{i+1}; \alpha_{i+1}) = F(\alpha_i, \beta_{i+1}; \alpha_{i+1}, \alpha_{i+1})$$

$$F_2(\alpha_i, \beta_{i+1}; \alpha_{i+1}) = F(\alpha_i, \beta_{i+1}; \alpha_{i+1}, x_{i+2})$$

$$F_1(\alpha_i, \beta_{i+1}; x_{i+1}) = (x_{i+3}-x_{i+1})(x_{i+2}-x_{i+1})F_3(\alpha_i, \beta_{i+1})$$

$$F_4(\alpha_i) = F_3(\alpha_i, \alpha_i), \quad F_5(\alpha_i) = F_3(\alpha_i, x_{i+1}).$$

$F_4(\alpha_i)$ est un polynome du second degré en α_i et on a coeff. de α_i^2 dans $F_4(\alpha_i) = (x_{i+2}-x_i)(2x_{i+1}-x_i-x_{i-1}) > 0$.

$$F_4(x_i) = -(x_{i+1}-x_i)^2(x_{i+2}-x_i)(x_i-x_{i-1}), \quad F_4(x_{i+1}) = 0$$

donc

$$F_4(\alpha_i) = F_3(\alpha_i, \alpha_i) < 0 \qquad (x_i < \alpha_i < x_{i+1}).$$

Nous avons aussi $F_5(x_i) < 0$, donc

$$F_3(\alpha_i, x_{i+1}) < 0 \qquad (x_i < \alpha_i < x_{i+1}).$$

$F_3(\alpha_i, \beta_{i+1})$ ètant linéaire par rapport à α_i et β_{i+1} on en déduit

$$F_3(\alpha_i, \beta_{i+1}) < 0 \qquad (x_i < \alpha_i \leq \beta_{i+1} < x_{i+1})$$

donc

$$F_1(\alpha_i, \beta_{i+1}; x_{i+1}) < 0 \qquad (x_i < \alpha_i \leq \beta_{i+1} < x_{i+1})$$

et aussi

$$F_1(\alpha_i, \beta_{i+1}; \alpha_{i+1}) = F(\alpha_i, \beta_{i+1}; \alpha_{i+1}, \alpha_{i+1}) < 0$$
$$(x_i < \alpha_i \leq \beta_{i+1} < x_{i+2} < \alpha_{i+1} < x_{i+2}).$$

Mais

$$F_2(\alpha_i, \beta_{i+1}; x_{i+1}) < 0, \quad (x_i < \alpha_i \leq \beta_{i+1} < x_{i+2})$$

donc aussi

$$F_2(\alpha_i, \beta_{i+1}; \alpha_{i+1}) = F(\alpha_i, \beta_{i+1}; \alpha_{i+1}, x_{i+2}) < 0$$
$$(x_i < \alpha_i \leq \beta_{i+1} < x_{i+1} < \alpha_{i+1} < x_{i+2}).$$

Finalement on en déduit que

$$F(\alpha_i, \beta_{i+1}; \alpha_{i+1}, \beta_{i+2}) < 0$$
$$(x_i < \alpha_i \leq \beta_{i+1} < x_{i+1} < \alpha_{i+1} \leq \beta_{i+2} < x_{i+2})$$

ce qui est en contradiction avec (8), la propriété est donc démontrée.

Il en résulte que la distribution (7) des points singuliers est la plus générale possible et nous pouvons trouver aussi par les formules (6) toutes les fonctions convexes d'ordre 2 ayant ces points comme points singuliers. On peut aussi déterminer les fonctions qui n'ont pas d'autres points singuliers.

Ces conclusions restent vraies pour les fonctions non-concaves, seulement dans ce cas les points α_i, β_{i+1} peuvent coïncider avec x_i, x_{i+1} respectivement. On voit par exemple que si la fonction n'est prolongeable sur aucun point de l'intervalle (x_i, x_{i+1}) elle est prolongeable sur tout point appartenant à l'un des intervalles (x_{i-1}, x_i), (x_{i+1}, x_{i+2}).

Prenant

$$\Delta_3^1 = \Delta_3^3 = \Delta_3^5 = \ldots = 0, \quad \Delta_3^2 > 0, \Delta_3^4 > 0, \Delta_3^6 > 0, \ldots$$

on obtient toutes les fonctions d'ordre 2 qui ne se prolongent sur aucun point des intervalles

$$(x_3, x_4),\ (x_5, x_6),\ (x_7, x_8),\ \dots$$

Le nombre des points singuliers d'une fonction convexe d'ordre 2 est au plus égal à $m-4$ ou $m-5$ suivant que m est pair ou impair.

7. Si l'ordre de la fonction est plus grand que 2 des cas beaucoup plus compliqués de non prolongeabilité peuvent se présenter. Par exemple les fonctions d'ordre $n > 2$ qui sont telles que

$$\overset{1}{\Delta}_{n+1} = \overset{3}{\Delta}_{n+1} = \dots = 0,\ \overset{2}{\Delta}_{n+1} > 0,\ \overset{4}{\Delta}_{n+1} > 0, \dots$$

ne se prolongent sur aucun point de l'intervalle (x_3, x_{m-2}) si $m-n-1$ est impair et sur aucun point de (x_3, x_{m-3}) si $m-n-1$ si est pair. Dans ce dernier cas elles se prolongent d'ailleurs sur tout point de (x_{m-3}, x_{m-2}).

Si la classe de la fonction contient plusieurs conditions de cónvexité, des circonstances plus compliquées peuvent se présenter. On peut néamoins faire des remarques intéressantes. Supposons que la fonction soit de la classe (1, 2): *pour qu'elle soit prolongeable sur un point, il faut et il suffit qu'elle le soit comme fonction d'ordre 2.* Soient en effet les polynomes

$$\begin{array}{ll}
P_1 = P(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i; f \mid x) & \\
P_2 = P(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; f \mid x) & Q_1 = P(x_{i-1}, x_i; f \mid x) \\
P_3 = P(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f \mid x) & Q_2 = P(x_i, x_{i+1}; f \mid x) \\
P_4 = P(x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}; f \mid x) & Q_3 = P(x_{i+1}, x_{i+2}; f \mid x)
\end{array}$$

Les conditions de prolongeabilité sont

$$P_2 \geqq Q_1,\ P_2 \geqq Q_3,\ P_4 \geqq P_1,\ P_4 \geqq Q_1,\ P_4 \geqq Q_3,\ Q_2 \geqq P_1,\ Q_2 \geqq P_3.$$

Or, nous avons, en examinant la figure représentative de la fonction

$P_2 \geqq Q_1$ dans (x_i, x_{i+1}) la fonction étant d'ordre 1
$P_2 \geqq Q_3$ » »
$P_4 \geqq P_1$ par hypothèse
$P_4 \geqq Q_1$ au point x parce que $P_1 \geqq Q_1$ dans (x_i, x_{i+1})
$P_4 \geqq Q_3$ dans (x_i, x_{i+1}) la fonction étant d'ordre 1
$Q_2 \geqq P_1$ » » de la classe (1, 2)
$Q_2 \geqq P_3$ dans (x_i, x_{i+1}) la fonction étant d'ordre 1

8. Considérons une fonction définie sur un ensemble quelconque E. *On peut prolonger la fonction au sens strict sur l'ensemble dérivé E, exceptés peut être les extrémités a et b.* Lorsque l'ordre maximum est plus grand que 0 ce prolongement se fait par continuité *il n'est donc possible que d'une seule manière.* Si l'ordre maximum est 0 la propriété

est à peu près évidente mais l'unicité ne subsiste pas en général. Le prolongement se fait au sens strict en vertu d'une propriété connue [3]).

Toute fonction de classe donnée, bornée dans le voisinage d'une extrémité, se prolonge au sens strict sur cette extrémité.

Nous supposons bien entendu que cette extrémité, b par exemple, n'appartienne pas à E. On voit alors immédiatement qu'il suffit de prendre pour $f(b)$ la limite de $f(x)$ lorsque $x \to b$. Cette limite existe et est bien déterminée.

Si l'extrémité b (ou a) appartient à E la fonction peut y être discontinue et il est alors clair *qu'en général il est impossible de prolonger la fonction au delà de ce point.*

Examinons maintenant la possibilité du prolongement au delà d'une extrémité, b par exemple. Si $f(x)$ est d'ordre maximum n, pour qu'elle soit prolongeable au delà de b il est nécessaire qu'elle soit à $n^{ème}$ différence divisée bornée dans le voisinage de ce point. On peut voir facilement que pour le prolongement au sens strict cette condition n'est pas suffisante. Par exemple si la fonction est de la classe (0'*, 1*) et si la dérivée à droite au point b est égale à zéro la fonction ne se prolonge qu'au sens large, étant constante au delà de b.

En général les dérivées $f'(b), f''(b), \dots, f^{(n)}(b)$ existent au point b $[f^{(n)}(b)$ est par définition la $n^{ème}$ dérivée à gauche$]$ et il y en a qui sont d'un signe déterminé. Nous supposons, pour simplifier, que E est un intervalle (a, b). Si le prolongement est possible au delà du point b, notamment dans l'intervalle (b, c) par la fonction $f_1(x)$ il faut que

$$f_1(b) = f(b),\ f_1^{(i)}(b) = f^{(i)}(b) \quad i = 1, 2, \dots n-1$$

et que $f_{1d}^{(n)}(b)$ soit $\geqq$ ou $\leqq f^{(n)}(b)$ suivant que la fonction est non-concave ou non-convexe d'ordre n.

On peut voir maintenant que même au sens large le prolongement n'est pas toujours possible [4]).

Si le polynome

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(b)}{i!}(x-b)^i$$

est de la même classe que $f(x)$ dans (b, c) il effectue le prolongement (au seus large). Il en est de même pour

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(b)}{i!}(x-b)^i + A(x-b)^{n+1}$$

A etant $\geqq$ ou $\leqq 0$ suivant que $f(x)$ est non-concave ou non-convexe

[3]) Voir loc. cit. 1) p. 26.

[4]) Par exemple une fonction de la classe (0, 1', 2, 3') ne peut être prolongée au delà de b si $f'(b) = 0$, $f''(b) \neq 0$ (il est facile de construire de telles fonctions).

d'ordre n. Dans certains cas ce prolongement est au sens strict tel par exemple si $f(x)$ est d'ordre n simplement ou bien si elle est de la classe $(k, k+1, \dots, n)$ ou $(k^*, k+1^*, \dots, n^*)$... etc.

On peut encore énoncer la propriété suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f(x) *jouissant dans* (a, b) *des propriétés d'ordre* k, k + 1,..., n *de même sens, puisse être prolongée au delà du point* b *est qu'elle soit à* $n^{\text{ème}}$ *différence divisée bornée dans le voisinage de* b.

Le prolongement est au sens strict et peut aller aussi loin qu'on veut.

Une propriété analogue a lieu pour l'extrémité a, il faut alors considérer des propriétés d'ordre k, $k+1, \dots, n$ de sens alternés, comme il résulte d'un changement de l'orientation de l'axe des x. Nous en déduisons aussi que :

La condition nécessaire ét suffisante pour qu'une fonction d'ordre n *dans* (a, b) *puisse être prolongée au sens strict dans tout intervalle est qu'elle soit à* $n^{\text{ème}}$ *différence divisée bornée.*

III

Prolongement des fonctions convexes dans un intervalle.

9. Considérons une fonction $f(x)$ non-concave d'ordre n dans l'intervalle (a, b) et soit

$$x_1 < x_2 < \dots < x_m$$

une suite de points de cet intervalle.

Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que $x_1 = a$ $x_m = b$ comme il resultera de la méthode que nous allons exposer.

Posons encore

$$\Delta^i_{n+1} = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f], \; i = 1, 2, \dots, m-n-1 \tag{9}$$

Nous allons supposer d'abord que les points $x_2, x_3, \dots, x_{m-1}$ divisent rationnellement l'intervalle (x_1, x_m). On peut trouver alors un nombre positif δ et des entiers positifs $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{m-1}$ tels que

$$x_{i+1} - x_i = \rho_i \delta \qquad i = 1, 2, \dots, m-1$$

Nous emploierons les notations

$$\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_j = \rho'_j, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \quad \rho'_0 = 0, \quad \rho'_{m-1} = \rho$$

Divisons l'intervalle (x_1, x_m) en $p\rho$ parties égales, p étant un nombre entier positif assez grand et soient

$$x'_i = x_1 + (i-1)\,h, \quad h = \frac{x_m - x_1}{p\rho}$$

les points de division. Nous avons alors

$$x'_{p\rho'_{j-1}+1} = x_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Considérons une fonction $\Psi(x; p)$ définie dans l'intervalle (x_1, x_m) se réduisant à un polynome de degré n dans chacun des intervalles (x_1, x_2), $(x_2, x_3), \dots$, (x_{m-1}, x_m). En posant

$$P_j(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^j_i (x - x_j)^{n-i}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1$$

nous pourrons écrire

$$\Psi(x; p) = \sum_{j=1}^{k} P_j(x) \text{ dans } (x_k, x_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, m-1.$$

Nous supposons que cette fonction est continue, donc

$$\lambda^j_n = 0, \quad j = 2, 3, \dots, m-1$$

et que les autres coefficients sont en général des fonctions de p.

Nous allons examiner dans la suite la somme

$$\sum_{i=1}^{p\rho-n} \Psi(x'_i; p)\; [x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_{i+n+1}; f] = \sum_{i=1}^{p\rho+1} \gamma_i\, f(x'_i). \tag{10}$$

10. Le premier membre de (10) peut s'écrire

$$\frac{1}{(n+1)!\, h^{n+1}} \sum_{i=1}^{p\rho-n} \Psi(x'_i; p) \left[\sum_{r=0}^{n+1} (-1)^{n+1-r} \binom{n+1}{r} f(x'_{i+r}) \right]$$

Il en résulte immédiatement que

$$\frac{1}{(n+1)!\, h^{n+1}} \sum_{(j)} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} \Psi(x'_{i-j}; p)$$

où la sommation s'étend de

$$\begin{array}{lll} 0 & \text{à } i-1 & \text{pour } i \leq n+1 \\ i - p\rho + n & \text{à } n+1 & \text{pour } i \geq p\rho - n + 1 \\ 0 & \text{à } n+1 & \text{pour } n+1 < i < p\rho - n + 1. \end{array}$$

La forme de la fonction nous montre que les seuls coefficients γ_i qui ne sont pas nuls sont les suivants

$$\gamma_i, \gamma_{p\rho-n+i}, \; i = 1, 2, \dots, n+1; \; \gamma_{p\rho'_j+i}, \; j = 1, 2, \dots, m-2, \; i = 2, 3, \dots, n+1.$$

On voit donc apparaitre dans le second membre de (10) m groupes de termes. Les groupes extrêmes contiennent $n+1$, les autres n termes.

Pour le premier groupe un calcul simple nous donne

$$\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i f(x'_i) = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{r=0}^{n-i} \binom{r+j}{r} \gamma_{i+r+1} \right] \left[\sum_{r=0}^{i} (-1)^{i-r} \binom{i}{r} f(x'_{r+1}) \right] = \tag{11}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} h^i \left[\sum_{r=0}^{n-i} \binom{r+i}{r} \gamma_{i+r+1} \right] i!\, \left[x'_i, x'_2, \dots, x'_{i+1}; f \right].$$

Nous avons dans ce cas

$$\gamma_i = \frac{1}{(n+1)!\, h^{n+1}} \sum_{r=0}^{n} \lambda^1_{n-r}\, h^r\, \Gamma^r_i$$

où

$$\Gamma^r_i = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} (i-j-1)^r \left(\Gamma^r_1 = 0,\ r > 0,\ \Gamma^0_1 = (-1)^{n+1}\right)$$

Nous en déduisons

$$\sum_{r=0}^{n-i} \binom{r+i}{r} \gamma_{i+r+1} = \frac{1}{(n+1)!\, h^{n+1}} \sum_{s=0}^{n} \lambda^1_{n-s}\, h^s\, G^s_i$$

avec

$$G^s_i = \sum_{r=0}^{n-i} \binom{r+i}{r} \Gamma^s_{i+r+1}$$

Les nombres G^s_i se calculent facilement. Considérons le polynome

$$F_i(z) = (-1)^{n+1} \sum_{r=0}^{i-1} (-1)^r \binom{n+1-i+r}{r} (z-1)^{i-r-1}$$

nous avons alors

$$\Gamma^r_i = \left[\left(z\frac{d}{dz}\right)^{(r)} F_i(z)\right]_{z=1}$$

$$G^s_i = \left[\left(z\frac{d}{dz}\right)^{(s)} \sum_{r=1}^{n-i} \binom{r+i}{r} F_{i+r+1}(z)\right]_{z=1}$$

d'où en particulier

$$G^s_i = 0 \text{ pour } s = 0, 1, 2, \dots, n-i-1$$

$$G^{n-i}_i = (-1)^{n+1-i} \left[\left(z\frac{d}{dz}\right)^{(n-i)} (z-1)^{n-i}\right]_{z=1} = (-1)^{n+1-i} (n-i)!$$

Remarquons maintenant que *nous ne savons rien* sur les quantités

(12) $$i!\,[x'_1, x'_2, \dots, x'_{i+1}; f], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Prenons pour les coefficients λ^1_i des valeurs telles que

1^0

$$\lim_{p\to\infty} \lambda^1_0 = \Lambda_1 \text{ existe et soit finie}$$

2^0 les égalités

$$\sum_{r=0}^{n-i} \binom{r+i}{r} \gamma_{i+r+1} = \frac{1}{n+1)!\, h^{n+1}}, \sum_{s=n-i}^{n} \lambda^1_{n-s}\, h^s\, G^s_i = 0$$

soient vérifiées *identiquement en p*.

Il en résulte que:

1^0 $\lambda^1_1, \lambda^1_2, \dots, \gamma^1_n$ tendent vers zéro pour $p \to \infty$.

2^0. Toutes les quantités (12) disparessent dans la somme (11). Nous pouvons donc écrire:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i f(x'_i) = \lim. \frac{1}{p}\left[\sum_{r=0}^{n} \binom{r+1}{r} \gamma_{r+1}\right] f(x_1) =$$

$$= \lim. \frac{1}{p} \frac{1}{(n+1)\, h^{n+1}}\, h^n\, \lambda^1_0\, G^n_0 = \frac{(-1)^{n+1} \rho \Lambda_1}{(n+1)(x_m - x_1)} f(x_1).$$

Considérons maintenant un groupe de termes intermédiaires:

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{p\varrho'_j+i+1}\, f(x'_{p\varrho_j+i+1}) \qquad 1 \leq j \leq m-2$$

et nous savons que les quantités.

$$[x'_{p\varrho'_j+2}, x'_{p\varrho'_j+3}, \dots, x'_{p\varrho'_j+i+2}; f], \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

qui interviennent dans cette somme *restent toutes bornées pour* $p \to \infty$.

Sans insister sur les détails du calcul, disons simplement que si on prend pour les coefficients λ^{j+1}_i des valeurs telles que:

1^0. $\lim_{p\to\infty} \lambda^{j+1}_0 = \Lambda_{j+1}$ existe et soit finie.

2^0. $\lim_{p\to\infty} \lambda^{j+1}_i = 0,\ i = 1, 2, \dots, n-1,$

on trouve la relation.

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{p\varrho'_j+i+1}\, f(x_{p\varrho'_j+i+1}) = \frac{(-1)^{n+1} \rho \Lambda_{j+1}}{(n+1(x_m - x_1).} f(x_{j+1}).$$

Il nous reste à voir ce qui se passe avec le dernier groupe de termes.

(13) $$\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_{p\varrho-n+i}\, f(x'_{p\varrho-n+i}).$$

Nous chercherons à nous arranger de manière que cette somme multipliée par $\frac{1}{p}$ ait aussi une limite finie pour $p \to \infty$. Il suffit pour celà de recommencer la démonstration précédente en allant cette fois du point x_m vers le point x_1, donc en renversant l'ordre des points $x_1, x_2, \dots, x_m$. Ce procédé revient à faire sur la fonction $\Psi(x; p)$ la transformation $x \mid x_m + x_1 - x$, donc.

$$\Psi_1(x; p) = \Psi(x_m + x_1 - x; p)$$

et on a

$$\Psi_1(x; p) = \sum_{j=1}^{k} Q_j(x) \quad \text{dans } (x_m + x_1 - x_{m-k+1}, x_m + x_1 - x_{m-k}) \quad k = 1, 2, \dots, m-1.$$

avec

$$Q_j(x) = \sum_{i=0}^{n} \mu^j_i (x - x_1 - x_m + x_{m-j+1})^{n-i} \qquad j = 1, 2, \dots, m-1.$$

Les trois propriétés suivantes doivent être vérifiées:

1°. $\lim\limits_{p\to\infty} \mu_0^j$ existe et est finie.

2°. Les égalités.

$$\sum_{s=n-i}^{n} \mu_{n-s}^{1} h^s G_i'^s = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{14}$$

sont vérifiées *identiquement en* p.

3°. $\lim\limits_{p\to\infty} \mu_i^j = 0, \quad i > 0.$

Ici les coefficients $G_i'^s$ sont encore indépendants de p, mais ne sont pas identiques aux G_i^s. Celà provient du fait que tandis que dans la formule (10) interviennent les valeurs de $\Psi(x;p)$ dans $(x'_1, x'_{p\varrho-n})$ dans le problème renversé on emploie les valeurs de $\Psi_1(x;p)$ dans $(x'_{n+2}, x'_{p\varrho+1})$. On a donc

$$\Gamma_i'^s = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} (n+1-j)^s$$

$$G_i'^s = \sum_{r=0}^{n-i} \binom{r+i}{r} \Gamma_{i+r+1}'^s$$

Mais:

$$\Gamma_i'^s = \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} (n+1)^{s-t} \Gamma_i^t$$

$$G_i'^s = \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} (n+1)^{s-t} G_i^t$$

dons en particulier:

$$G_i'^s = 0,\ s = 0, 1, 2. \ldots, n-i+1,\ G_i'^{n-i} = G_i^{n-i} \neq 0.$$

La propriété 1° est évidemment vérifiée. Remarquons que:

$$Q_j(x) = -P_{m+1-j}(x_m + x_1 - x), \quad j = 2, 3, \ldots, m-1$$

et il en résulte immédiatement que 3°, pour $j > 1$ est vérifiée.

Nous avons aussi :

$$Q_1(x) = \sum_{j=1}^{m-1} P_j(x_m + x_1 - x)$$

d'où les valeurs des coefficients μ_i^1

$$\mu_i^1 = \sum_{j=1}^{m-1} \left[\sum_{r=0}^{i} (-1)^{i-r} \binom{n-r}{i-r} (x_m - x_j)^{i-r} \lambda_r^j \right], \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Pour que 3° soit vérifiée aussi pour $j = 1$ il faut que.

$$\sum_{j=1}^{m-1} (x_m - x_j)^i \Lambda_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Une fois ces égalités satisfaites on voit qu'on peut toujours s'arranger de manière que 2° soit vérifiée aussi.

Nous savons maintenant que (13) multipliée par $\frac{1}{p}$ a une limite lorsque les conditions précédentes sont vérifiées et que cette limite ne dépend que de $f(x_m)$. Nous pouvons écrire

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_{p\varrho-n+i} f(x'_{p\varrho-n+i}) = \frac{(-1)^{n+1} \varrho \Lambda_m}{(n+1)(x_m - x_1)} f(x_m)$$

et le coefficient Λ_m est évidemment déterminé par la condition que

$$\lim . \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p\varrho+1} \gamma_i f(x'_i) \tag{16}$$

ne dépend que de différences divisées d'ordre $n+1$, autrement dit elle doit être nulle si $f(x)$ est un polynome quelconque de degré n. Donc

$$\sum_{j=1}^{m} x_j^k \Lambda_j = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

et (15) sont précisemment les conditions de compatibilité de ce système.

11. Lorsque $p \to \infty$ la fonction $\Psi(x;p)$ converge uniformément[5]) dans (x_1, x_m) vers la fonction

$$\Psi(x) = \lim_{p\to\infty} . \Psi(x;p) = \sum_{j=1}^{k} \Lambda_j (x - x_j)^n \ \textit{dans}\ (x_k, x_{k+1}),$$
$$k = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Cette fonction peut se mettre sous la forme d'une somme de $m - n - 1$ fonctions analogues.

Pour simplifier les notations posons pour les déterminants de Van Der Monde

$$V_i = V(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}) \qquad i = 1, 2, \ldots, m-n-1$$
$$V_i^{(k)} = V(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{i+n+1}),$$
$$k = i, i+1, \ldots, i+n+1$$

et considérons les fonctions

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{dans} \quad (x_1, x_i) \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{V_i^{(i+r)}}{V_i} (x - x_{i+r})^n & \text{dans} \quad (x_{i+k}, x_{i+k+1}) \\ & k = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{dans} \quad (x_{i+n+1}, x_m) \end{cases}$$
$$i = 1, 2, \ldots, m-n-1.$$

[5]) L'uniformité de la convergence est immédiate si on remarque que $\Psi(x;p)$ est formé par des polynomes de degré invariable.

Tenant compte de (15) on voit que

$$\Psi(x) = \sum_{j=1}^{m-n-1} \lambda_j \Psi_j(x).$$

L'expression (16) diviendra alors, en supprimant un facteur commun positif:

$$\sum_{j=1}^{m-n-1} \lambda_j \, \Delta^j_{n+1}.$$

12. Les calculs précédents permettent d'énnoncer la propriété suivante:

Si la fonction

$$\Psi(x) = \sum_{j=1}^{m-n-1} \lambda_j \Psi_j(x)$$

est non négative dans l'intervalle $(x_1 x_m)$, *toute fonction* $f(x)$ *non-concave d'ordre* n *dans* (x_1, x_m) *vérifie l'inégalité.*

$$\sum_{j=1}^{m-n-1} \lambda_j \, \Delta^j_{n+1} \geq 0. \tag{17}$$

Je dis d'abord que *la fonction* $\Psi_i(x)$ *est positive dans l'intervalle ouvert* (x_i, x_{i+n+1}). Il suffit de faire la démonstration pour $i = 1$. En raison de la symétrie il suffit même de montrer que

$$\sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} V_1^{(r)} (x - x_r)^n > 0, \qquad \text{dans } (x_k, x_{k+1})$$

pour $k = 2, 3, \ldots, \left[\frac{n+2}{2}\right]$[6]) (pour $k = 1$, $n+1$ évident), On peut vérifier cette propriété par induction. Elle est immédiate pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie jusqu'à $n-1$ et montrons qu'elle est à fortiori vraie pour n. Par hypothèse la propriété est vraie pour les suites $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$; $x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}$. Désignons par $V'^{(1)}, V'^{(2)}, \ldots, V''^{(2)}, V''^{(3)}, \ldots$, les analogues de $V_1^{(r)}$ pour ces suites, donc

$$V'^{(r)} = V(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_{n+1})$$

$$V''^{(r)} = V(x_2, x_3, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_{n+2}).$$

6) $[\alpha]$ est égal au nombre des entiers compris dans α.

La relation (qu'on vérifie facilement)

$$V'^{(r)}(x_{n+2} - x_2)(x_{n+2} - x_3)\ldots(x_{n+2} - x_{n+1})(x - x_1) -$$
$$- V''^{(r)}(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_{n+1} - x_1)(x_{n+2} - x) = V_1^{(r)}(x - x_1)$$

permet d'écrire

$$\sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} V_1^{(r)} (x - x_r)^n = (x_{n+2} - x_2)(x_{n+2} - x_3)\ldots \tag{18}$$

$$(x_{n+2} - x_{n+1})(x - x_1) \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} V'^{(r)} (x - x_r)^{n-1} +$$

$$+ (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_{n+1} - x_1)(x_{n+2} - x) \sum_{r=2}^{k} (-1)^{r-2} V''^{(r)} (x - x_r)^{n-1}$$

ce qui démontre par récurrence la propriété [7]).

Nous pouvons maintenant affirmer que si $\Psi(x)$ est non négative dans l'intervalle ouvert (x_1, x_m) il existe une autre fonction analogue aussi près qu'on veut de $\Psi(x)$ et qui soit *positive* dans cet intervalle.

Il suffit donc de démontrer la propriété énnoncée pour $\Psi(x)$ positive dans l'intervalle ouvert (x_1, x_m). Notre analyse nous montre alors qu'on peut trouver une suite de fonctions $\Psi(x; p)$ $p = 1, 2, \ldots$ de manière que:

1⁰. L'expression (10) multipliée par $\frac{1}{p}$ tend, à un facteur constant positif près, vers le premier membre de (17).

2⁰. La fonction $\Psi(x; p)$ converge uniformément vers $\Psi(x)$ dans (x_1, x_m).

Il en résulte alors qu'à partir d'une certaine valeur de p $\Psi(x; p)$ reste positive dans (x_1, x_m). Celà n'est pas tout à fait sûr pour le voisinage des points x_1, x_m, mais la forme spéciale des fonctions $\Psi(x; p)$ nous montre qu'on peut toujours supposer que cette circonstance soit réalisée. L'inégalité (17) est maintenant immédiate puisqu'à partir de cette valeur de p tous les termes du premier membre de (10) sont non négatifs.

7) Le polynome

$$\sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} V_1^{(r)} (x - x_r)^n$$

est même „très positif" dans l'intervalle (x_k, x_{k+1}). Si on le met sous la forme

$$\sum_{i=0}^{n} A_i (x - x_k)^i (x_{k+1} - x)^{n-i}$$

les coefficients A_i sont tous positif. (Demonstration immédiate par récurrence).

N'oublions pas que nous avons supposé que les points $x_2, x_3, \ldots x_{m-1}$ divisent rationnellement l'intervalle (x_1, x_m). Remarquons que notre énnoncé n'est pas entaché de cette restriction. On sait d'autre part qu'on peut trouver des points $x_2^*, x_3^*, \ldots x_{m-1}^*$ aussi près qu'on veut des points respectifs $x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}$ et tels qu'ils divisent rationnellement l'intervalle (x_1, x_m). Par un passage à la limite, qui est parfaitement légitime à cause de la continuité de la fonction[8]), il résulte que la propriété est générale.

Pour simplifier le langage nous appelerons la propriété ainsi mise en évidence: propriété de *convexité restreinte d'ordre n* sur les m points considérés[9]).

Remarquons qu'on obtient les conditions de convexité restreinte sur une suite partielle de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ en déterminant les coefficients λ_i de manière que le premier membre de (17) ne dépend que des différences divisées prises sur ces points. On voit alors que *la convexité restreinte d'ordre* n *entraine la non-concavité du même ordre.* Si $m = n+2$ pour la convexité restreinte il suffit que la fonction soit non-concave. *Cette propriété est encore vraie pour* m = n + 3. En effet dans ce cas nous avons la fonction:

$$\Psi(x) = \lambda_1 \Psi_1(x) + \lambda_2 \Psi_2(x)$$

et

$$\Psi(x_2) = \lambda_1 \Psi_1(x_2), \quad \Psi(x_{n+2}) = \lambda_2 \Psi_2(x_{n+2})$$

donc pour que $\Psi(x)$ soit non négative il faut que λ_1, λ_2 soient non négatifs, d'où la propriété. La propriété n'est plus vraie si $m > n+3$, sauf pour le cas $n = 1$. Dans ce cas en effet:

$$\Psi(x_i) = \lambda_{i-1} \Psi_{i-1}(x_i) \qquad i = 2, 3, \ldots, m-2$$

et la non-négativité des coefficients est nécessaire pour celle de $\Psi(x)$ dans (x_1, x_m).

13. Considérons maintenant la fonction $f(x)$ définie sur la suite de points

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m. \tag{19}$$

Supposons qu'on ait

$$\Delta_{n+1}^j = \Psi_j(\xi) \quad j = 1, 2, \ldots, m-n-1 \quad (x_1 \leq \xi \leq x_m) \tag{20}$$

Montrons que dans ce cas *la fonction est prolongeable dans tout intervalle contenant les points* (19).

8) A vrai dire de cette manière nous excluons les fonctions d'ordre 0 qui ne sont pas nécessairement continues mais pour ce cas simple le problème ne présente pas d'interêt la fonction étant toujours et partout prolongeable.

9) Pour ne pas compliquer les choses il est inutile de faire une distinction plus précise de la nature de convexité. Il s'agit en réalité de non-concavité restreinte.

Supposons que $m = 2n+2$, $x_{n+1} \leq \xi < x_{n+2}$. Les formules établies plus haut nous donnent:

$$\begin{aligned} & P(x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n+2}; f \mid x) - P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x) = \\ & = \sum_{i=1}^{n+1} (x_{n+i+1} - x_i)\, \Delta_{n+1}^i (x - x_{i+1})(x - x_{i+2}) \ldots (x - x_{i+n}) \\ & = \sum_{i=1}^{n+1} (x_{n+i+1} - x_i)\, \Psi_i(\xi) (x - x_{i+1})(x - x_{i+2}) \ldots (x - x_{i+n}). \end{aligned}$$

Pour calculer cette expression nous allons procéder encore par récurrence. Les relations (18) peuvent s'écrire sous la forme condensée:

$$(x_{n+j+1} - x_j)\, \Psi_j(x) = (x - x_j)\, \Psi'_j(x) + (x_{n+j+1} - x)\, \Psi'_{j+1}(x)$$
$$j = 1, 2, \ldots, n+1$$

où $\Psi'_1, \Psi'_2, \ldots, \Psi'_{n+2}$ sont les fonctions analogues à $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n+1}$ sur la suite $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+2}$, mais en abaissant d'une unité la valeur de n.

On en déduit:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n+1} (x_{n+i+1} - x_i)\, \Psi_i(\xi) (x - x_{i+1})(x - x_{i+2}) \ldots (x - x_{i+n}) = \\ & = (x - \xi) \sum_{i=1}^{n} (x_{n+i+1} - x_{i+1})\, \Psi'_{i+1}(\xi) (x - x_{i+2})(x - x_{i+3}) \ldots (x - x_{i+n}) \end{aligned}$$

donc de proche en proche

$$P(x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots x_{2n+2}; f \mid x) - P(x_1, x_2, \ldots x_{n+1}; f \mid x) = (x - \xi)^n$$

et le prolongement est évidemment réalisé par la fonction égale à:

$$\begin{aligned} & P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x) && \text{pour } x \leq \xi \\ & P(x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n+2}; f \mid x) && \text{pour } x \geq \xi \end{aligned}$$

elle étant manifestement non-concave d'ordre n.

Le cas général de m quelconque et ξ quelconque se ramène à celui-ci. Si d'une manière générale on a $x_i \leq \xi \leq x_{i+1}$ les quantités:

$$\begin{aligned} & \Psi_j(\xi) \quad j = 1, 2, \ldots, i-n-1 && (\text{aucun si } i \leq n+1) \\ & \Psi_j(\xi) \quad j = i+1, i+2, \ldots, m-n-1 && (\text{aucun si } i \geq m-n-1) \end{aligned}$$

sont nulles par définition. La fonction est donc nécessairement polynomiale dans les intervalles (x_1, x_i), (x_{i+1}, x_m). La démonstration précédente nous montre alors qu'il suffit de garder les $n+1$ premiers points à gauche de x_i celui-ci inclu et les $n+1$ premiers points à droite de x_{i+1} ce dernier inclu. Si $i < n+1$ on complète la fonction à gauche de x_1 en introduisant $n+1-i$ points à gauche de x_1 et en prenant les différences divisées de manière que sur cette nouvelle suite elles soient encore de la forme (20). Si $i > m - n - 1$ on fait la même opération à droite de x_m et si $m < 2n + 2$ on fait le complément à la fois à gauche de x_1 et à droite de x_m.

Nous pouvons énnoncer maintenant la propriété suivante:

Pour que la fonction f(x) *définie et non-concave d'ordre* n *sur les points* (19) *soit partout prolongeable il faut et il suffit qu'elle vérifie sur ces points la propriété de convexité restreinte.*

Soit en effet dans l'espace ordinaire à $m - n - 1$ dimensions la courbe

$$\text{(C)} \qquad y_1 = \Psi_1(x),\ y_2 = \Psi_2(x), \ldots, y_{m-n-1} = \Psi_{m-n-1}(x)$$
$$x_1 \leq x \leq x_m.$$

On voit alors que la conditions de convexité restreinte signifie que tout hyperplan passant par l'origine et laissant la courbe (C) d'une même côté, laisse le point de coordonnées

$$\text{(21)} \qquad (\Delta^1_{n+1}, \Delta^2_{n+1}, \ldots, \Delta^{m-n-1}_{n+1})$$

de cette même côté. Géométriquement cela signifie que *le point* (21) *est à l'intérieur ou sur la frontière du plus petit cône convexe contenant la courbe (C) et ayant l'origine pour sommet.*

Il en résulte immédiatement que si la condition de convexité restreinte est vérifiée on a

$$\text{(22)} \qquad \Delta^i_{n+1} = \Sigma\, \mu_k\, \Psi_j(\xi_k) \qquad i = 1, 2, \ldots, m - n - 1$$

où μ_k sont un nombre fini de constantes positives et ξ_k de points dans l'intervalle (x_1, x_m). La propriété énnoncée résulte alors de la position préliminaire démontrée au debut de ce Nr.

14. Appelons (Γ) le domaine convexe précédemment défini. S'il existe une fonction $\Psi(x)$ non négative et non identiquement nulle s'annulant aux points ξ_k le point (21) donné par les formules (22) est sur la frontère de (Γ). On peut en effet dans ce cas trouver un point aussi voisin qu'on veut de (21) ne vérifiant pas la condition de convexité restreinte. Tout point frontière peut s'obtenir de cette manière, ce qui résulte du fait que si les points ξ_k ne vérifient pas la condition précédente le point (21) est nécessairement un point intérieur. Si en effet $\Psi(x) = \Sigma\, \lambda_j\, \Psi_j(x)$ est une fonction non négative l'expression

$$\left| \frac{\Sigma\, \mu_k\, \Psi(\xi_x)}{\Sigma\, \lambda^j} \right|$$

a un minimum qui n'est pas nul dans notre cas, autrement on pourrait par un procédé de passege à la limite, conclure à l'existence d'une fonction $\Psi(x)$ non identiquement nulle et s'annulant aux points ξ_k, ce qui est contraire à l'hypoyhèse.

Bien entendu nous ne parlons pas du point origine, sommet du cône (Γ), qui ne présente aucun interêt.

Supposons qu'une des différences divisées, par exemple Δ^i_{n+1}, soit nulle. Il faut alors que tous les points ξ_k soient à l'extérieur de l'intervalle ouvert (x_i, x_{i+n+1}). Or dans ce cas la fonction $\Psi(x) = \Psi_i(x)$ s'annule en tous les points ξ_k, donc:

Les points (21) *correspondant aux fonctions non-concaves* (et qui ne sont pas convexes) *vérifiant la condition de convexité restreinte sont sur la frontière du domaine* (Γ). Il est à remarquer que les fonctions convexes ne donnent pas toujours un point intérieur. Soit par exemple $n = 2$, $m = 6$ $x_3 < \xi < x_4$,

$$\Delta^1_3 = \Psi_1(\xi),\quad \Delta^2_3 = \Psi_2(\xi)\quad \Delta^3_3 = \Psi_3(\xi)$$

Toutes ces fonctions sont convexes, mais le point (21) est sur la frontière de (Γ) puisque la fonction

$$\Psi(x) = (\xi - x_2)(\xi - x_3)\Psi_1(x) + (\xi - x_3)(\xi - x_4)\Psi_2(x) + (\xi - x_4)(\xi - x_5)\Psi_3(x)$$

est non négative et s'annule au point ξ.

15. Disons encore quelques mots sur les fonctions qui sont prolongeables sur chaque point. Pour qu'il en soit ainsi il faut évidemment que le point (21) soit à l'intérieur ou sur la frontière d'un certain domaine convexe conique (Γ') ayant l'origine pour sommet. Le domaine (Γ') contient toujours le domaine (Γ), mais est en général plus étendu que ce dernier. On peut affirmer que (Γ') est plus grand que (Γ) dès qu'il existe sur la frontière de ce dernier un point tel que tout point assez rapproché de celui-ci corresponde à des fonctions non-concaves prolongeable sur tout point. Ainsi dans le cas $n > 2$, $m \geq n + 4$ les domaines (Γ), (Γ') ne coïncident pas [10]). Il en est de même si $n = 2$, $m \geq 8$ [11]).

[10]) Il suffit de prendre $m = n + 4$. Supposons, pour simplifier, que

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2, \ldots, x_i = i - 1, \ldots, x_{n+4} = n + 3$$

et considérons une fonction telle que

$$\Delta^1_{n+1} = 5^n - (n+1)\,3^n + \frac{n(n+1)}{2},\quad \Delta^2_{n+1} = 3^n - (n+1),\quad \Delta^3_{n+1} = 1.$$

On a

$$(x-1)(x-2)\,\Delta^1_{n+1} + (x-2)(x-n-1)\,\Delta^2_{n+1} + (x-n-1)(x-n-2)\,\Delta^3_{n+1} > 0$$
$$3 \leq x \leq n + 2,\ n > 2$$

donc tout point assez rapproché de $(\Delta^1_{n+1}, \Delta^2_{n+1}, \Delta^3_{n+1})$ donne des fonctions convexes d'ordre n prolongeable sur tout point. D'autre part on peut montrer qu'il existe une fonction $\Psi(x) \geq 0$ s'annulant au point $\frac{5}{2}$ et conclure qu'il s'agit bien d'un point frontière.

[11]) Il suffit de considerer $m = 8$. Exemple

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1, \ldots, x_8 = 7$$
$$\Delta^1_3 = 1,\ \Delta^2_3 = 6,\ \Delta^3_3 = 2,\ \Delta^4_3 = 6,\ \Delta^5_3 = 1$$

On arrive à la propriété comme dans l'exemple précédent en remarquant qu'on a

$$3\,\Psi_1 - \Psi_2 + 3\,\Psi_3 - \Psi_4 + 3\,\Psi_5 \geq 0$$

l'égalité étant vérifiée pour $x = \frac{5}{2}, \frac{9}{2}$.

Nous allons montrer au contraire que si $n=2$, $m=6, 7$ les domaines (Γ), (Γ') coïncident. Il suffit de considérer $m=7$ le cas $m=6$ pouvant toujours se ramener à celui-ci. Nous montrerons que dans tout voisinage de tout point frontière de (Γ) on peut trouver un point correspondant à des fonctions qui ou bien ne sont pas d'ordre 2, ou bien tout en l'étant ne sont pas prolongeables sur tout point. Cette propriété est immédiate pour les points frontières provenant de fonctions non-concaves (dont au moins une des différences divisées est nulle). Celà arrive d'ailleurs quels que soient n et m [12]. Il reste à examiner les points frontières provenant de fonctions convexes. Il faut alors que dans chaque intervalle ouvert (x_1, x_4), (x_2, x_5), (x_3, x_6) (x_4, x_7) se trouve au moins un point ξ_k. On voit facilement que le seul cas qui peut fournir un point frontière est celui où un des points est dans l'intervalle ouvert (x_3, x_4) tous les autres étant dans (x_6, x_7) [ou bien un dans (x_4, x_5) et les autres dans (x_1, x_2)].

Ces points frontières sont donc de la forme

$$\Delta_3^1 = \lambda\, \Psi_1(\xi),\ \Delta_3^2 = \lambda\, \Psi_2(\xi),\ \Delta_3^3 = \lambda\, \Psi_3(\xi),\ \Delta_3^4 = \mu$$

$$\lambda > 0,\ \mu > 0\ \ x_3 < \xi < x_4$$

(forme analogue si $x_4 < \xi < x_5$). L'existence d'un point voisin correspondant à une fonction non prolongeable résulte du fait que

$$(x - x_2)(x - x_3)(x_4 - x_1)\, \Delta_3^1 + (x - x_3)(x - x_4)(x_5 - x_2)\, \Delta_3^2 + $$
$$+ (x - x_4)(x - x_5)(x_6 - x_3)\, \Delta_3^3 = \lambda\, (x - \xi)^2 \text{ dans } (x_3, x_4).$$

Il est clair maintenant que (Γ), (Γ') doivent coïncider. Soit en effet A un point de (Γ') extérieur à (Γ). Tout le cône de sommet A, circonscrit à (Γ) doit appartenir à (Γ') ce qui est en contradiction avec ce qu'on a démontré toute à l'heure [13].

16. Appelons *fonction élémentaire de degré n à m sommets* toute fonction dont la $(n-1)^{ème}$ dérivée est une ligne polygonale à m sommets en ne comptant pas les extrémités de l'intervalles où ces fonctions sont définies.

Il en résulte qu'une fonction élémentaire de degré n est de la forme

$$f(x) = \begin{cases} P(x) \text{ polynome de degré } n \text{ dans } (a, \xi_1) \\ P(x) + \sum_{i=1}^{k} a_i (x - \xi_i)^n \quad \text{dans } (\xi_k, \xi_{k+1}) \\ \qquad k = 1, 2, \ldots, m \ (\xi_{m+1} = b). \end{cases}$$

[12]) De cette propriété résulte immédiatement que (Γ), (Γ') ont des parties de frontière communes.

[13]) Dans ce raisonnement on admet bien entendu que (Γ) est effectivement une variété à 5 dimensions. On peut d'ailleurs vérifier facilement que dans le cas général (Γ) est effectivement à $m-n-1$ dimensions.

Pour qu'une telle fonction soit non-concave d'ordre n il faut et il suffit que

$$a_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Une fonction élémentaire de degré n ayant un seul sommet est toujours d'ordre n.

Si une fonction d'ordre n définie sur les points (19) est prolongeable dans tout intervalle, nous avons vu qu'elle l'est par une fonction élémentaire de degré n.

Il en résulte que si $f(x)$ est non-concave d'ordre n dans un intervalle (x_1, x_m) il existe une fonction élémentaire de degré n et non-concave d'ordre n prenant les valeurs $f(x_i)$ aux points

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m$$

Etudions de plus près les fonctions qui donnent le prolongement. Comme il s'agit de fonctions non-concaves dans tout intervalle elles seront à $n^{ème}$ différences divisées bornée dans (x_1, x_m), donc leurs $(n-1)^{ème}$ dérivée sera toujours continue dans cet intervalle fermé et les dérivées $f^{(n)}(x_1)$, $f^{(n)}(x_m)$ existent $\left[\text{nous posons } f^{(n)}(x_1) = \left(\frac{d}{dx}\right)_d f^{(n-1)}(x_1),\ f^{(n)}(x_m) = \left(\frac{d}{dx}\right)_g f^{(n-1)}(x_m)\right]$. Je dis que :

Toute fonction non-concave d'ordre n *est la limite d'une suite de fonctions convexes d'ordre n convergeant uniformément. La suite des dérivées converge uniformément vers celles de la fonction donnée jusqu'à l'ordre* n—1 *et aussi pour la* $n^{ème}$ *dérivée aux deux extrémité* x_1, x_m.

Par dérivations succesives on voit qu'il suffit de démontrer la propriété pour $n=1$. Pour ce cas on peut la voir facilement en considérant la figure représentative de la fonction et en procédant comme au Nr. 2.

Supposons maintenant que le point (21) soit à l'intérieur de (Γ). Considérons un hypertetraèdre $A_1 A_2 \ldots A_{m-n-1}$ non dégeneré complètement intérieur à (Γ) et contenant à son intérieur le point (21). Soient $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{m-n-1}(x)$ donnant le prolongement et correspondant aux points $A_1, A_2, \ldots, A_{m-n-1}$. En modifiant au besoin, *aussi peu qu'on veut*, les points A_i on voit qu'on peut supposer que $f_i(x)$ soient *convexes*. Soient maintenant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-n-1}$ (≥ 0) les coordonnées tétraedrique homogènes du point (21), on voit alors que la fonction

$$\frac{\Sigma \lambda_i f_i(x)}{\Sigma \lambda_i} + \text{polynome convenable de degré } n$$

est *convexe* et prend les valeurs données aux points $x_1, x_2, \ldots x_m$. donc.

Si (21) est un point intérieur le prolongement peut toujours se faire par une fonction convexe[14]*).*

Il en résulte aussi que *si (21) est à l'intérieur, toute fonction faisant le prolongement peut être approchée autant qu'on veut par d'autres qui sont convexes.* Soit en effet $f(x)$ une telle fonction et $f^*(x)$ une fonction *convexe* effectuant le prolongement, il suffit de considérer

$$\frac{f(x)+\lambda f^*(x)}{1+\lambda}, \lambda > 0$$

Nous nons proposons de démontrer encore que *si* (21) *est sur la frontière de* (Γ) *le prolongement n'est pas possible avec une fonction convexe.*

Autrement dit si $f(x)$ est une fonction convexe d'ordre n et si on construit le point (21) avec ses différences divisées, *ce point est à l'intérieur de* (Γ).

Considérons l'intervalle (x_i, x_{i+1}). D'une propriété qui sera démontrée plus loin (la propriété A du Nr. 22) il résulte qu'il existe une fonction $\varphi(x)$ non-concave et même convexe d'ordre n dans (x_i, x_{i+1}) telle que

$$\varphi^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \quad \varphi^{(k)}(x_{i+1}) = f^{(k)}(x_{i+1})$$
$$k = 1, 2, \ldots, n-1$$
$$\varphi^{(n)}_d(x_i) = f^{(n)}_d(x_i), \quad \varphi^{(n)}_g(x_{i+1}) = f^{(n)}_g(x_{i+1})$$

et les valeurs $\varphi(x_i)$, $\varphi(x_{i+1})$ étant soumises à la seule condition

$$|\varphi(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, \quad |\varphi(x_{i+1}) - f(x_{i+1})| < \varepsilon$$

ε étant un nombre positif suffisamment petit.

Il en résulte que toute fonction $f_1(x)$ telle que

$$|f(x_i) - f_1(x_i)| < \varepsilon, \; i = 1, 2, \ldots, m$$

est encore prolongeable pourvu que $\varepsilon > 0$ soit assez petit, ce qui prouve qu'il s'agit bien d'un point intérieur.

Des propriétés démontrées un peu plus loin résultera encore que toute fonction effectuant le prolongement est la limite d'une suite de fonctions élémentaires de degré n effectuant le prolongement et convergeant uniformément dans tout intervalle fini.

Pour un point intérieur de (Γ) le prolongement est toujours possible par une infinité de fonctions. Il en est de même pour les points frontières en général, sauf pour certains d'entre eux pour lesquels le prolongement n'est possible que d'une seule manière dans l'intervalle (x_1, x_m). Le probléme traité dans les Nrs. suivants permet d'étudier cet unicité.

On pourrait enfin se proposer d'exprimer la convexité restreinte par des inégalités explicites entre les quantités Δ^i_{n+1}. Nous n'avons pas

[14]) Comme on voit la propriété est démontrée pour l'intervalle (x_i, x_m), mai, on peut prolonger la fonction en dehors en respectant la convexité.

l'intention de chercher ici ces inégalités qui se présentent sous une forme assez compliquée. Remarquons seulement qu'on peut regarder les Δ^i_{n+1} comme généralisant la suite des coeffcients de certaines formes quadratiques.

IV

Etude d'un cas particulier de prolongement

17. Nous avons supposé jusqu'ici que tous les points (19) sont distincts. On peut étudier des problèmes limites en supposant que plusieurs de ces points soient confondus. Nous choisirons un de ces problèmes, le plus intéressant d'ailleurs.

En prenant $m = 2n + 2$ et en supposant que

$$x_2, x_3, \ldots, x_{n+1} \to x_1 = a$$
$$x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n+2} \to x_{2n+2} = b > a$$

nous obtenons le problème suivant :

Déterminer une fonction non-concave d'ordre n *dans l'intervalle* (a, b) *prenant avec ses* n *premières dérivées les valeurs données*

$$f(a), f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$$
$$f(b), f'(b), \ldots, f^{(n)}(b)$$

On peut obtenir la condition de possibilité de ce problème en passant à la limite dans la condition de convexité restreinte et on peut facilement montrer que ce procédé est perfaitement justifié.

Nous obtenons ainsi

$$\Delta^{i+1}_{n+1} = \frac{(-1)^i}{i!(b-a)^{n+1}} \Big[\sum_{k=0}^{i} (-1)^k (b-a)^k \binom{i}{k} \frac{(n-k)!}{(n-i)!} f^{(k)}(b) - \sum_{k=0}^{n-i} (b-a)^k \binom{i}{k} \frac{(n-k)!}{(n-i)!} f^{(k)}(a) \Big]. \tag{23}$$

D'autre part les limites des fonctions $\psi_i(x)$ sont les polynomes

$$lim.\ \Psi_i(x) = \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \binom{n}{i-1} (b-x)^{n-i+1} (x-a)^{i-1}.$$

Pour que notre problème soit possible il faut donc que pour tout polynome

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \binom{n}{i-1} (b-x)^{n-i+1} (x-a)^{i-1} \tag{24}$$

non négatif dans (a, b) on ait

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \Delta^i_{n+1} \geqq 0$$

Le polynome (24) peut aussi s'écrire sous la forme

$$\sum_{k=0}^{n} \mu_k (b-x)^k$$

où

$$\mu_k = \binom{n}{k}(b-a)^{n-k} \sum_{i=n-k+1}^{n+1} (-1)^{i+k-n-1} \lambda_i \binom{k}{n-i+1}.$$

Nous avons aussi

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \Delta_{n+1}^{i} = \frac{1}{n!\,(b-a)^{n+1}} \sum_{i=0}^{n} \mu_i c_i$$

où en faisant les calculs à l'aide des formules (23)

$$c_i = i!\left[f^{(n-i)}(b) - \sum_{k=0}^{i} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(n-i+k)}(a)\right],\quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{25}$$

Pour que le problème posé soit possible il faut donc que pour tout polynome

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_i (b-x)^i$$

non négatif dans (a, b) on ait

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_i c_i \geq 0.$$

Si on a $c_0 = 0$ on doit aussi avoir $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ comme on peut facilement vérifier et alors la seule solution est un polynome de degré complètement déterminé. Dans la suite nous supposerons toujours que $c_0 > 0$.

La condition de possibilité peut s'exprimer sous la forme géométrique suivante :

Pour que le problème posé soit possible il faut que le point

$$\mathrm{M}_n\left(\frac{c_1}{c_0}, \frac{c_2}{c_0}, \dots, \frac{c_n}{c_0}\right)$$

soit à l'intérieur ou sur la frontière du plus petit domaine convexe (W_n) *contenant la courbe* [15])

$$y_1 = (b-x),\ y_2 = (b-x)^2, \dots, y_n = (b-x)^n \quad a \leq x \leq b.$$

Disons une fois pour toute que par les données du problème toute fonction d'ordre n à considerer est à $n^{\text{ème}}$ différence divisée bornée donc

[15]) Cette propriété est dû à M. S. KAKEYA. „On some Integral Equations III" Tôhoku Math. Journ. t. 8 p. 14. L'auteur étudie un cas particulier du problème.

a une $(n-1)^{\text{ème}}$ dérivée continue dans l'intervalle fermé (a, b) et la $n^{\text{ème}}$ dérivée existe aux extrémités.

18. Tout point de (W_n) ou de sa frontière peut se représenter sous la forme

$$c_i = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (b-\xi_k)^i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \tag{26}$$

$$m \leq n,\ \lambda_i \geq 0,\ a \leq \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m \leq b.$$

Pour que ce point soit sur la frontière il faut et il suffit que l'un des trois conditions suivantes soit remplie

(type I) $m \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ si $a < \xi_1,\ \xi_m < b$

(type II) $m \leq \left[\frac{n+2}{2}\right]$ si $a = \xi_1,\ \xi_m = b$

(type III) $m \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$ si $a < \xi_1,\ \xi_m = b$

(type IV) $m \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$ si $a = \xi_1,\ \xi_m < b$

ce qui résulte immédiatement de la distribution des zéros d'un polynome non négatif de degré n dans (a, b).

On peut facilement démontrer, par la comparaison de deux systèmes d'équations linéaires, que la représentation (26) d'un point frontière est unique.

Remarquons maintenant que la projection du domaine (W_n) sur le hyperplan $O y_1 y_2 \dots y_{n-1}$ est précisément le domaine (W_{n-1}). De même (W_n) peut être regardé comme la projection de $(\mathrm{W}_{n+1}) \dots$ etc. La projection du point M_n et le point

$$\mathrm{M}_{n-1}\left(\frac{c_1}{c_0}, \frac{c_2}{c_0}, \dots, \frac{c_{n-1}}{c_0}\right)$$

et correspond comme on voit à notre problème posé avec les mêmes données pour la dérivée $f'(x)$ de la fonction. La droite $\mathrm{M}_n \mathrm{M}_{n-1}$ coupe la frontière de (W_n) en deux points: M'_n dont l'ordonné est la plus plus petite et M''_n dont l'ordonnée est la plus grande. Si M_{n-1} est un point frontière $\mathrm{M}_n \mathrm{M}_{n-1}$ ne peut couper (W_n) qu'en un seul point frontière; $\mathrm{M}'_n \mathrm{M}''_n \mathrm{M}_n$ coïncident donc. Il en résulte que tout point de (W_n) est la projection d'un point frontière de (W_{n+1}).

Il en résulte aussi que tout point intérieur M_n a une infinité de représentations de la forme (26). On peut montrer qu'il y a une infinité pour toute valeur de $m > \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, avec $a < \xi_1,\ \xi_m < b$. Si n est pair il y a une infinité de représentations avec $m = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Parmi ces représentations il y a une pour laquelle $a = \xi_1$, $\xi_m < b$ et une pour laquelle $a < \xi_1$, $\xi_m = b$. Si n est impair il y a une seule représentation avec $m = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ et alors $a < \xi_1$, $\xi_m < b$. Parmi les représentations avec $m = \left[\frac{n}{2}\right] + 2$ il y a une pour laquelle $a = \xi_1$, $\xi_m = b$.

Si M_n est à l'intérieur de (W_n), M_{n-1} est à l'intérieur de (W_{n-1}). Il en résulte que si n est impair M'_n, M''_n sont du type (III) et (IV) et si n est pair ils sont du type (I) et (II). On peut facilement montrer que M'_n est du type (I) ou (III) et M''_n du type (II) ou (IV).

Pour $n = 1$ le domaine (W_n) se réduit au segment $(0, b - a)$ et on peut facilement vérifier que notre problème est impossible pour l'extrémité droite.

19. Examinons maintenant les conditions suffisantes. Considérons les polynomes:

$$P_1(x), P_2(x), \ldots, P_{n+2}(x)$$

définis par les relations:

$$P_i^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \qquad k = 0, 1, \ldots, n - i + 1$$
$$P_i^{(k)}(b) = f^{(k)}(b) \qquad k = 0, 1, \ldots, i - 2$$

Les premières conditions étant supprimées pour P_{n+2} et les dernières pour P_1. Par un calcul facile on trouve

$$P_{n+2}(x) - P_1(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x - \xi_i)^n \tag{27}$$

en employant la représentation (26). Si M_n est un point intérieur il y a une infinité de représentations avec $a < \xi_1$, $\xi_m < b$ et alors notre problème est résolu par la fonction

$$\Phi(x) = \begin{cases} P_1(x) & \text{dans } (a, \xi_1) \\ P_1(x) + \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x - \xi_i)^n & \text{dans } (\xi_k, \xi_{k+1}) \\ k = 1, 2, \ldots, m & \xi_{m+1} = b. \end{cases} \tag{28}$$

Appelons *solution élémentaire* toute fonction élémentaire de degré n satisfaisant au problème.

Donc, *si M_n est un point intérieur il y a toujours une infinité de solutions*. Il y a toujours une infinité de solutions élémentaires. En particulier il y a toujours une solution élémentaire à $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ sommets. Si n est impair la solution de cette forme est *unique*, mais il y en a une infinité si n est pair. L'ensemble de toutes les solutions forme une famille bornée. Leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ ainsi que leurs deux dérivées d'ordre n forment également des familles bornées. Les solutions ont une fonction limite supérieure $\Phi_1(x)$ et une fonction limite inférieure $\Phi_2(x)$. On doit avoir en particulier:

$$P_2(x) \geq \Phi_1(x) \geq f(x) \geq \Phi_2(x) \geq P_1(x) \qquad (a \leq x \leq b)$$

pour toute solution $f(x)$.

Remarquons que:

$$P_2(x) - P_1(x) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{(b - a)^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!\,(b - a)^{n-i}} f^{(i)}(a) \right] (x - a)^n.$$

On en déduit que si les données du problème restent en module plus petites qu'un nombre fixe à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\eta > 0$ tel que si:

$$| f(b) - f(a) | < \eta \qquad | b - a | < \eta$$

on ait

$$| \Phi_1(x) - \Phi_2(x) | < \varepsilon \quad \text{dans } (a, b) \tag{29}$$

20. La fonction (28) peut se construire avec toute représentation (26). Si on a $a = \xi_1$ on supprime bien entendu la définition dans l'intervalle (a, ξ_1). Désignons en particulier par $\Phi_1^*(x)$ la fonction (28) construite avec la représentation pour laquelle $a = \xi_1$, $m = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ si n est pair et $a = \xi_1$, $b = \xi_m$, $m = \left[\frac{n}{2}\right] + 2$ si n est impair et par $\Phi_2^*(x)$ la fonction (28) construite avec la représentation pour laquelle $\xi_m = b$, $m = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ si n est pair et $m = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ si n est impair.

Nous nous proposons de démontrer que.

$$\Phi_1(x) \equiv \Phi_1^*(x), \qquad \Phi_2(x) \equiv \Phi_2^*(x). \tag{30}$$

Si n est pair $\Phi_1^*(x)$, $\Phi_2^*(x)$ ne sont pas de solutions. Soient:

$$(a = \xi'_1), \xi'_2, \ldots, \xi'_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \qquad \text{les sommets de } \Phi_1^*$$
$$\xi''_1, \xi''_2, \ldots, (\xi''_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} = b) \qquad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \Phi_2^*$$

et considérons une solution élémentaire $f(x)$ ayant $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ sommets $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$. On démontre facilement que si $\xi_1 \to \xi'_1$ on a aussi $\xi_i \to \xi'_i$, $i > 1$ et $f(x)$ tend uniformément vers $\Phi_1^*(x)$ dans (a, b) De même si $\xi_1 \to \xi''_1$ on a aussi $\xi_i \to \xi''_i$, $i > 1$ et $f(x)$ tend uniformément vers $\Phi_2^*(x)$. On a d'ailleurs la propriété de séparation :

$$a = \xi'_1 < \xi''_1 < \xi'_2 < \xi''_2 < \cdots < \xi'_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} < \xi''_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} = b$$

qu'on vérifie aisément en comparant les deux représentation (26) correspondants.

Si n est impair $\Phi_2^*(x)$ est une solution, mais $\Phi_1^*(x)$ n'est pas solution. Soient

$$(a=\xi_1'),\ \xi_2',\ \xi_3',\dots,(\xi'_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}=b) \text{ les sommets de } \Phi_1^*$$

$$\xi_1'',\ \xi_2'',\ \xi_3'',\dots,\ \xi''_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \qquad \text{"} \qquad \Phi_2^*.$$

Si $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}$ sont les sommets d'une solution élémentaire $f(x)$ à $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ sommets, $f(x)$ converge uniformément vers $\Phi_1^*(x)$ lorsque $\xi_1 \to a$, $\xi_{\left[\frac{n}{2}\right]+2} \to b$. On a encore la propriété de séparation

$$a=\xi_1' < \xi_1'' < \xi_2' < \xi_2'' < \dots < \xi''_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} < \xi''_{\left[\frac{n}{2}\right]+2} = b.$$

On peut donc dire finalement que les fonctions $\Phi_1^*(x)$, $\Phi_2^*(x)$ sont les limites de suites uniformément convergeantes de solutions. Il en résulte que pour démontrer les relations (30) il suffit de montrer que si $f(x)$ est une solution quelconque on a

$$\Phi_1^*(x) \geq f(x) \geq \Phi_2^*(x) \quad \text{dans } (a, b) \tag{31}$$

21. Passons à la démonstration des inégalités (31). Soit un point de l'intervalle (a, b). Il faut exprimer la condition de convexité restreinte sur $2n+3$ points dont $n+1$ sont confondus en a, $n+1$ confondus en b et le $(2n+3)^{ième}$ est le point ξ. Cette condition s'exprime par le fait que si on a

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_i (b-x)^i + \mu\, \Psi(x) \geq 0 \quad \text{dans } (a, b)$$

on doit avoir aussi

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_i c_i + c^* \geq 0$$

où

$$\Psi(x) = \begin{cases} (\xi - x)^n & \text{dans } (a, \xi) \\ 0 & \text{dans } (\xi, b) \end{cases} \qquad c^* = n!\,[f(\xi) - P_1(\xi)]\text{ [16]}.$$

16) On peut facilement voir cette condition en supposant que $f^{(n)}(x)$ existe. On a alors

$$f(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n\, df^{(n)}(t) + P_1(x)$$

$$c_i = \int_a^b (b-t)^i\, df^{(n)}(t),\ i=0,1,\dots,n,\ c^* = \int_a^b \Psi(t)\, df^{(n)}(t)$$

et $f^{(n)}(x)$ est non décroissante. On arrive bien entendu au même résultat par un passage à la limite dans la condition générale de convexité restreinte.

Pour $n=1$ les inégalités (31) sont claires. Dans ce cas en effet $\Phi_1^*(x)$ n'est autre que le polynome $P_2(x)$, le sommet ξ_1'' de $\Phi_2^*(x)$ est le point où on a $P_1(x) = P_3(x)$ et

$$\Phi_2^*(x) = \begin{cases} P_1(x) & \text{dans } (a, \xi_1'') \\ P_3(x) & \text{dans } (\xi_1'' b). \end{cases}$$

Prenons le cas général et démontrons la seconde inégalité (31) en supposant que n est impair.

Soit

$$\xi_k'' \leq \xi \leq \xi_{k+1}'' \qquad \left(k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

et construisons le polynome de degré n, $Q(x)$ defini par les relations:

$$Q(\xi_i'') = 0,\quad Q'(\xi_i'') = 0, \qquad i = k+1, k+2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]+1$$

$$Q(\xi_i'') = -(\xi - \xi_i'')^n,\ Q'(\xi_i'') = n(\xi - \xi_i'')^{n-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Je dis que

$$Q(x) + \Psi(x) \geq 0 \qquad \text{dans } (a, b) \tag{32}$$

Cette propriété est immédiate. En effet $\Psi(x)$ est d'ordre n, donc $Q(x) + \Psi(x)$ est aussi d'ordre n. Mais cette fonction élémentaire a un sommet et s'annule ainsi que sa dérivée première aux points $\xi_1'', \xi_2'' \dots, \xi''_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$. Je dis qu'alors $Q(x) + \Psi(x)$ est de signe invariable. En effet dans le cas contraire elle devrait nécessairement changer de signe en un point ξ^* au moins et être donc nulle en ce point [17]. On a alors:

$$\left[\xi_1'', \xi_1', \xi_2'', \xi_2'', \dots, \xi''_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}, \xi''_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}, \xi^*; Q + \Psi\right] = 0$$

et la fonction devrait être nulle identiquement dans $(\xi_1'', \xi''_{\left[\frac{n}{2}\right]+1})$ au moins, ce qui est impossible. Il suffit de regarder la figure représentative des fonctions $Q(x)$ et $\Psi(x)$ pour voir que c'est effectivement (32) qui a lieu.

Considérons maintenant la fonction $\Phi_2^*(x)$ et soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ les coefficients de sa représentation (26). Nous avons:

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i (b-x)^n.$$

$$\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \lambda_i Q(\xi_i'') = \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i = \sum_{i=1}^{k} -\lambda_i (\xi - \xi_i'')^n.$$

17) ξ^* peut coincider avec un point ξ_i''. La seconde dérivée de $Q(x) + \Psi'(x)$ doit aussi s'annuler alors en ce point et les conclusions restent les mêmes.

On doit donc avoir:

$$-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\xi - \xi_i'')^n + c^* \geq 0$$

qui n'est autre que

$$f(\xi) \geq \Phi_2^*(\xi) \quad \xi_k'' \leq \xi \leq \xi_{k+1}'' \quad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

Dans les intervalles (a, ξ_1''), $(\xi''_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}, b)$ cette inégalité est vérifiée, se réduisant à

$$[\xi, \underbrace{a, a, \ldots, a}_{n+1}; f] \geq 0, \qquad [\xi, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{n+1}; f] \geq 0$$

respectivement.

Si n est pair la deuxième inégalité (31) se démontre de la même manière. Pour avoir l'inégalité (32) on prendra le polynome

$$Q(\xi''_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}) = 0$$

$$Q(\xi_i'') = 0, \quad Q'(\xi_i'') = 0 \quad i = k+1, k+2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$$

$$(\xi_k'' \leq \xi \leq \xi_{k+1}'')$$

$$Q(\xi_i'') = -(\xi - \xi_i'')^n, \quad Q'(\xi_i'') = n(\xi - \xi_i'')^{n-1} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

La démonstration est analogue pour la première inégalité (31). On cherchera le polynome $Q(x)$ tel que

$$Q(x) - \Psi(x) \geq 0 \qquad \text{dans } (a, b).$$

On prendra : Si n est impair

$$Q(\xi'_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}) = 0$$

$$Q(\xi_i') = 0, \ Q'(\xi_i') = 0, \ i = k+1, k+2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] + 1$$

$$(\xi_k' \leq \xi \leq \xi_{k+1}'')$$

$$Q(\xi_i') = (\xi - \xi_i')^n, \ Q'(\xi_i') = -n(\xi - \xi_i')^{n-1}$$

$$i = 2, 3, \ldots k$$

$$Q(\xi_i') = (\xi - \xi_i')^n.$$

Si n est pair

$$Q(\xi_i') = 0, \quad Q'(\xi_i') = 0, \quad i = k+1, k+2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] + 1$$

$$Q(\xi_i') = (\xi - \xi_i')^n \quad Q'(\xi_i') = -n(\xi - \xi_i')^{n-1}$$

$$1 = 2, 3, \ldots, k \quad (\xi_k' \leq \xi \leq \xi_{k+1}')$$

$$Q(\xi_1') = (\xi - \xi_1')^n.$$

Donc finalement dans tous les cas les identités (30) sont démontrées.

22. Nous avons les deux propriétés suivantes :

A. *Le point M_n dont les coordonnées sont construites à l'aide des quantités* (25) *correspondant à une fonction convexe dans* (a, b) *est toujours à l'intérieur de* (W_n).

B. *Toute solution de notre problème est la limite d'une suite de solutions élémentaires convergeant uniformément dans* (a, b).

Pour démontrer la propriété B il suffit de nous occuper des solutions *convexes*. En effet exactement comme au Nr. 16, nous démontrons que toute solution est la limite d'une suite de solutions convexes convergeant uniformément dans (a, b).

Je dis maintenant que la propriété B est une conséquence de la propriété A. La propriété A est indépendante de l'intervalle (a, b) et on peut alors dans tout intervalle partiel de (a, b) remplacer la fonction élémentaire de degré n non-concave d'ordre n coïncidant ainsi que ses n premières derivées avec celles de la fonction donnée aux extrémités. Divisons l'intervalle (a, b) en p parties égales et faisons la construction précédente dans chaque intervalle partiel. Comme la solution considérée est continue et est, ainsi que ses n premières dérivées, bornée par les données du problème, de la propriété (29) résulte qu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond un η tel que si $p > \eta$ la fonction élémentaire ainsi construite, qui est évidemment une solution, diffère de moin de ε de la solution donnée, dans tout l'intervalle.

Considérons maintenant la projection M_{n-1} du point M_n. Soit $f(x)$ une solution et varions les valeurs $f(a)$, $f(b)$ dans notre problème. L'expression

$$\int_a^b f(x)\,dx + \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)$$

a un maximum et un minimum. Il est clair que le maximum est égal à l'$n^{ème}$ coordonnée du point M_n'' et le minimum à l'$n^{ème}$ coordonnée de M_n'. Or le maximum est atteint pour la fonction $\Phi_1(x)$ et le minimum pour $\Phi_2(x)$ correspondant au problème relatif au point M_{n-1} et par conséquence ces extrema ne sont atteints pour aucune autre solution correspondant à M_{n-1}.

Il en résulte que la propriété A est vraie et donc la propriété B est aussi vraie.

Nous avons ainsi démontré également que *notre problème est impossible pour les points frontières du type (II), (III) ou (IV) et admet une solution unique pour les points frontières du type (I)*. La solution est alors une fonction élémentaire de degré n ayant $m \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ sommets.

Nous avons considéré des points frontières tels que M_n'. M_n'' se projetent sur un point intérieur de (W_{n-1}). Tous les autres se ramènent à cette forme par des projections succesives.

Remarquons encore que les conditions de possibilité du problème peuvent être exprimées par des inégalités explicites. Par une transformation facile on voit en effet que si on a

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_i x^i \geq 0, \quad x \geq 0$$

on doit avoir

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_i c'_i \geq 0, \quad c'_i = \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} \frac{c_{n-i+r}}{(b \quad a)^{n-i+r}}$$

On sait alors que les formes quadratiques

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} c'_{i+j} t_i t_j, \quad \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} c'_{i+j+1} t_i t_j$$

doivent être positives. Le cas où ces formes sont définies positives correspond aux points intérieurs de (W_n) [18]).

Pour finir remarquons la liaisons étroite entre le problème du prolongement dans un intervalle et entre certains problèmes de moments. Le procédé par lequel nous établissons la condition de convexité restreinte rappelle d'ailleurs la définition d'une intégrale, mais tandis que dans les procédés d'intégration il s'agit toujours de certaines expressions ayant une limite, dans les problèmes des moments il suffit toujours que certaines sommes puisse être multipliées par des expressions de signe invariable telles que le produit ait une limite [19]).

Manuscrit reçu le 20 Avril, 1934.

[18]) Voir POLYA u. SZEGÖ „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis" tome II p. 107. Cette propriété et la propriété projective des domaines (W_n) permettent de retrouver très simplement les formules donnant les coefficients de certaines formes quadratiques données par M. E. FISCHER „Uber das Carathéodory'sche Problem Potenzreihen mit Positivem reellen Teil Bettreffend" Rendic. Circ. Math. Palermo t. 32 (1911) p. 240.

[19]) Les fonctions presentant des caractères de convexité de tout ordre et leur utilité pour le problème des moments ont été étudiées par M. S. BERNSTEIN „Sur les fonctions absulument monotones" Acta Mathematica t. 52 (1928) p. 1.

TABLE DE MATIERES