MATHEMATICA

VOLUMUL VIII.

1 9 3 4

C L U J
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL", STR. MEMORANDULUI 22
1 9 3 4.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS D'UNE OU DE DEUX VARIABLES RÉELLES.

par

Tiberiu Popoviciu

Ancien Élève de l'École Normale Supérieure.

Reçue le 8 mars 1933.

Introduction.

Dans la théorie des fonctions on cherche à approfondir l'étude des fonctions très générales qui se rapprochent, d'une certaine manière, de fonctions connues. Les fonctions les plus simples sont les polynomes, il est donc tout naturel d'étudier les fonctions auxquelles certaines propriétés des polynomes s'appliquent. C'est d'un tel problème que nous nous occupons dans la première partie de ce travail.

Pour étudier la fonction nous considérons ses *différences divisées* de divers ordres. La $n^{\text{ème}}$ différence divisée de $f(x)$ pour les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ est égale au quotient

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{U(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)}{V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}$$

où $U(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$ est le déterminant d'ordre $n+1$ dont la ligne générale est $1\ x_i\ x_i^2 \ldots\ldots x_i^{n-1}\ f(x_i)$ et $V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = U(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; x^n)$.

La $n^{\text{ème}}$ différence divisée d'un polynome de degré n est constamment égale à un même nombre; ce nombre est nul si le polynome est de degré $n-1$. Nous examinons les fonctions dont la $n^{\text{ème}}$ différence divisée est bornée. Nous considérons également la *$n^{\text{ème}}$ variation totale* (ou la variation totale d'ordre n) d'une fonction, qui est par définition égale à la limite supérieure de la somme

$$\sum_{i=1}^{m-n-1} |\Delta_n^i - \Delta_n^{i+1}|$$

$$\Delta_n^i = [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}; f], \quad i = 1, 2, \ldots, m-n$$

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m$$

lorsqu'on fait varier les points $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et leur nombre de toutes les manières possibles sur l'ensemble de définition de la fonction. Nous dirons que la fonction est à $n^{ème}$ *variation bornée* si sa variation totale d'ordre n est finie. Nous étudions après les fonctions dont la $(n+1)^{ème}$ différence divisée ne change pas de signe. Nous dirons qu'une telle fonction est d'ordre n. Pour $n=0$ nous avons les fonctions monotones et pour $n=1$ les fonctions convexes (ou concaves) ordinaires. Nous signalons les principales propriétés de ces fonctions et nous montrons leur rapport avec les fonctions à $n^{ème}$ différence divisée bornée et les fonctions à $n^{ème}$ variation bornée.

Si la fonction $f(x)$ est à $(n+1)^{ème}$ différence divisée bornée on peut évidemment déterminer λ tel que la fonction $f(x)+\lambda x^{n+1}$ soit d'ordre n. Nous montrons aussi qu'*une fonction à $n^{ème}$ variation bornée est la différence de deux fonctions d'ordre n.*

Nous étudions aussi la dérivation des fonctions précédemment définies, après avoir completé certaines recherches de STIELTJES sur la $n^{ème}$ dérivée d'une fonction. Nous examinons la limitation de la dérivée d'une fonction d'ordre n définie dans un intervalle. On trouve ainsi que *les fonctions d'ordre n se comportent à peu près comme les polynomes de degré n, tout au moins dans un intervalle intérieur convenablement choisi.*

Dans la seconde partie nous essayons d'étendre pour les fonctions de deux variables les résultats obtenus pour les fonctions d'une seule variable.

La différence divisée d'ordre (m, n) de $f(x, y)$ pour les $k = (m+1)(n+1)$ points $M_i(x_i, y_i)$, $i=1, 2, \dots, k$ est égale au quotient

$$[M_1, M_2, \dots, M_k; f]_{m,n} = \frac{U_{m,n}(M_1, M_2, \dots, M_k; f)}{V_{m,n}(M_1, M_2, \dots, M_k)}$$

où $U_{m,n}(M_1, M_2, \dots, M_k; f)$ est le déterminant dont la ligne générale est $1\ x_i\ x_i^2 \dots x_i^m\ y_i\ x_i y_i \dots x_i^m y_i \dots y_i^n\ x_i y_i^n \dots x_i^{m-1} y_i^n\ f(x_i, y^i)$ et $V_{m,n}(M_1, M_2, \dots, M_k) = U_{m,n}(M_1, M_2, \dots, M_k;\ x^m y^n)$. Nous supposons, bien entendu que les points M_i soient tels que le déterminant $V_{m,n}$ soit différent de zéro.

Nous étudions ces différences divisées et nous montrons qu'*on peut établir une analogie complète entre le cas d'une et le cas de deux variables.*

Dans le dernier Chapitre nous donnons une généralisation des fonctions convexes et des fonctions *doublement convexes* (Voir P. MONTEL, Journal de Math. 9ème série, t. 7 (1928), p. 29—60) de deux variables.

Nous sommes heureux de pouvoir exprimer ici l'hommage de notre profonde reconnaissance à M. P. MONTEL qui nous a beaucoup encouragé et dont les conseils précieux nous ont été très utiles pour la rédaction de ce travail.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR

CHAPITRE I.

SUR LES DIFFÉRENCES DIVISÉES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE.

§ 1. — Fonctions à différence divisée bornée et fonctions à variation bornée.

1. Nous considérons des fonctions $f(x)$ définies, *uniformes* et *réelles* de la variable *réelle* x sur un ensemble linéaire et borné E. A tout point de E correspond une valeur *finie* et bien déterminée pour $f(x)$. Nous désignons par a l'extrémité gauche et par b l'extrémité droite de l'ensemble E. Les points a et b sont déterminés quel que soit E. Nous désignons par E', E'', ..., les ensembles dérivés successifs de E. Nous disons qu'un ensemble E_1 est *complètement intérieur* à E si tous ses points appartiennent à E et si ses extrémités a_1, b_1 sont intérieurs à l'intervalle (a, b), $(a < a_1 \leq b_1 < b)$.

Nous disons qu'une suite de points de l'axe de la variable x est *ordonnée* ou bien que *ces points sont ordonnés* si leurs abscisses rapportées à une origine fixe sont rangées par ordre de non décroissance. Nous supposons d'ailleurs, sauf avis contraire, que tous les points d'une telle suite sont distincts.

Nous appelons polynome L (polynome de LAGRANGE-HERMITE) le polynome *de plus petit degré*

$$P(x) = P(x_1, x_2, \dots x_k; f \mid x)$$

vérifiant les conditions (1): (les accents désignent des dérivations)

(1) HERMITE a généralisé les polynomes de LAGRANGE dans son mémoire „Sur la formule d'interpolation de LAGRANGE". Journal für die Reine und Angew. Math. t. 84 (1878), p. 70.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\alpha_1)=f(\alpha_1) & \mathrm{P}(\alpha_{p+1})=f(\alpha_{p+1}) & \mathrm{P}(\alpha_{p+q+1})=f(\alpha_{p+q+1})\ldots \\ \mathrm{P}'(\alpha_2)=f'(\alpha_2) & \mathrm{P}'(\alpha_{p+2})=f'(\alpha_{p+2}) & \mathrm{P}'(\alpha_{p+q+2})=f'(\alpha_{p+q+2})\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \mathrm{P}^{(p-1)}(\alpha_p)=f^{(p-1)}(\alpha_p) & \mathrm{P}^{(q-1)}(\alpha_{p+q})=f^{(q-1)}(\alpha_{p+q}) & \mathrm{P}^{(r-1)}(\alpha_{p+q+r})=f^{(r-1)}(\alpha_{p+q+r}) \end{array}$$

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_p,\quad \alpha_{p+1}=\alpha_{p+2}=\cdots=\alpha_{p+q},\quad \alpha_{p+q+1}=\alpha_{p+q+2}=\cdots=\alpha_{q+p+r},\ldots$$

$$p+q+r+\cdots=k.$$

On sait que ce polynome est *unique*.

Enfin nous appelons avec M. NÖRLUND [2] *différence divisée d'ordre* k de la fonction $f(x)$ pour les points distincts $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{k+1}$ l'expression définie par la relation de récurrence

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}; f]=\frac{[\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{k+1}; f]-[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f]}{\alpha_{k+1}-\alpha_1} \tag{1}$$

$$[\alpha; f]=f(\alpha).$$

La quantité (1) est symétrique par rapport aux points α_i et peut se mettre sous la forme d'un quotient

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}; f]=\frac{\mathrm{U}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}; f)}{\mathrm{V}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1})}$$

où

$$\mathrm{U}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}; f)=\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \ldots\ldots & \alpha_1^{k-1} & f(\alpha_1) \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \ldots\ldots & \alpha_2^{k-1} & f(\alpha_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_{k+1} & \alpha_{k+1}^2 \ldots & \alpha_{k+1}^{k-1} & f(\alpha_{k+1}) \end{vmatrix}$$

et

$$\mathrm{V}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1})=\mathrm{U}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}; x^k)$$

est le déterminant de VAN DER MONDE des quantités α_i.

De la formule (1) on peut en déduire d'autres que nous signalerons à mesure de leur emploi. Remarquons ici que

$$f(\alpha_{k+1})-\mathrm{P}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f \mid \alpha_{k+1})= \tag{2}$$

$$=\frac{\mathrm{U}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}; f)}{\mathrm{V}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)}=\frac{\mathrm{V}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1})}{\mathrm{V}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)}\cdot[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}; f].$$

Il en résulte que si $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}; f]=0$, $f(x)$ prend sur E les mêmes valeurs qu'un polynome. Nous disons alors que $f(x)$ est une *fonction polynomiale*.

2. Considérons les différences divisées

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$$

[2] N. E. NÖRLUND „Leçons sur les séries d'interpolation." p. 2.

sur tous les groupes de $n+1$ points *distincts* de E. Si E contient moins de $n+1$ points on peut indifféremment supposer que la $n^{\text{ème}}$ différence divisée n'existe pas ou bien qu'elle soit identiquement nulle.

Posons

$$\overline{\lim_{(\text{sur E})}}.\,|\,[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]\,|=\Delta_n[f; \mathrm{E}].$$

Ce nombre sera appelé la *$n^{\text{ème}}$ borne* de $f(x)$ sur E $\Delta_n[f; \mathrm{E}]$ peut être désigné aussi par $\Delta_n[f]$ ou même Δ_n quand il n'y a pas d'ambiguité et par $\Delta_n\overset{b}{\underset{a}{[f]}}$ quand il s'agit d'un intervalle (a, b).

Nous disons que la fonction est à *$n^{\text{ème}}$ différence divisée bornée* sur E si Δ_n est fini.

Le cas $n=0$ est celui des fonctions bornées; $n=1$ celui des fonctions vérifiant une condition de LIPSCHITZ ordinaire.

3. Considérons m points ordonnés

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \tag{3}$$

et soient

$$\Delta_k^i=[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}; f] \qquad (\Delta_\circ^i=f(x_i)) \tag{4}$$

$$i=1, 2, \ldots, m-k, \quad k=0, 1, 2, \ldots, m-1$$

des différences divisées d'une fonction définie en ces points.

La somme

$$v_n=\sum_{i=1}^{m-n-1}|\Delta_n^{i+1}-\Delta_n^i| \tag{5}$$

est la *$n^{\text{ème}}$ variation de $f(x)$ sur les points* (3).

Soit $f(x)$ définie sur un ensemble E. Les variations v_n sur toutes les suites ordonnées de E ont une limite supérieure $\mathrm{V}_n[f; \mathrm{E}]$. Nous désignons ce nombre par $\mathrm{V}_n[f]$, V_n ou $\mathrm{V}_n\overset{b}{\underset{a}{[f]}}$ et nous l'appelons la *$n^{\text{ème}}$ variation totale de $f(x)$ sur* E.

Nous dirons que la fonction est à *$n^{\text{ème}}$ variation bornée* sur E si V_n est fini.

Le cas $n=0$ est celui des fonctions à variation bornée ordinaire de JORDAN [3]; $n=1$ a été implicitement considéré déjà par M. DE LA

[3] Pour l'étude de ces fonctions voir H. LEBESGUE „Leçons sur l'intégration ... etc." 2ème ed. (1928) p. 96 ; ou encore L. TONELLI „Fondamenti di Calcolo della variazioni" t. I, p. 40.

Vallée Poussin (4) et étudié d'une manière générale par M. A. Winternitz (5).

§ 2. — Propriétés des fonctions dont la $n^{ème}$ différence divisée est bornée.

4. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j$; $\alpha_{j+1}=\beta_{j+1}$, $\alpha_{j+2}=\beta_{j+2}, \ldots, \alpha_k=\beta_k$, $k+j$ points distincts ($1 \leq j \leq k$). Nous avons d'après la formule (1)

$$(\alpha_i-\beta_i)[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_k; f]=$$
$$=[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_k; f]-[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \beta_i, \ldots, \beta_k; f],$$

Faisant $i=1, 2, \ldots, k$, ajoutant membre à membre et supprimant les termes identiquement nuls nous en déduisons la formule suivante:

$$(6)\quad [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f]-[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k; f]=$$
$$=\sum_{i=1}^{j}(\alpha_i-\beta_i)[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_k; f]$$

(pour $j=1$ nous avons la formule (1) elle même).

Cette formule permet d'écrire

$$(7)\quad |[x_1, x_2, \ldots, x_n; f]| \leq |[x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; f]|+\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-x'_i|\right). \Delta_n[f]$$
$$<|[x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; f]|+n(b-a). \Delta_n[f]$$

donc *toute fonction à $n^{ème}$ différence divisée bornée est aussi à $(n-1)^{ème}$ différence divisée bornée.*

En particulier *toute fonction à $n^{ème}$ différence divisée bornée est bornée.*

On voit encore que la fonction est *à nombre dérivés bornés* si $n>1$; elle est donc aussi *continue* dans ce cas.

La continuité résulte également de la formule suivante:

$$(8)\quad |[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]-[x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}; f]| < 2n\Delta_n . \delta$$
$$\delta_i=\max.\left|\frac{x_i-x'_i}{\delta_i}\right| \leq 1 \ (6)$$

(4) Ch. de la Vallée Poussin „Note sur l'approximation par un polynome d'une fonction dont la dérivée est à variation bornée" Bull. Acad. Belgique 1908 p. 403.

(5) A. Winternitz „Über eine Klasse von linearen Funktional Ungleichungen und über konvexe Funktionale". Berichte kön. sächsischen Gesellsch. der Wissensch. zu Leipzig t. 69 (1917) p. 349.

(6) Par la notation $\max(a_1, a_2, \ldots)$ ou $\max_{i=1,2,\ldots}(a_i)$ nous désignons le (ou les) plus grand des nombres $a_1, a_2, \ldots$ Notation analogue pour le plus petit de ces nombres.

δ = longueur du plus petit intervalle contenant les points $x_1, x_2, \ldots, x, x'_i, x'_{i+1}, \ldots, x'_{n+1}$
$i=1, 2, \ldots, n+1$.

Soit x' un point de E' n'appartenant pas à E. Si, quelle que soit la manière dont le point x de E tend vers x', $f(x)$ tend vers une même limite finie et bien déterminée, nous pouvons encore dire que la fonction est continue au point x' en prenant $f(x)$ égal à cette limite.

Il existe toujours un sous-ensemble *dénombrable* E* de E tel que E-E* appartienne à E*' et que la fonction continue $f(x)$ soit complètement déterminée par ses valeurs sur E*.

La formule (1) permet encore d'établir la suivante:

$$(9)\quad (\alpha_{k+1}-\alpha_1)[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{k+1}; f]=$$
$$=(\alpha_i-\alpha_1)[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f]+(\alpha_{k+1}-\alpha_i)[\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{k+1}; f].$$

Si la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$ est ordonnée on voit que la différence divisée $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{k+1}; f]$ est comprise entre les différences divisées $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f]$, $[\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{k+1}; f]$.

Soit $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{k+1}$ une suite partielle extraite de la suite ordonnée $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ et telle que $\alpha'_1=\alpha_1$, $\alpha'_{k+1}=\alpha_m$.

Par application répétée de la formule (9) nous obtenons

$$(10)\quad [\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{k+1}; f]=\sum_{i=1}^{m-k} A_i[\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{i+k}; f] \ (7)$$

où les A_i sont *positifs*, indépendants de la fonction $f(x)$, et ont une somme égale à 1.

Il en résulte que

$$\min_{i=1,2,\ldots,m-k}([\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{i+k}; f]) \leq [\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{k+1}; f] \leq$$
$$\leq \max_{i=1,2,\ldots,m-k}([\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{i+k}; f])$$

(7) On peut remarquer d'une manière générale que si la somme

$$\sum_{i=1}^{m-k} A_i[\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{i+k}; f] \qquad (A_i \text{ indépendants de } f(x))$$

ne dépend explicitement que de $f(\alpha'_1), f(\alpha'_2), \ldots, f(\alpha'_p)$; $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_p$ étant une suite partielle de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, elle est nécessairement de la forme

$$\sum_{i=1}^{p-k} A'_i[\alpha'_i, \alpha'_{+1}, \ldots, \alpha'_{i+k}; f] \qquad (A'_i \text{ indépendants de } f(x)).$$

Un cas particulier de la formule (10) a été employé par M. A. Marchaud dans sa Thèse „Sur les dérivées et les différences des fonctions de variables réelles" (Paris 1927) p. 32.

et
$$|[\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{k+1}; f]| \leq \max_{i=1,2,\ldots,m-k} (|[\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{i+k}; f]|).$$

Supposons que E soit un intervalle et soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}$, $2n+2$ points de cet intervalle.

Supposons que $n > 0$ et écrivons
$$\xi_i = \frac{x_i + \lambda x'_i}{1+\lambda}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

La formule (8) montre que $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; f]$ est une fonction continue de λ pour $\lambda \geq 0$, égale pour $\lambda = 0$ à $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ et pour $\lambda = +\infty$ à $[x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}; f]$.

On en déduit donc la propriété suivante:

Si E *est un intervalle et si* $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = A$, $[x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}; f] = B$, *il existe dans tout intervalle contenant tous les points* x_i, x'_i *une différence divisée prenant une valeur quelconque comprise entre* A *et* B.

La propriété n'est pas vraie pour $n = 0$ puisque dans ce cas on a toujours $\delta = 1$ dans la formule (8).

En particulier si la $n^{ème}$ différence divisée reste en module plus grande qu'un nombre positif, elle garde un signe constant.

Soit $x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_m$ une suite ordonée telle que $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ en soit une suite partielle ($x_1 = x^*_1$, $x_{n+1} = x^*_m$) et telle que
$$\max_{i=1,2,\ldots,m-1} (|x^*_{i+1} - x^*_i|) < \frac{\varepsilon}{n+1}$$
ε étant un nombre positif.

Considérons les différences divisées
$$(11) \qquad d_i = [x^*_i, x^*_{i+1}, \ldots, x^*_{i+n}; f] \qquad i = 1, 2, \ldots, m-n.$$

Supposons maintenant que $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = 0$ et appliquons la formule (10). On voit alors qu'il doit exister au moins un indice i pour lequel $d_i d_{i+1} \leq 0$. De cette inégalité et de la propriété précédemment démontrée on déduit que

Si $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = 0$ *il existe, dans le plus petit intervalle contenant les points* x_i, *un intervalle de longueur aussi petite qu'on veut où il y a au moins une différence divisée nulle.*

En appliquant la propriété à la fonction $f - Ax^n$ et en regardant plus attentivement la démonstration, on voit que si $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = A$, il existe un point x dans le plus petit intervalle contenant les points x_i tel que dans tout intervalle $I(x; \eta)$ de milieu x et de longueur η il existe au moins une différence divisée prenant la valeur A.

Nous pouvons voir encore que, de la formule (6), on peut déduire que si E est un intervalle et si
$$[x_1, x_2, \ldots, x_n; f] = 0, \qquad [x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; f] = 0$$
$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n \quad \text{ordonnés}$$
on peut trouver dans l'intervalle (x_1, x'_n) au moins une $n^{ème}$ différence divisée nulle.

5. Il résulte de la définition que la $n^{ème}$ borne sur un sous-ensemble est au plus égale à Δ_n.

Soit c un point de E et E_1, E_2 les parties de E comprises respectivement dans les intervalles fermés (a, c), (c, b). Nous allons montrer que si l'ensemble E est dense dans l'intervalle (a, b) la $n^{ème}$ borne de $f(x)$ est égale à $\Delta_n[f; E]$ sur l'un au moins des ensembles E_1, E_2.

Pour $n = 0$ la propriété est évidente, quel que soit E.

Supposons donc $n > 0$ et considérons une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m, \ldots$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{m}$. Il existe, par définition, une différence divisée telle que
$$|[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]| > \Delta_n - \frac{\varepsilon_m}{2} > \Delta_n - \varepsilon_m.$$

Si les points x_i sont du même côté du point c nous prenons cette différence divisée et nous la désignons par $\Delta_n(\varepsilon_m)$. Dans le cas contraire, en appliquant au besoin la formule (9), on peut supposer que c intervienne dans la différence divisée considérée.

Soit donc
$$(12) \qquad |[x_1, x_2, \ldots, x_i, c, x_{i+1}, \ldots, x_n; f]| > \Delta_n - \frac{\varepsilon_m}{2}$$
la suite $x_1, x_2, \ldots, x_i, c, x_{i+1}, \ldots, x_n$ étant ordonnée. Appliquons la formule (9) en intercalant un nouveau point entre c, x_{i+1} [ce qui est toujours possible puisque E est supposé dense dans l'intervalle (a, b)] et prenons celle des différences divisées qui vérifie l'inégalité (12). En répétant ce procédé, deux cas peuvent se présenter:

1⁰. Ou bien, il reste toujours i points à gauche de c et alors il y a des différences divisées $[x_1, x_2, \ldots, x_i, c, x'_{i+1}, \ldots, x'_n; f]$ vérifiant (12), les points $x'_{i+1}, \ldots, x'_n$ étant *aussi près qu'on veut de* c. Nous pouvons trouver alors une suite ordonnée $x_1, x_2, \ldots, x_i, x''_{i+1}, \ldots, x''_n$, c telle que la formule (8) nous donne
$$|[x_1, x_2, \ldots, x_i, x''_{i+1}, \ldots, x''_n, c; f]| > |[x_1, x_2, \ldots x_i, c, x'_{i+1}, \ldots, x'_n; f]| - \frac{\varepsilon_m}{2}$$

et alors

$$|[x_1, x_2, \ldots, x_i, x''_{i+1}, \ldots, x''_n, c; f]| > \Delta_n - \varepsilon_m .$$

Nous prenons cette différence divisée pour $\Delta_n(\varepsilon_m)$.

2°. Ou bien, à un moment donné, il n'y a que i-1 points à gauche de c et nous sommes ramenés au cas 1°.

Finalement il existe donc toujours dans E_1 ou E_2 une différence divisée $\Delta_n(\varepsilon_m)$ vérifiant les inégalités

$$\Delta_n \geq |\Delta_n(\varepsilon_m)| > \Delta_n - \varepsilon_m .$$

La suite

$$\Delta_n(\varepsilon_1), \Delta_n(\varepsilon_2), \ldots, \Delta_n(\varepsilon_m), \ldots$$

a donc pour limite Δ_n. Or, il y a certainement une suite partielle infinie située tout entière dans E_1 ou E_2 et cette suite a évidemment la même limite Δ_n, ce qui prouve la propriété.

Nous en déduisons facilement que

La $n^{ème}$ borne d'une fonction définie et à $n^{ème}$ différence divisée bornée sur un ensemble dense dans un intervalle (a, b) est la même que sur un sous-ensemble compris dans un sous-intervalle de (a, b), de longueur aussi petite qu'on veut.

La démonstration précédente nous montre aussi que si E est dense dans un intervalle, la limite supérieure de $|[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]|$ est égale à sa plus grande limite.

La formule (9) nous montre encore que si $|[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]| = \Delta_n$ la $n^{ème}$ différence divisée est constamment égale à $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ dans le plus petit intervalle contenant les points x_i.

L'étude des fonctions dont la $n^{ème}$ différence divisée est une constante A revient à celle des fonctions à $n^{ème}$ différence nulle puisque $f - Ax^n$ est une telle fonction. Cette dernière est donc une fonction polynomiale. Pour préciser nous dirons qu'elle est une *fonction polynomiale d'ordre n-1*. Elle prend sur E les valeurs d'un polynome de degré n-1.

Si la borne Δ_n est atteinte par $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ la fonction est polynomiale d'ordre n sur la partie de E comprise dans le plus petit intervalle contenant les points x_i. Si $\Delta_n > 0$, le degré du polynome est effectivement égal à n.

6. Entre deux bornes Δ_n, Δ_m il n'y a en général aucune relation.

Reprenons la formule (7). La relation (1) nous montre que

$$|[x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; f]| \leq A_k \cdot \Delta_k, \quad k < n-1 \tag{13}$$

où A_k dépend des points x'_i. Le minimum A de A_k dépend seulement de l'ensemble E. Nous avons alors

$$\Delta_{n-1} \leq A \cdot \Delta_k + B \cdot \Delta_n, \quad k < n-1 \tag{14}$$

où A, B ne dépendent que de l'ensemble E.

D'une manière générale *entre trois bornes $\Delta_p, \Delta_q, \Delta_r$, $p < q < r$ il y a toujours une relation de la forme $\Delta_q \leq A \cdot \Delta_p + B \cdot \Delta_r$, où A et B ne dépendent que de l'ensemble E.*

Supposons en particulier que E soit un intervalle fermé (a, b). On peut écrire

$$|[x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; f]| \leq \frac{2}{|x'_1 - x'_n|} \cdot \Delta_{n-2}$$

$$\min. \frac{2}{|x'_1 - x'_n|} = \frac{2}{b-a} .$$

Les résultats du Nr. 5 nous montrent que pour rendre minimum le coefficient de Δ_n dans la formule (7) il est permis de prendre

$$x'_2 = x'_3 = \cdots = x'_{n-1} = x_1 = x_2 = \cdots = x_n .$$

On obtient alors la formule

$$\Delta_{n-1} \leq \frac{2}{a-b} \Delta_{n-2} + (b-a)\Delta_n . \tag{15}$$

Prenons aussi

$$|[x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; f]| \leq \frac{2(x'_n + x'_{n-1} - x'_1 - x'_2)}{(x'_n - x'_1)(x'_{n-1} - x'_1)(x'_n - x'_2)} \Delta_{n-3}$$

$$n > 3, \; x'_1 < x'_2 < x'_{n-1} < x'_n .$$

Procédant comme plus haut, on arrive à la relation

$$\Delta_{n-1} \leq \frac{4}{(b-a)^2} \Delta_{n-3} + 2(b-a)\Delta_n \qquad (n > 3) . \tag{16}$$

Prenons encore

$$|[x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; f]| \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} |V(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{i-1}, x'_{i+1}, \ldots, x'_n)|}{|V(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)|} \Delta_0 .$$

Le minimum du coefficient de Δ_0 est égal à [8]

$$\frac{2^{2n-3}}{(b-a)^{n-1}}$$

[8] Le maximum de l'invers de cette quantité est en effet égal au maximum du polynome $x^{n-1} + \ldots$ s'écartant le moins possible de zéro dans l'intervalle (a, b). Voir Ch. de la VALLÉE POUSSIN „Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle" Chap. VI. Le polynome en question est

$$\frac{(b-a)^{n-1}}{2^{2n-3}} \cos\left[(n-1) \arc\cos \frac{2x-a-b}{b-a}\right]$$

Voir: S. BERNSTEIN „Leçons sur les propriétés extrémales... etc." p. 6.

avec

$$x'_i = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2}\cos\frac{i-1}{n-1}\pi\,, \qquad i=1,2,\dots,n\,.$$

Nous avons alors

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x'_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x'_i - a| = \frac{b-a}{2}\left(n - \sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i-1}{n-1}\pi\right) = \frac{n}{2}(b-a)$$

d'où la relation

$$\Delta_{n-1} \le \frac{2^{2n-8}}{(b-a)^{n-1}}\Delta_0 + \frac{n}{2}(b-a)\Delta_n\,. \tag{17}$$

Dans les relations (15), (16), (17) on peut évidemment remplacer $b-a$ par un nombre inférieur.

Les inégalités précédentes sont celles de M. HADAMARD (9) lorsqu'on suppose l'existence de la $n^{ème}$ dérivée. Nous les avons obtenues par une méthode très simple.

7. Si f et φ sont à $n^{ème}$ différence divisée bornée, $f+\varphi$, cf où c est une constante sont aussi à $n^{ème}$ différence divisée bornée.

Le produit de deux fonctions à $n^{ème}$ différence divisée bornée est encore à $n^{ème}$ différence divisée bornée. Cela résulte de la formule (10)

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}\,; f\,.\,\varphi] = \sum_{i=0}^{k} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-i+1}\,; f]\,. \tag{18}$$

$$[\alpha_{k-i+1}\,, \alpha_{k-i+2}\,, \dots, \alpha_{k+1}\,; \varphi]$$

que l'on vérifie facilement par récurrence à l'aide de (1).

Plus généralement si F et f sont à $n^{ème}$ différence divisée bornée $F(f)$ l'est aussi. Cela va résulter d'une formule donnant la différence divisée d'une fonction de fonction.

Posons

$$f_i = f(\alpha_i)\,, \qquad i=1,2,\dots,k+1.$$

On a évidemment une relation de la forme

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}\,; F(f)] = \sum_{i=1}^{k} [f_i, f_{i+1}, \dots, f_{k+1}\,; F]\,. \tag{19}$$

$$.\, A_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1})$$

(9) Voir par ex. T. CARLEMAN „Les fonctions quasi-analytiques" (Paris, 1926) Chap. II.

(10) C'est l'analogue en termes finis de la formule de LEIBNITZ. Pour des points équidistants elle a été signalée par M. E. JACOBSTHAL „Mittelwertbildung und Reihentransformation" Math. Zeitschr. t. 6 (1920) p. 100.

les $A_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1})$ ne dépendant que de la fonction $f(x)$. Ces quantités peuvent se calculer à l'aide des relations de récurrence

$$A_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}) = \sum_{j=1}^{i} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}\,; f]\,.\, A_{i-j+1}^{(k+1)}(\alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_k)$$

$$A_k^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}) = [\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}\,; f)\,.$$

Si nous désignons par $d_r', d_r'', \dots, d_r^{(p)}$ des différences divisées d'ordre r de la fonction $f(x)$ sur des points α_i, convenablement choisis, le coefficient $A_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1})$ est de la forme

$$\sum d_1' d_1'' \dots d_1^{(p)} d_2' d_2'' \dots d_2^{(q)} \dots d_k' d_k'' \dots d_k^{(t)} \tag{20}$$

avec

$$p+q+\dots+t = k-i+1, \qquad p+2q+\dots+kt = k \ (11). \tag{21}$$

Par exemple si f est à $n^{ème}$ différence divisée bornée, f^k l'est aussi si $k \ge n$ (12), ou bien si k est un entier positif. Si $|f| > c > 0$ sur E, f^k est à $n^{ème}$ différence divisée bornée quel que soit k. On en déduit que le quotient de deux fonctions à $n^{ème}$ différence divisée bornée l'est aussi si le dénominateur reste en module plus grand qu'un nombre positif. Nous en déduisons aussi que le module d'une fonction à $n^{ème}$ différence divisée bornée n'est pas en général à $n^{ème}$ différence divisée bornée si $n > 1$.

Considérons une famille de fonctions (f) définies sur un même ensemble E. Désignons par Δ_n^* la limite supérieure des $n^{èmes}$ bornes des fonctions de cette famille. On voit tout d'abord que si Δ_n^* est fini, toute fonction limite de la famille est à $n^{ème}$ différence divisée bornée et sa borne ne dépasse pas Δ^*_n. Si Δ^*_n est fini, il ne résulte pas encore que $\Delta^*_0, \Delta^*_1, \dots, \Delta^*_{n-1}$ sont finis. Mais si Δ^*_n, Δ^*_m $(m < n)$ sont finis il résulte des inégalités de M. HADAMARD que $\Delta^*_{m+1}, \Delta^*_{m+2}, \dots, \Delta^*_{n-1}$ sont aussi finis. Si les fonctions de la famille ne sont pas définies sur le même ensemble des circonstances toutes différentes peuvent se présenter.

Considérons une suite d'ensembles finis $E^*_1, E^*_2, \dots, E^*_m, \dots$ chacun contenant le précédent et ayant pour limite E^*, évidemment dénombrable ; inversement, tout ensemble dénombrable peut s'obtenir de

(11) La somme (20) s'étend à toutes les solutions en nombres entiers et positifs du système (21) et à chaque solution correspondent $\dfrac{(k-i+1)!}{p!\,q!\dots t!}$ termes. La formule (19) donne à la limite la dérivée $k^{ème}$ d'une fonction de fonction.

(12) On considère bien entendu une branche réelle de la fonction f^k.

cette manière. Soit une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m, \ldots, f_m$ étant définie sur E^*_m, $m=1, 2, \ldots$, et telle que

$$\Delta_0[f_m ; E^*_m] \leq \Delta_0, \quad \Delta_n[f_m ; E^*_m] \leq \Delta_n, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Il existe alors au moins une fonction limite $f(x)$ définie sur E^* vérifiant les inégalités

$$\Delta_0[f ; E^*] \leq \Delta_0, \quad \Delta_n[f ; E^*] \leq \Delta_n .$$

La démonstration est immédiate [13].

§ 3. Propriétés des fonctions à $n^{ème}$ variation bornée.

8. La formule (6) donne

$$(22) \quad |\, [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f] \,| \leq |\, [x_1', x_2', \ldots, x'_{n+1} ; f] \,| + (n+1)\, V_n$$

donc, *toute fonction à n^{me} variation bornée est à n^{me} différence divisée bornée.*

La réciproque n'est pas vraie.

De (1) et de (5) nous déduisons $V_n \leq (n+1)(b-a)\,\Delta_{n+1}$, donc *toute fonction à $(n+1)^{ème}$ différence divisée bornée est à $n^{ème}$ variation bornée.*

La réciproque n'est pas vraie [14].

Il en résulte que *toute fonction à $n^{ème}$ variation bornée est aussi à $(n-1)^{ème}$ variation bornée.* En particulier une telle fonction est toujours *bornée.*

Posons $v_n = v_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ en mettant en évidence les points (3). Soit $v_n^{(m)}$ la limite supérieure des $v_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ lorsque les points varient sur E, leur nombre restant fixe. A tout $\varepsilon > 0$ correspond donc au moins une suite (3) telle que

$$v_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) > v_n^{(m)} - \varepsilon.$$

On démontre facilement, à l'aide de la formule (9), que si on ajoute un nouveau point x, compris par exemple entre x_i, x_{i+1}, on a

$$v_n(x_1, x_2, \ldots, x_i, x, x_{i+1}, \ldots, x_m) \geq v_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

d'où

$$v_n^{(m+1)} > v_n^{(m)} - \varepsilon$$

(13) La démonstration se fait par la méthode diagonale bien connue. Grâce aux travaux de M. MONTEL, c'est aujourd'hui une méthode courante dans ce genre de problèmes.

(14) Il est facile de mettre en défaut la réciproque par des fonctions convenablement choisies et par des intégrations répétées.

donc

$$v_n^{(m+1)} \geq v_n^{(m)} .$$

La quantité $v_n^{(m)}$ tend donc pour $m \to \infty$ vers une limite, qui est nécessairement égale à V_n. Si E contient m points $V_n = V_n^{(m)}$. Si E contient une infinité de points V_n est aussi la plus grande des limites des v_n.

Il est à peu près évident que, si E^* est un sous-ensemble de E, on a $V_n[f ; E^*] \leq V_n[f ; E]$.

Prenons un point c appartenant à $E+E'$ et désignons par E_1, E_2, les parties de E comprises dans les intervalles fermés (a, c), (c, b).

Il est facile de voir que

$$V_n[f ; E_1] + V_n[f ; E_2] \leq [f ; E] .$$

Supposons maintenant que c appartienne à E. Soit v'_n la variation sur les points (3) auxquels on ajoute le point c et v''_n, v'''_n les variations sur les points de cette suite qui sont respectivement dans E_1 et E_2. On peut prendre les points (3) de manière que

$$v_n^{(m)} - \varepsilon < v_n \leq v'_n \leq v''_n + v'''_n ,$$

d'où

$$V_n[f ; E] \leq V_n[f ; E_1] + V_n[f ; E_2] .$$

Nous avons donc dans ce cas

$$(23) \qquad V_n[f ; E] = V_n[f ; E_1] + V_n[f ; E_2] .$$

9. Si $n > 0$, une fonction à $n^{ème}$ variation bornée est continue.

Soit E^* un sous-ensemble dénombrable de E, tel que $E\text{-}E^*$ appartienne tout entier au dérivé de E^* (E^* peut coïncider avec E).

A toute variation v_n et à tout nombre $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre une variation v^*_n sur E^* telle que $v_n < v^*_n + \varepsilon$, donc : $V_n[f ; E] \leq V_n[f ; E^*]$.

Mais on a aussi $V_n[f ; E] \geq V_n[f ; E^*]$, donc:

$$V_n[f ; E] = V_n[f ; E^*] ;$$

Nous pouvons toujours trouver une suite d'ensemble E^* finis $E^*_1, E^*_2, \ldots, E^*_m, \ldots$, chacun contenant le précédent, telle que la fonction soit complètement déterminée par ces valeurs sur la limite E^* de cette suite, et telle aussi que

$$\lim_{m \to \infty} V_n[f ; E^*_m] = V_n[f ; E] .$$

Ces propriétés résultent de la continuité. Elles restent donc vraies pour $n=0$ si la fonction est continue. On voit aussi que dans ce cas (23) reste vraie même si c est un point de E'.

10. Si f, φ sont à $n^{ème}$ variation bornée il en est de même pour $f+\varphi$ et cf, c étant une constante.

La formule (19) permet de montrer que si f est à $n^{ème}$ variation bornée et F à $(n+1)^{ème}$ différence divisée bornée, $F(f)$ est à $n^{ème}$ variation bornée. f^k l'est aussi pourvu que $k \geq n+1$ ou bien égal à un nombre entier positif. La propriété est vraie quel que soit k si $|f| > c > 0$. On en déduit que le quotient de deux fonctions à $n^{ème}$ variation bornée est à $n^{ème}$ variation bornée si le dénominateur reste en module plus grand qu'un nombre positif.

Il est à remarquer que f^k peut ne pas être à $n^{ème}$ variation bornée si $k < n+1$. Par exemple la fonction

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n^3}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

est à variation bornée ordinaire (d'ordre 0) tandis que $f^{\frac{1}{3}}$ est à variation non bornée.

Si la $n^{ème}$ variation totale des fonctions d'une famille (f) reste au-dessous d'un nombre fixe, toute fonction limite a une variation totale d'ordre n au plus égale à ce nombre.

Soit enfin, comme au No. 7, une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m, \ldots$, définies respectivement sur les ensembles finis $E^*_1, E^*_2, \ldots, E^*_m, \ldots$ et telles que

$$\Delta_0 [f_m ; E^*_m] \leq \Delta_0, \quad V_n [f_m ; E^*_m] \leq V_n,$$

il existe alors au moins une fonction limite définie sur l'ensemble limite E^* et vérifiant les inégalités

$$\Delta_0 [f ; E^*] \leq \Delta_0, \quad V_n [f ; E^*] \leq V_n.$$

La formule (22) nous montre d'ailleurs, par un raisonnement analogue à celui employé au No. 6 que

$$\Delta_n \leq A . \Delta_0 + (n+1) V_n$$

A étant un nombre fixe dépendant des ensembles E^*_m, cette inégalité étant vérifiée par toutes les fonctions f_m. La limite $f(x)$ peut alors être déterminée et elle vérifie aussi l'inégalité

$$\Delta_n[f ; E^*] \leq A . \Delta_0 + (n+1) V_n.$$

CHAPITRE II.

DÉFINITION ET PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

§. 1. — Classification des fonctions de variable réelle par rapport aux polynomes.

11. Considérons $n+2$ points ordonnés de l'ensemble E

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} \tag{24}$$

et représentons la fonction $f(x)$ par les points A_i de coordonnées x_i, $f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n+2$.

Le point A_{n+2} peut avoir trois positions différentes par rapport à la courbe représentative (L) du polynome

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f \,|\, x).$$

Il peut être *au-dessus*, *sur* ou *au-dessous* de (L). Nous dirons que la fonction est *convexe*, *polynomiale*, ou *concave* pour les points (24) suivant les trois cas.

Analytiquement, on aura les trois relations

$$f(x_{n+2}) \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f \,|\, x_{n+2}).$$

La formule (2) permet d'écrire ces relations sous la forme

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} ; f] \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0. \tag{25}$$

Sous cette forme, on voit que la définition est *indépendante de l'ordre des points*.

Si les points (24) sont ordonnés on peut écrire aussi

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} ; f) \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$

puisque dans ce cas, $V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) > 0$.

En général le point A_i aura une disposition précise par rapport au polynome

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+2} ; f \,|\, x). \tag{26}$$

La fonction est par exemple convexe si le point A_i est au-dessus ou au-dessous de cette ligne suivant que $n+2-i$ est pair ou impair.

Nous pouvons donner la définition générale

La fonction sera appelée **convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe** *ou* **concave** *d'ordre n sur l'ensemble* E *suivant que les différences divisées d'ordre* $n+1$ *sur tous les groupes de* $n+2$ *points de* E *sont* >0, ≥ 0, $=0$, ≤ 0, <0.

Ces fonctions forment *la classe des fonctions d'ordre n.*

Pour $n=0$, nous avons les fonctions monotones. Pour $n=1$ les fonctions convexes ou concaves ordinaires.

Si la fonction $f(x)$ est convexe ou concave, $-f(x)$ est respectivement concave ou convexe. On peut prendre la fonction non-concave d'ordre n comme type de fonction d'ordre n. Les fonctions convexes et polynomiales peuvent alors être regardées comme des cas particuliers. Dans l'étude des fonctions d'ordre n il s'agira toujours, sauf avis contraire, de fonctions non-concaves.

Il peut arriver qu'une fonction possède à la fois plusieurs propriétés de convexité d'ordre différents. Nous dirons qu'elle est *de la classe* $(a, b, c, \ldots)$ si elle possède des propriétés d'ordre $a, b, c, \ldots$ Pour mettre en évidence la nature de la fonction nous affecterons les nombres $a, b, c, \ldots$ d'indices de la manière suivante: $a, a^*, \bar{a}, a', a'^*$ suivant que la fonction est non-concave, convexe, polynomiale, non-convexe ou concave d'ordre a. Il est quelquefois utile de distinguer les fonctions de signe invariable. Pour l'uniformité des notations, nous conviendrons de les appeler *fonctions d'ordre* -1, et nous affecterons ce nombre d'indices, comme plus haut, suivant que la fonction reste $>0, \geq 0, =0, \leq 0, <0$.

12. Si nous faisons le changement de variables

$$x=\alpha x'+\beta, \quad y'=\gamma y+\delta, \quad f_1(x')=\gamma f(\alpha x'+\beta)+\delta$$

nous obtenons facilement

$$[x_1', x_2', \ldots, x'_{n+2}; f] = \frac{\gamma}{\alpha^{n+1}}[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f].$$

Donc un changement d'axes de coordonnées ne change pas l'ordre de la fonction. Un changement d'unités sur les axes, ou un déplacement d'origine ne changent pas la nature de convexité de la fonction. La nature de la fonction ne change pas si on change l'orientation des deux axes, la fonction étant d'ordre pair, ou bien l'orientation de l'axe des abscisses, la fonction étant d'ordre impair. Dans les autres cas, la fonction non-concave (convexe) se change en une fonction non-convexe (concave).

Soient a', b', les extrémités d'un sous-ensemble complètement intérieur à E. Dans la suite (24) prenons le point x_1 dans l'intervalle (a, a') fermé à droite et x_{n+2} dans l'intervalle (b', b) fermé à gauche. La fonction est, par définition, comprise entre les deux polynomes L

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x), \qquad P(x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}; f \mid x)$$

Toute fonction d'ordre n (≥ 0) *est bornée sur tout sous-ensemble complètement intérieur à l'ensemble sur lequel cette fonction est définie.*

Si E contient ses extrémités, on peut prendre $x_1=a$, $x_{n+2}=b$ et on voit alors qu'*une fonction d'ordre n* (≥ 0) *définie sur un ensemble contenant ses extrémités est bornée.*

Nous pouvons remarquer encore que si $f(x)$ est d'une classe donnée sur E, elle sera de même classe sur tout sous-ensemble de E à condition, bien entendu, de regarder la convexité et la polynomialité comme des cas particuliers de la non-concavité.

13. Occupons-nous des fonctions définies sur un ensemble fini. Prenons une fonction définie sur la suite ordonnée (3) et employons les notations (4); on voit alors que

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction soit non-concave (convexe, polynomiale) d'ordre n sur (3) *sont:*

$$\Delta^i_{n+1} \geq 0, \ (>0, =0), \qquad i=1, 2, \ldots, m-n-1.$$

Ces conditions sont, par définition, nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes.

Il suffit de montrer que de l'hypothèse

$$\Delta^1_{n+1}, \Delta^2_{n+1} \geq 0, \qquad (>0, =0)$$

on peut conclure

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+3}; f] \geq 0, \ (>0, =0)$$
$$i=2, 3, \ldots, n+1.$$

Construisons les polynomes L

(27) $\quad P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x), \quad P(x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}; f \mid x)$

(28) $\quad P(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+2}; f \mid x)$

et soit le point $A_i(x_i, f(x_i))$. On vérifie sur la figure que si les signes ne se correspondaient pas le polynome (28) aurait en commun avec l'un au moins des polynomes (27) plus de n points [15] ce qui ne saurait arriver que si les trois polyomes (27), (28) coïncident. Il y a alors contradiction, ce qui démontre la propriété. En répétant ce procédé

(15) Si deux polynomes coïncident sans se traverser, ce point compte au moins pour deux points d'intersections.

on peut atteindre tous les groupes de $n+2$ points de (3). La propriété résulte d'ailleurs aussi très simplement de la formule (10).

La fonction étant non-concave d'ordre n sur (3) la suite

$$\Delta^1_{n+1},\quad \Delta^2_{n+1},\ldots,\Delta^{m-n-1}_{n+1} \tag{29}$$

ne présente pas de variation de signe [16]. La formule (1) montre alors que la suite

$$\Delta^1_n,\quad \Delta^2_n,\ldots,\Delta^{m-n}_n$$

est non-décroissante. Si f est convexe cette suite est croissante et si elle est polynomiale, la suite a tous ses termes égaux.

Une fonction polynomiale d'ordre n est aussi polynomiale d'ordre supérieur à n, elle ne peut être que convexe, polynomiale, ou concave d'ordre $(n-1)$ [17]. Pour qu'une fonction d'ordre n soit aussi d'ordre $n-1$ il suffit d'ajouter une condition supplémentaire, comme nous le montre la monotonie de la suite (30). Cette condition est mise en évidence dans le tableau suivant

		nature d'ordre n de la fonction				
		n^*	n	$\bar{n}$	n'	n'^*
propriété supplémentaire	$(n-1)^*$	$\Delta^1_n>0$	$\Delta^1_n>0$	$\Delta^1_n>0$	$\Delta^{m-n}_n>0$	$\Delta^{m-n}_n>0$
	$(n-1)$	$\Delta^1_n=0$	$\Delta^1_n=0$	impossibilité	$\Delta^{m-n}_n=0$	$\Delta^{m-n}_n=0$
	$(n-1)'$	$\Delta^{m-n}_n=0$	$\Delta^{m-n}_n=0$		$\Delta^1_n=0$	$\Delta^1_n=0$
	$(n-1)'^*$	$\Delta^{m-n}_n<0$	$\Delta^{m-n}_n<0$	$\Delta^1_n<0$	$\Delta^1_n<0$	$\Delta^1_n<0$

Maintenant, pour que la fonction soit d'ordre -1, 0, 1, 2, ..., n il nous faut m conditions au plus (dont une constante additive éventuelle correspondant à l'ordre -1). Pour que la fonction soit de classe donnée il suffira d'égaler les différences divisées Δ^1_{n+1}, Δ^2_{n+1}, ..., Δ^{m-n-1}_{n+1}, $\Delta^{i_n}_n$, $\Delta^{i_{n-1}}_{n-1}$, ..., $\Delta^{i_1}_1$ et $f(x_{i_0})$ à des nombres convenablement choisis, i_j étant égal à 1 ou $m-j$ suivant le caractère de la classe. On voit immédiatement que le système est toujours compatible sous les restrictions signalées, donc:

Il existe des fonctions d'une classe donnée d'avance sur m points, pourvu que cette classe vérifie les conditions suivantes:

1⁰. *La condition d'ordre n étant polynomiale, toutes les conditions d'ordre supérieur sont polynomiales.*

(16) Une suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ présente une variation de signe entre α_m, α_{m+1} si $\alpha_m . \alpha_{m+1} < 0$. Si $\alpha_{m+1}=\alpha_{m+2}=\cdots=\alpha_{m+k-1}=0$ il y a *une* variation de signe entre α_m, α_{m+k} lorsque $\alpha_m . \alpha_{m+k} < 0$.

(17) Elle est d'ailleurs nécessairement d'ordre $n-1$.

2⁰. *La condition d'ordre n étant la plus petite condition de polynomialité la condition d'ordre $n-1$ est de convexité ou concavité.*

Soit $f(x)$ une fonction d'ordre n définie sur un ensemble quelconque. Je dis que *si elle est polynomiale sur une suite ordonnée $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ elle sera nécessairement polynomiale sur toute la partie de E comprise dans l'intervalle fermé (x_1, x_{n+2}).*

Soient $x_1', x_2', \ldots, x'_{n+2}$ $n+2$ points de E dans (x_1, x_{n+2}) non nécessairement tous distincts des x_i. Il suffit évidemment de montrer que

$$[x_1', x_2', \ldots, x'_{n+2}; f] = 0.$$

Or, parmi les points x'_i il y a au moins *un* qui est distinct des x_i, par exemple x_1', supposons $x_i < x_1' < x_{i+1}$.

Il suffit de considérer les deux polynomes L

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_i, x_1', x_{i+1}, \ldots, x_n; f \mid x),\ P(x_2, x_3, \ldots, x_i, x'_1, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; f \mid x)$$

pour voir que si $A_1'(x_1', f(x_1'))$ ne se trouve pas sur

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x)$$

la fonction ne peut être d'ordre n. Analytiquement, la propriété est immédiate en vertu de la formule (10).

14. Si la fonction $f(x)$ est d'ordre n sur (3) la suite (29) ne présente pas de variations de signes. On en déduit alors que la suite

$$\Delta^1_{n-k+1},\ \Delta^2_{n-k+1},\ldots,\Delta^{m-n+k-1}_{n-k+1} \tag{31}$$

présente k variations de signes au plus [18].

Supposons que $f(x)$ soit définie et d'ordre n sur E. Nous allons admettre que toute fonction définie sur moins de $n+2$ points soit d'ordre n et que sa nature de convexité soit *la plus défavorable* pour les propriétés que nous avons en vue.

Nous dirons que deux différences divisées d'ordre quelconque

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1}; f],\quad [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r+1}; f]$$

sont *consécutives* si on a

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{r+1} \leq \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{r+1}$$

ou bien généralement

$$\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_i=\beta_1<\alpha_{i+1}=\beta_2<\ldots<\alpha_{r+1}=\beta_{r-i+2}<\beta_{r-i+3}<\ldots<\beta_{r+1}$$

Considérons les points α, β, γ dans l'intervalle (a, b) tels que $a \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq b$. Soit E_1 la partie de E comprise dans l'inter-

(18) Cela résulte du fait que si $a_2-a_1, a_3-a_2, \ldots, a_m-a_{m-1}$, présente k variations, la suite $a_1, a_2, \ldots, a_m$ présente $k+1$ variations au plus.

valle (α, β) et E_2 la partie de E comprise dans (β, γ). Le point β appartient à l'un au moins des ensembles E_1 et E_2. Nous dirons alors que E_1, E_2 *sont deux sous-ensembles consécutifs de* E.

Soit maintenant c un point intérieur à l'intervalle (a, b). Je dis que *la fonction est d'ordre $n-k$ dans le voisinage gauche et dans le voisinage droit de c*.

Pour fixer les idées, démontrons la propriété pour le voisinage gauche. Considérons donc l'intervalle (a, c) *ouvert à droite*. Il faut démontrer qu'on peut trouver un point c' à gauche de c tel que dans l'intervalle (c', c) *ouvert à droite* la fonction soit d'ordre $n-k$. Si c n'appartient pas à E' ou bien si c est point limite seulement de droite la propriété est évidente puisqu'il n'y a alors qu'un nombre fini de points à gauche de c. Supposons donc que c soit point limite de gauche de E et supposons que le point c' n'existe pas. On peut alors trouver un point α à gauche de c tel que dans l'intervalle (α, c) *ouvert à droite* il existe deux différences divisées $\Delta^{(1)}_{n-k+1}$, $\Delta^{(2)}_{n-k+1}$ *non nulles et de signes contraires*. Les résultats du No. 13 nous montrent qu'on peut supposer que $\Delta^{(1)}_{n-k+1}$, $\Delta^{(2)}_{n-k+2}$ soient consécutives. Soit α' le point le plus proche de c qui intervient dans ces différences divisées. Dans l'intervalle (α', c) *ouvert à droite* on peut trouver deux différences divisées consécutives $\Delta^{(3)}_{n-k+1}$, $\Delta^{(4)}_{n-k+1}$ non nulles et de signes contraires. Soit α'' le point le plus proche de c qui intervient dans ces différences divisées. On continue le procédé jusqu'à ce qu'on arrive au point $\alpha^{(k+1)}$. Nous avons ainsi une suite de différences divisées consécutives

$$\Delta^{(1)}_{n-k+1},\ \Delta^{(2)}_{n-k+1},\ \dots,\ \Delta^{(2k+1)}_{n-k+1},\ \Delta^{(2k+2)}_{n-k+1} \tag{32}$$

qui, par construction, présente *au moins* $k+1$ variations de signes.

Considérons tous les points qui interviennent dans les différences divisées (32) et formons la suite (31) correspondante. Cette suite a, par définition *au plus* k variations de signes. Or il y a contradiction puisque (32) en est une suite partielle [19]. L'existence du point c' est donc établie.

On démontre de la même manière la propriété pour le voisinage droit de c.

La propriété est vraie même pour $k=n+1$.

Il résulte immédiatement de cette propriété *qu'on peut décomposer* l'ensemble E en un *nombre fini* d'ensemble consécutifs

[19] Il est clair qu'une suite présente au moins autant de variations de signes qu'une quelconque de ses suites partielles.

$$E_1,\ E_2,\ \dots,\ E_m, \tag{33}$$

tel que sur chacun la fonction soit d'ordre $n-k$.

Les ensembles E_1 et E_m peuvent éventuellement être formés par les seuls points a et b et alors ils n'ont pas de point commun avec E_2 resp. E_{m-1}.

Supposons que la décomposition (33) soit faite de manière qu'on ne puisse pas remplacer ces ensembles par un nombre plus petit d'ensembles vérifiant la même propriété. On peut alors supposer que deux ensembles E_i, E_{i+1} l'un au moins a au moins $n-k+2$ points.

Montrons qu'on peut former une suite de différences divisées

$$\Delta^{(1)}_{n-k+1},\ \Delta^{(2)}_{n-k+1},\ \dots,\ \Delta^{(m)}_{n-k+1} \tag{34}$$

toutes différentes de zéro et *de signes alternés* En effet il existe par hypothèse dans E_1+E_2 deux différences divisées non nulles et des signes contraires. On peut les supposer consécutives (No. 13); soient $\Delta^{(1)}_{n-k+1}$, $\Delta^{(2)}_{n-k+1}$. De plus on peut toujours supposer qu'ou bien $\Delta^{(1)}_{n-k+1}$ soit dans E_1, ou bien $\Delta^{(2)}_{n-k+1}$ soit dans E_2. On voit alors qu'on peut trouver une différence divisée $\Delta^{(3)}_{n-k+1}$ consécutive à $\Delta^{(2)}_{n-k+1}$ et située dans E_2+E_3 telle que $\Delta^{(2)}_{n-k+1} \cdot \Delta^{(3)}_{n-k+1} < 0$. En effet si celà n'était possible pour aucun choix de $\Delta^{(1)}_{n-k+1}$, $\Delta^{(2)}_{n-k+1}$ la fonction serait d'ordre $n-k$ sur E_2+E_3. Et ainsi de suite.

Formons la suite (31) correspondant à tous les points qui interviennent dans (34). Cette suite a au plus k variations; (34) en est une suite partielle, donc, $m-1 \leq k$, d'où $m \leq k+1$.

On peut donc énoncer la propriété:

Si la fonction $f(x)$ est d'ordre n sur l'ensemble E, *on peut décomposer cet ensemble en $k+1$ ensembles consécutifs au plus sur chacun la fonction étant d'ordre $n-k$.*

Cette décomposition peut en général être effectuée d'une infinité de manières. Dans certains cas, par exemple si la fonction est *convexe* et si E est un intervalle, la décomposition est *unique*. On peut le démontrer très facilement.

Si $n=1$ la fonction jouit d'une propriété de convexité ordinaire. Une telle fonction se décompose en au plus *deux* fonctions monotones et en au plus *trois* fonctions de signe constant. Les ensembles extrêmes de décomposition peuvent se composer effectivement des points a et b seuls. Soit par exemple la fonction

$$f(0)=f(1)=1,\quad f(x)=x-1,\quad (0<x<1).$$

Nous avons les décompositions:

si $k=1$ les ensembles sont E_1 (point 0), E_2 (intervalle $0 < x \leq 1$)
si $k=2$ les ensembles sont E_1 (point 0), E_2 (int. $0 < x < 1$), E_3 (point 1).

15. Démontrons encore la propriété suivante

Toute fonction d'ordre n (≥ 0) définie sur un ensemble fermé atteint son maximum et son minimum.

Démontrons la propriété relative au maximum. Nous savons déjà que la fonction est bornée, il existe donc un nombre A tel que

$$f(x) < A - \frac{1}{m} \text{ sur E}$$

$$f(x) > A - \frac{1}{m} \text{ en au moins un point de E}$$

et ceci pour tout nombre m entier et positif.

Soit une suite monotone, par exemple

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots\ldots < x_m < \ldots\ldots \tag{35}$$

telle que $f(x_m) > A - \frac{1}{m}$.

A une extraction de suite près on peut supposer que la suite (35) soit telle qu'on ait $x - x_m < \frac{1}{m}$, x étant le point limite de la suite.

Il suffit évidemment d'examiner le cas où la suite (35) est infinie. On a alors nécessairement $x > x_m$ pour tout m.

De l'inégalité

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_m, x; f) \geq 0 \qquad (m > n)$$

nous déduisons

$$f(x) \geq f(x_m) + \frac{B}{m}$$

B étant une constante finie, donc

$$A + \frac{1}{m} > f(x) > A + \frac{B-1}{m}$$

d'où

$$f(x) = A.$$

On démontre de la même manière la propriété relative au minimum.

De la définition résulte qu'une fonction convexe (ou concave) d'ordre n ne peut prendre plus de $n+1$ fois la même valeur. Démontrons la propriété suivante:

Une fonction convexe (ou concave) d'ordre n définie sur un ensemble dense dans un intervalle atteint son maximum en $\left[\frac{n+3}{2}\right]$ *(ou* $\left[\frac{n+2}{2}\right]$*) et son minimum en* $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ *(ou* $\left[\frac{n+3}{2}\right]$*) points au plus,* $[\alpha]$ *désignant l'entier égal ou immédiatement inférieur à* α

Pour fixer les idées, supposons $n=2m$ et démontrons la propriété relative au minimum.

Supposons que contrairement à l'énoncé, le minimum A soit atteint aux points ordonnés

$$x_1, x_2, \ldots, x_{m+k+1} \qquad m \geq k > 0 \tag{36}$$

en tout autre point la fonction étant plus grande que A.

On peut toujours intercaler entre les points (36) les points $x_1', x_2', \ldots, x'_{m-k+1}$ de E tels que la suite

$$x_1, x_2, \ldots, x_{2k}, x_1', x_{2k+1}, x_2', x_{2k+2}, \ldots, x_{m+k}, x'_{m-k+1}, x_{m-k+1} \tag{37}$$

soit ordonnée.

Développant le premier membre de la relation

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{2k}, x_1', x_{2k+1}, x_2', x_{2k+2}, \ldots, x_{m+k}, x'_{m-k+1}, x_{m+k+1}; f] > 0$$

nous avons

$$\sum_{i=1}^{2m+2} (-1)^i [f(\xi_i) - A] . \frac{V_i}{V} > 0 \tag{38}$$

où V est égal au déterminant de Van der Monde relatif aux points (37), V_i est ce que devient V si on supprime la $i^{\text{ème}}$ ligne et la dernière colonne et enfin ξ_i est le $i^{\text{ème}}$ point dans la suite (37).

Nous avons par hypothèse

$$f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_{m+k+1}) = A,$$

l'inégalité (38) devient donc

$$-\sum_{i=1}^{m-k+1} [f(x'_i) - A] \frac{V_{2k+2i-1}}{V} > 0. \tag{39}$$

Nous savons que $f(x'_i) > A$ et que $V > 0$, $V_{2k+2i-1} > 0$, $i=1,2,\ldots, m-k+1$, [20] ce qui est en contradiction avec l'inégalité (39). La propriété est donc démontrée.

On procède de même dans les autres cas.

[20] En effet si la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ est ordonnée on a $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) > 0$.

Si la fonction est convexe et si le nombre des points où le maximum est atteint est $\left[\frac{n+3}{2}\right]$, l'une des extrémités a, b ou bien toutes les deux se trouvent parmi ces points suivant que n est pair ou impair. Si le nombre des points où le minimum est atteint est $\left[\frac{n+2}{2}\right]$, l'une des extrémités se trouve parmi ces points lorsque n est pair.

16. Si f et φ sont deux fonctions de même classe, $f+\varphi$ et $c.f$ où c est une constante positive sont encore de même classe. On ne peut en général rien dire sur la classe du produit de deux fonctions. La formule (18) permet d'écrire les propriétés suivantes:

fonctions	classes			
f	$(-1,0\ 1,2,\ldots,n)$	$(-1,0',1,2',\ldots,n(n'))$	$(-1,0,1.2,\ldots,n)$	$(-1,0',1,2',\ldots,n(n'))$
φ	$(-1,0,1,2,\ldots,n)$	$(-1,0',1,2',\ldots,n(n'))$	$(-1',0',1',2',\ldots,n')$	$(-1',0,1',2,\ldots,n'(n))$
$f.\varphi$	$(-1,0,1,2,\ldots,n)$	$(-1,0',1,2',\ldots,n(n'))$	$(-1',0',1',2'\ldots n)$	$(-1',0,1',2,\ldots,n'(n))$

De même la fonction de fonction $F(f)$ peut s'étudier avec la formule (19). On a par exemple les propriétés

fonctions	classes			
f	$(0,1,2,\ldots,n)$	$(0,1',2,3',\ldots,n(n'))$	$(0,1',2,3',\ldots,n(n'))$	$(0',1,2',3,\ldots,n'(n))$
F	$(0,1,2,\ldots,n)$	$(0,1',2,3',\ldots,n(n'))$	$(0',1,2',3,\ldots,n(n'))$	$0,1,2,\ldots,n\ )$
$F(f)$	$(0,1,2,\ldots,n)$	$(0,1',2,3'\ldots,n(n'))$	$(0',1,2',3,\ldots n(n'))$	$(0',1,2'\,3,\ldots,n'(n))$

Il est possible d'établir des résultats plus précis. On peut montrer par exemple que si F est de la classe (0,1) et si f est d'ordre 1, $F(f)$ est aussi d'ordre 1.

On en déduit par exemple que si $f>0$ est de la classe $(0,1',2,3'\ldots,n(n'))$ la fonction f^p, $0<p<1$ est de la même classe et $\frac{1}{f}$ est de la classe $(0',1,2'3,\ldots,n(n'))$.

Si nous considérons la convexité et la polynomialité comme cas particuliers de la non-concavité on peut énoncer la propriété:

La limite d'une suite convergente de fonctions d'une même classe est une fonction de la même classe.

Nous avons encore la propriété suivante:

Une fonction continue sur l'ensemble fermé E *et d'une classe donnée sur un sous-ensemble* E^*, *tel que* $E-E^*=E^{*\prime}$, *est de la même classe sur* E.

Cette proposition est vraie sans restrictions. Elle est immédiate

pour la non-concavité et la polynomialité et elle résulte pour la convexité de la propriété démontrée à la fin du No. 13.

Soit maintenant une suite de fonctions

$$f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_m,\ \ldots \tag{40}$$

définies sur les ensembles finis E_1^*, E_2^*, ..., E_m^*, ..., compris chacun dans le suivant.

Si $\Delta_0[f_m;E_m^*]\leq\Delta_0$, $V_n[f_m;E_m^*]\leq V_n$ et si *les fonctions* (40) *sont de la même classe* il existe une fonction limite f, définie sur l'ensemble limite E^*, vérifiant les conditions signalées au No. 10, et qui *soit de la même classe.*

§ 2. — Relations entre les fonctions d'ordre et de classe donnés et les fonctions étudiées au Chap. I.

17. Supposons que la fonction f soit définie sur l'ensemble E_1, formé par l'ensemble E et un point isolé x. On vérifie facilement que si f est à $n^{\text{ème}}$ différence divisée bornée sur E, elle est aussi à $n^{\text{ème}}$ différence divisée bornée sur E_1.

Considérons maintenant une fonction d'ordre n sur E. Soient a', b' les extrémités d'un sous-ensemble complètement intérieur à E. En vertu de la remarque faite nous pourrons supposer qu'il y ait au moins $n+1$ points $x'_1, x'_2,\ldots,x'_{n+1}$ dans l'intervalle (a, a') ouvert à droite et au moins $n+1$ points $x''_1, x''_2,\ldots,x''_{n+1}$ dans l'intervalle (b', b) ouvert à gauche. Soient enfin $x_1, x_2,\ldots,x_{n+1}$, $n+1$ points du sous-ensemble considéré. Du fait que la suite (30) est monotone il résulte que la différence divisée $[x_1, x_2,\ldots,x_{n+1};f]$ est comprise entre les différences divisées $[x_1', x_2',\ldots,x'_{n+1};f]$, $[x_1'', x_2'',\ldots,x''_{n+1};f]$; donc

Toute fonction d'ordre n est à $n^{\text{ème}}$ différence divisée bornée sur tout sous-ensemble complètement intérieur E.

On en déduit que *toute fonction d'ordre n* (≥ 1) *sur* E *est continue sur tout sous-ensemble complètement intérieur à* E.

Si E^* est un sous-ensemble complètement intérieur à E on a

$$|[x_1,\ x_2,\ldots,x_{n+1};f]|\leq\Delta_n[f;E^*]=\text{nombre fini.}$$

Pour une suite de points quelconque (3) de E^* nous en déduisons,

$$\sum_{i=1}^{m-n-1}|\Delta_n^{i+1}-\Delta_n^{i}|=|\sum_{i=1}^{m-n-1}(\Delta_n^{i+1}-\Delta_n^{i})|=|\Delta'-\Delta_n^{m-n}|\leq 2\Delta_n[f;E^*],$$

donc:

Toute fonction d'ordre n sur E est à $n^{\text{ème}}$ variation bornée sur tout sous-ensemble complètement intérieur à E.

Dans le No. suivant nous allons établir une réciproque de cette propriété.

18. Reprenons les fonctions définies sur un ensemble fini (3) On voit aisément que toute fonction définie sur cet ensemble se décompose en la différence de deux fonctions de la classe $(-1, 0, 1, 2, \ldots, n)$. Posons en effet

$$f = \phi - \psi \tag{41}$$

Il est clair qu'on peut prendre $\phi(x_1) > 0$ assez grand pour qu'on ait aussi $\psi(x_1) > 0$. Ensuite on peut prendre $\phi(x_2) > 0$ assez grand pour qu'on ait aussi $[x_1, x_2; \phi] > 0$, $\psi(x_2) > 0$, $[x_1, x_2; \psi] > 0$ etc.... etc....

On obtient les décompositions (41) en écrivant

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}; \phi] \geq \frac{1}{2}\{\,|[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}; f]| + [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}; f]\} \tag{42}$$
$$i = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$
$$k = n+1 \quad i = 1, 2, 3, \ldots, m-n-1.$$

Considérons le système

$$[x_1, x_2, \ldots x_{k+1}; \phi] = \lambda_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$
$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}; \phi] = \mu_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, m-n-1$$

de m équations linéaires en $\phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_m)$. Tenant compte du fait que la suite (3) est ordonnée et appliquant la formule fondamentale (1) on trouve facilement que d'une manière générale $\phi(x_i)$ est une expression linéaire et homogène de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-n-1}$ *dont les coefficients sont non-négatifs.*

Soit maintenant $\phi^*(x)$ une solution quelconque du système d'inégalités (42) et $\phi(x)$ la solution qu'on obtient si on remplace tous les signes $\geq$ par $=$. Le système qu'on obtient ainsi est en effet compatible et la solution en est complètement déterminée.

De l'analyse précédente on déduit qu'on a

$$\phi^*(x_i) \geq \phi(x_i) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

On voit d'ailleurs facilement que toutes les égalités ne peuvent avoir lieu à la fois que si (42) est un système d'égalités.

La décomposition (41) peut se faire d'une infinité de manières.

Parmi ces décompositions il y a *une* pour laquelle les fonctions ϕ, ψ *sont les plus petites possibles* ([21]). De ce qui précède résulte que cette décomposition canonique s'obtient par les formules

$$f(x) = \phi(x) - \psi(x) \qquad \text{sur (3)}$$

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}; \phi] = \frac{1}{2}\{\,|[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}; f]| + [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}; f]\} \tag{43}$$
$$i = 1, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$
$$k = n+1, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, m-n-1.$$

Cette décomposition jouit des propriétés suivantes:

1⁰. *La $(n+1)^{\text{ème}}$ borne des fonctions ϕ et ψ est au plus égale à celle de f.*

2⁰. *La variation totale d'ordre n des fonctions ϕ et ψ ne dépasse pas celle de f.*

3⁰. *Les fonctions ϕ, ψ sont bornées par une quantité dépendant uniquement des propriétés jusqu'à l'ordre n de f et d'un intervalle qui enferme les points (3), mais non du nombre de ces points.*

1⁰, et 2⁰ sont immédiates. Pour démontrer la propriété 3⁰ remarquons qu'en désignant par Δ_k, V_k les bornes et les variations totales de f on a

$$|[x_1, x_2, \ldots, x_k; \phi]| \leq \Delta_{k-1} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$
$$|[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}; \phi]| \leq \frac{1}{2}(V_n + 2\Delta_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, m-n$$

ce qu'on obtient en ajoutant convenablement les relations (43). Tenant compte de (1) nous en déduisons

$$|[x_1, x_2, \ldots, x_k; \phi]| \leq \Delta_{k-1} \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$
$$|[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}; \phi]| < \Delta_{n-1} + \frac{n}{2}(b-a)(V_n + 2V_n)$$
$$i = 2, 3, \ldots, m-n+1$$

où (a, b) est un intervalle renfermant les points (3). En répétant ce procédé on arrive à la limitation

$$|\phi| < \sum_{i=0}^{n-1} i!\,(b-a)^i \Delta_i + n!\,(b-a)^n \cdot \frac{1}{2}(V_n + 2\Delta_n) \qquad \text{sur (3)}$$

([21]) Une fonction f est „plus petite" qu'une autre fonction f_1 si on a $f \leq f_1$ sur l'ensemble comun au deux ensembles où les fonctions sont définies, le signe $<$ ayant lieu pour une valeur au moins de la variable.

Cette formule est valable aussi pour ψ, elle est assez grossière, mais suffit pour démontrer la propriété 3° puisqu'*elle ne dépend pas de m*.

Soit maintenant une fonction quelconque f à $n^{\text{ème}}$ variation bornée sur un ensemble E et supposons $n > 0$. La fonction étant continue, est complètement déterminée par ses valeurs sur un sous-ensemble dénombrable E* tel que E—E* appartienne au dérivé de E*.

Envisageons maintenant E* comme limite d'une suite d'ensembles finis $E^*_1, E^*_2, \ldots E^*_m, \ldots$ chacun contenant le précédent et soient

$$f = \phi_m - \psi_m \qquad m = 1, 2, \ldots$$

les décompositions minima sur ces ensembles.

$$(44) \qquad \begin{cases} \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m, \ldots \\ \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m, \ldots \end{cases}$$

sont également bornées, de la classe $(-1, 0, 1, 2, \ldots, n)$ et leur variation totale d'ordre n ne dépasse pas $V_n[f; E]$. Nous savons alors que les fonctions ϕ_i ont au moins une limite ϕ sur E* et par conséquent les ψ_i ont aussi une limite ψ telle que

$$V_n[\phi; E^*] \leq V_n[f; E], \quad V_n[\psi; E^*] \leq V_n[f; E]$$

$$\phi, \psi \text{ de la classe } (-1, 0, 1, 2, \ldots, n).$$

$$f = \phi - \psi \qquad \text{sur } E^*.$$

Par le principe de continuité on déduit donc la propriété suivante :

Toute fonction à $n^{\text{ème}}$ variation bornée est la différence de deux fonctions de la classe $(1, 0, 1, 2, \ldots, n)$ *et dont la $n^{\text{ème}}$ variation totale ne dépasse pas celle de* $f(x)$ [22].

Soit $f = \phi - \psi$ la décomposition minimum sur la suite (3). Ajoutons aux points (3) un nouveau point x_0 et soit $f_1 = \phi_1 - \psi_1$ la décomposition minimum sur la nouvelle suite obtenue ($f_1 = f$ sur (3)). On montre facilement à l'aide des formules (43) que l'on a $\phi \leq \phi_1$ sur (3) [23]. On en déduit que les suites (44) *ont effectivement* une limite. Il en résulte alors que *la décomposition obtenue plus haut pour un ensemble quelconque vérifie aussi la propriété de minimum*, c'est-à-

(22) Pour le cas $n=1$ M. A. WINTERNITZ (voir loc. cit. 5) a démontré que toute fonction à première variation bornée (Funktion von beschränkter Drehung) est la différence de deux fonctions d'ordre 1. La méthode de cet auteur est différente de celle employée ici.

(23) L'égalité peut d'ailleurs avoir lieu partout. Si $x_i < x_0 < x_{i+1}$ on a certainement $\phi(x_j) = \phi_1(x_j)$, $j = 1, 2, \ldots, i$.

dire que parmi toutes les fonctions ϕ, ψ de classe $(-1, 0, 1, 2, \ldots, n)$ vérifiant l'égalité $f = \phi - \psi$ celles obtenues plus haut sont *les plus petites possibles*. Dans le cas contraire, en effet, on montrerait qu'il existe un m pour lequel $f = \phi_m - \psi_m$ n'est pas la décomposition minimum sur E^*_m, ce qui est impossible.

Nous avons supposé $n > 0$. Si $n = 0$ la fonction f n'est pas en général continue, mais ses points de discontinuité forment un ensemble dénombrable. Il suffit de prendre l'ensemble E* de manière qu'il contienne l'ensemble des discontinuités, la méthode est alors applicable et conduit nécessairement à la décomposition minimum en deux fonctions non-négatives et non-décroissantes, bien connue.

CHAPITRE III.

SUR LES DÉRIVÉES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE.

§ 1. — Quelques remarques sur la définition de la dérivée d'ordre *n*.

19. Nous allons supposer maintenant que la fonction $f(x)$ soit *bornée* sur E. Lorsque les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ tendent vers un point x de E' la différence divisée

$$(45) \qquad [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$$

ne tend en général vers aucune limite.

Nous désignerons par $f_n(x)$ la limite de la différence divisée (45) si elle *existe*, est *finie* et *bien déterminée* quand les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ tendent *d'une manière quelconque* vers x.

Supposons que le point x appartienne à E, nous désignerons alors par $f_n^*(x)$ la limite de la différence divisée $[x, x_1, x_2, \ldots, x_n; f]$ si elle *existe*, est *finie* et *bien déterminée* quand les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tendent *d'une manière quelconque* vers x.

On peut facilement démontrer que pour que $f_n(x)$ existe il faut et il suffit qu'à tout nombre $\varepsilon > 0$ on puisse faire correspondre un nombre $\eta > 0$ tel que

$$(46) \qquad |[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] - [x_1', x_2', \ldots, x'_{n+1}; f]| < \varepsilon, \text{ dans } I(x; \eta) \text{ [24]}.$$

Cette inégalité peut d'ailleurs être remplacée par la suivante (formule (6)) :

$$(47) \qquad |[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] - [x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}; f]| < \varepsilon, \text{ dans } I(x; \eta).$$

(24) $I(x; \eta)$ désigne l'intervalle de milieu x et de longueur η.

On peut aussi prendre $\eta > 0$ de manière que

(48) $$\left|[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] - f_n(x)\right| < \varepsilon, \qquad \text{dans } I(x;\eta).$$

Les mêmes propriétés sont vraies pour $f_n^*(x)$ en faisant figurer le point x dans toutes les différences divisées des formules (46), (47) et (48).

La formule (9) montre que si $f_n^*(x)$ existe, la différence divisée (45) tend vers $f_n^*(x)$ lorsque les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ tendent vers x pourvu que le quotient

$$\left|\frac{x-x_1}{x_1-x_2}\right|$$

reste borné. En effet, dans ce cas, toute limite de (45) est finie et de toute suite de différences divisées convergeant vers une limite on peut extraire une nouvelle suite telle que

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}$$

ait une limite, qui est finie par hypothèse. La formule (9) montre alors que cette suite de différences divisées tend vers $f_n^*(x)$ [25].

Nous supposerons que E soit fermé.

L'existence de $f_n(x)$ entraine par définition celle de $f_n^*(x)$.

Par définition, la $n^{\text{ème}}$ dérivée $f^{(n)}(x)$ est la dérivée de la $(n-1)^{\text{ème}}$ dérivée et par définition aussi, la première dérivée $f'(x)$ est identique à $f_1^*(x)$.

$f^{(n)}(x)$ peut donc être définie sur l'ensemble $E^{(n)}$ et il est évident que son existence implique celle de $f^{(n-1)}(x)$ en tous les points de $E^{(n-1)}$ dans un voisinage $I(x;\eta)$, $\eta > 0$ de x. Quand nous parlons de la continuité de $f^{(n)}(x)$ en un point x de $E^{(n)}$ nous supposons bien entendu que cette dérivée existe dans le voisinage de x.

20. De (46) nous déduisons que si $f_n(x)$ existe en un point x de E′ la fonction est à $n^{\text{ème}}$ différence divisée bornée dans le voisinage de x. Si la fonction est à $(n+1)^{\text{ème}}$ différence divisée bornée, $f_n(x)$ existe en tout point de E′ et est continue (sur E′). Si $f_n(x)$ existe en tout point de E′, elle est continue, donc nécessairement bornée. Il en résulte que la fonction est à $n^{\text{ème}}$ différence bornée. Dans ce cas l'inégalité (46) a lieu uniformément sur E.

Si $f_n(x)$ existe en un point x, $f_{n-1}(x)$ existe aussi en ce point et

(25) Cette remarque permet de définir $f_n^*(x)$ même en un point de E′ qui n'appartient pas à E, mais il est inutile de considérer cette extension.

dans son voisinage, mais il est à remarquer que $f_n(x)$ peut exister en un point (de E″) sans exister dans son voisinage [26].

Si $f_n^*(x)$ existe en un point x, $f^*_{n-1}(x)$ existe aussi en ce point, mais non pas en général dans son voisinage [27].

Enfin $f_n^*(x)$ peut exister en un point et même être continue sans que $f_n(x)$ existe [28].

Nous pouvons démontrer la propriété suivante :

(26) Soit la fonction

$$f(0)=0,\quad f\left(\frac{1}{n}\right)=0, \qquad n=2,3,\ldots$$

$$f\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3^p\, n(n+1)}\right)=0, \qquad p=1,2,\ldots\ n=2,3,\ldots$$

$$f\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2.3^p\, n(n+1)}\right)=\frac{1}{2.3^{p-1}n^2(n+1)},\quad p=1,2,\ldots\ n=2,3,\ldots$$

L'ensemble E′ est formé par les points

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots,\ \text{ et } 0.$$

Aux points $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, $f_1(x)$ n'existe pas, au contraire $|[x_1, x_2; f]| \le \frac{1}{n}$ dans $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ donc $f_1(0)$ existe et est égale à zéro.

(27) Considérons la fonction définie pour $0 \le x \le \frac{1}{2}$ de la manière suivante

$$f(0)=0,\ f(x)=\frac{1}{2^{n+1}n}\left(x-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \text{ pour } \frac{1}{2^{n+1}} \le x \le \frac{3}{2^{n+2}},\quad n=1,2,3,\ldots$$

$$f(x)=-\frac{1}{2^{n+1}n}\left(x-\frac{1}{2^n}\right) \text{ pour } \frac{3}{2^{n+2}} \le x \le \frac{1}{2^n} \qquad n=1,2,3,\ldots$$

On vérifie que $f_2^*(0)$ existe et est égale à zéro, tandis que $f_2^*(x)$ n'existe évidemment pas aux points $\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots$

(28) Il suffit de prendre la fonction

$$f(0)=0,\quad f\left(\frac{1}{n}\right)=0, \qquad n=2,3,\ldots,$$

$$f\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2np\,(n+1)}\right)=0, \qquad p=1,2,\ldots,\ n=1,2,\ldots,$$

$$f\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(2p+1)\,n(n+1)}\right)=\frac{1}{p^2n\,(n+1)},\ p=1,2,\ldots,\ n=1,2,\ldots,$$

$f_1^*(x)$ existe en tout point $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, mais $f_1(0)$ n'existe pas.

Si $f_n(x)$ existe en un point de $E^{(n)}$, la $n^{ème}$ dérivée $f^{(n)}(x)$ existe en ce point et on a l'égalité:

$$f^{(n)}(x) = n\,!\, f_n(x).$$

En effet il existe un nombre $\eta > 0$ tel que dans $I(x;\eta)$ la $n^{ème}$ différence divisée de $f(x)$ ne dépasse pas en module le nombre fini A. Toutes les limites $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n-1}(x)$ existent dans $I(x;\eta)$. On peut alors démontrer la propriété par récurrence. Elle est évidente pour $n=1$. Supposons donc qu'elle soit vraie pour $1, 2, \dots, n-1$ et démontrons-la pour n. A tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\eta_1 \leq \eta$ tel que si x' est un point de $E^{(n-1)}$ dans $I(x;\eta_1)$ et si $x_1', x_2', \dots, x_n'$ sont suffisamment raprochés de x' et $x_1, x_2, \dots, x_n$ suffisamment raprochés de x on ait à la fois

$$|\,[x_1', x_2', \dots, x_i', x_i, x_{i+1}, \dots, x_n; f] - f_n(x)\,| < \frac{\varepsilon}{3n}, \quad \left|1 - \frac{x_i'-x_i}{x'-x}\right| < \frac{\varepsilon}{3nA}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$|\,[x_1, x_2, \dots, x_n] - f_{n-1}(x)\,| < \frac{|x'-x|}{6}\,\varepsilon,$$

$$|\,[x_1', x_2', \dots, x_n'; f] - f_{n-1}(x')\,| < \frac{|x'-x|}{6}\,\varepsilon.$$

Mais, par hypothèse

$$f_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)\,!}\,f^{(n-1)}(x), \quad f_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)\,!}\,f^{(n-1)}(x').$$

Nous avons donc

$$\left|\frac{1}{(n-1)\,!}\,\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x')}{x-x'} - \frac{[x_1, x_2, \dots, x_n; f] - [x_1', x_2', \dots, x_n'; f]}{x-x'}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left|n f_n(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_i'}{x - x_i}\,[x_1', x_2', \dots, x_i', x_i, \dots, x_n; f]\right| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

La formule (6) donne

$$\left|n\,!\, f_n(x) - \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x')}{x-x'}\right| < \varepsilon \qquad \text{dans } I(x;\eta_1)$$

ce qui démontre la propriété.

On en déduit que pour que $f^{(n)}(x)$ existe et soit continue sur $E^{(n)}$, il suffit que $f_n(x)$ existe sur $E^{(n)}$, mais il est à remarquer que cette condition n'est pas nécessaire en général.

Remarquons aussi que, de l'existence de $f_n^*(x)$, on ne peut pas conclure en général à celle de $f^{(n)}(x)$ $(n > 1)$.

21. Des propriétés plus précises peuvent être obtenues si E est un intervalle fermé (a, b). STIELTJES a démontré ([29]) en effet que: *Si $f^{(n)}(x)$ existe et est continue au point x, $f_n(x)$ existe et on a*

$$f_n(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{n\,!}.$$

En comparant avec ce qui a été dit plus haut on voit que: *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ définie et bornée dans l'intervalle (a, b) ait une $n^{ème}$ dérivée continue dans cet intervalle est que la $n^{ème}$ différence divisée soit uniformément continue dans (a, b).*

Nous savons déjà que la $n^{ème}$ différence divisée est uniformément continue si à tout nombre $\varepsilon > 0$ et à tout point x de (a, b) on peut faire correspondre un nombre $\eta > 0$ tel qu'on ait

$$|\,[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] - [x_2, x_3, \dots, x_{n+2}; f]\,| < \varepsilon \text{ dans } I(x;\eta).$$

Dans le cas d'un intervalle, si $f_n^*(x)$ existe et est continue au point x, $f_n(x)$ existe aussi en ce point. Supposons en effet que dans $I(x;\delta)$, $\delta > 0$, $f_n^*(x)$ existe et soit continue au point x. A tout $\varepsilon > 0$ correspond un η, $(0 < \eta \leq \delta)$ tel que

$$|\,f_n^*(x) - f_n^*(x')\,| < \varepsilon \qquad \text{dans } I(x;\eta).$$

Soit $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]$ une différence divisée dans $I(x;\eta)$. Nous avons montré qu'il existe un point x' dans le plus petit intervalle contenant les points x_i tel que dans tout voisinage de x' on peut trouver une différence divisée d'ordre n égale à $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]$ (voir chap. I. No. 4). En vertu de notre hypothèse et d'une remarque faite plus haut, il résulte que

$$f_n^*(x') = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]$$

donc

$$|\,f_n^*(x) - [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]\,| < \varepsilon \quad \text{dans } I(x;\eta)$$

$f_n(x)$ existe et est évidemment égale à $f_n^*(x)$.

Il importe de remarquer que même dans le cas d'un intervalle $f_n(x)$ (ou $f_n^*(x)$) peut exister en un point sans exister dans son voisinage ([30]). De même si $f_n^*(x)$ existe au point x, $f_{n-1}^*(x)$ existe aussi au point x, mais non pas en général dans son voisinage ([31]).

([29]) T. J. STIELTJES „Over Lagrange's interpolatie-formulae" Verslagen en Mendeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam 2e ser. t. XVII (1882), p. 239.

([30]) Voir l'exemple donné dans le note ([27]).

([31]) L'exemple de la note ([27]) vérifie la propriété.

Stieltjes a également démontré la proposition suivante [32]:

Si $f(x)$ est définie et bornée dans (a, b) et si $f^{(n)}(x)$ existe en un point, $f_n^*(x)$ existe aussi en ce point et on a

$$f_n^*(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x).$$

C'est une condition nécessaire pour l'existence de la $n^{\text{ème}}$ dérivée, mais elle *n'est pas suffisante* en général. Nous allons au contraire démontrer la propriété suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$ définie et bornée dans l'intervalle (a, b) ait une $n^{\text{ème}}$ dérivée en tout point de (a, b) est que $f_n^*(x)$ existe en tout point de (a, b).

Nous savons que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante.

Dans ce cas $f^*_{n-1}(x)$ existe partout et est continue, donc

$$f^*_{n-1}(x) = f_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x).$$

Il suffira de montrer que $f_{n-1}(x)$ a une dérivée en tout point de (a, b). Soit x un point de (a, b); on peut trouver $A > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$|[x, x_1, x_2, \ldots, x_n; f]| < A \qquad \text{dans } I(x;\delta).$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, on peut trouver $0 < \eta \leq \delta$, tel que

(49) $|[x, x_1, x_2, \ldots, x_n; f] - [x, x_1', x_2', \ldots, x_n'; f]| < \varepsilon$ dans $I(x;\eta)$.

Soient x' un point de $I(x;\eta)$, $x_2, x_3, \ldots, x_n$ des points au voisinage de x et $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ des points au voisinage de x'. Nous pouvons trouver les points x^*, x'^* dans $I(x;\eta)$ tels que

$$f_{n-1}(x^*) = [x, x_2, x_3, \ldots, x_n; f], \quad f_{n-1}(x'^*) = [x_1', x_2', \ldots x_n'; f].$$

Or, $f_{n-1}(x)$ étant continue on peut choisir les points x_i, x'_i tels qu'on ait à la fois

$$\text{(50)} \quad \begin{cases} \left| \dfrac{x_i - x'_i}{x^* - x'^*} \right| < 1 + \varepsilon & i = 1, 2, \ldots, n, \ (x_1 = x), \\[2ex] \left| \dfrac{f_{n-1}(x^*) - f_{n-1}(x'^*)}{x^* - x'^*} - \dfrac{f_{n-1}(x) - f_{n-1}(x')}{x - x'} \right| < \dfrac{\varepsilon}{3}. \end{cases}$$

Considérons un autre point x'' dans $I(x;\eta)$, et faisons lui correspondre de la même manière les points $x_1'', x_2'', \ldots, x_n''; x''^*$ tel que les inégalités correspondantes (49), (50) soient vérifiées. Il est toujours possible de prendre ces points de manière qu'on ait aussi

$$\left| \frac{x_i - x'_i}{x^* - x'^*} - \frac{x_i - x''_i}{x^* - x''^*} \right| < \frac{\varepsilon}{6nA}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ (x_1 = x).$$

La formule (6) nous donne alors

$$\left| \frac{[x, x_2, x_3, \ldots, x_n; f] - [x_1', x_2', \ldots, x_n'; f]}{x^* - x'^*} - \frac{[x, x_2, x_3, \ldots, x_n; f] - [x_1'', x_2'', \ldots, x_n''; f]}{x^* - x''^*} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{x_i - x'_i}{x^* - x'^*} - \frac{x_i - x_i''}{x^* - x''^*} \right| \, |[x_1, x_2, \ldots, x_i, x_i'', x''_{i+1}, \ldots, x_n''; f]| +$$

$$+ \left| \frac{x_i - x_i'}{x^* - x'^*} \right| \left| [x, x_2, x_3, \ldots, x_i, x_i', \ldots, x_n'; f] - [x, x_2, x_3, \ldots, x_i, x_i'', \ldots, x_n''; f] \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nous en déduisons

$$\left| \frac{f_{n-1}(x) - f_{n-1}(x')}{x - x'} - \frac{f_{n-1}(x) - f_{n-1}(x'')}{x - x''} \right| < \varepsilon \qquad \text{dans } I(x;\eta)$$

ce qui démontre la propriété.

22. Supposons maintenant que $f(x)$ soit *bornée* et *sommable* dans (a, b). La fonction

$$F_\alpha(x) = I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha - 1} f(t)\, dt$$

est alors continue pour $\alpha > 0$. Nous allons démontrer la propriété plus générale (en supposant toujours $\alpha > 0$):

Si $f(x)$ est à $n^{\text{ème}}$ différence divisée bornée, la $n^{\text{ème}}$ différence divisée de la fonction $F_\alpha(x)$ est uniformément continue dans tout intervalle (a_1, b), $a_1 > a$.

Nous savons que cette propriété signifie qu'à tout $\varepsilon > 0$ et à tout point x de (a_1, b) on peut faire correspondre un $\eta > 0$ tel que l'on ait

(51) $|[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; F_\alpha] - [x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}; F_\alpha]| < \varepsilon$ dans $I(x;\eta)$.

Faisons le changement de variables

$$t \mid (x - a)\, t + a$$

[32] T. J. Stieltjes „Einige bemerkingen omtrent de differentiaalquotienten van eene functie van eene veranderlijke" Nieuw Archief voor Wiskunde t. IX, (1882), p. 106—111.

qui est légitime (³³) et supprimons le facteur $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$. Nous pouvons considérer, avec un léger changement de notation,

$$F_\alpha^*(x) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} (x-a)^\alpha f((x-a)\,t+a)\,dt.$$

Nous avons (formule (8)):

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} ; (x-a)^\alpha f((x-a)t+a)] = \tag{52}$$

$$\sum_{k=1}^{n+2} [x_1, x_2, \ldots, x_k ; (x-a)^\alpha] \,.\, [x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n+2} ; f((x-a)\,t+a)].$$

Or, la fonction $(x-a)^\alpha$ et toutes ses différences divisées sont bornées dans l'intervalle (a_1, b). Il en est de même, par hypothèse, de la fonction $f((x-a)\,t+a)$ jusqu'à l'ordre n inclus dans (a_1, b) et pour toutes les valeurs de t. Il suffit donc de démontrer qu'*à tout nombre* $\varepsilon > 0$ *on peut faire correspondre un nombre* $\eta > 0$ *tel qu'on ait*

$$\left| \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} \{[x_1,x_2,\ldots,x_{n+1} ; f((x-a)\,t+a)] - [x_2,x_3,\ldots,x_{n+2} ; f((x-a)t+a)]\}\,dt \right| < \varepsilon$$

pourvu que $x_1, x_2, \ldots x_{n+2}$ *restent dans un intervalle de longueur* η.

Le cas général résulte immédiatement du cas $n=0$. Nous savons en effet que $f^{(n-1)}(x)$ existe et est continue. De plus on peut trouver un point ξ dans (a, b) et compris dans le plus petit intervalle contenant les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ tel que dans tout intervalle contenant le point ξ il existe une différence divisée égale à $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f((x-a)\,t+a)]$. Ce point ξ se trouve toujours dans le plus petit intervalle où les points, sur lesquels ces différences divisées sont prises, sont situés. Supposons que $f(x)$ ait une $n^{\text{ème}}$ dérivée au point $(\xi-a)\,t+a$, alors en vertu du second théorème de STIELTJES

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f((x-a)t+a)] = \frac{t^n f^{(n)}((\xi-a)\,t+a)}{n!}.$$

De même nous pouvons trouver ξ' de manière que si $f(x)$ a une $n^{\text{ème}}$ dérivée au point $(\xi'-a)\,t+a$, on a

$$[x_2, x_3, \ldots, x_{n+2} ; f((x-a)\,t+a)] = \frac{t^n f^{(n)}((\xi'-a)\,t+a)}{n!}.$$

(³³) Voir H. LEBESGUE, „Sur les intégrales singulières", Ann. Fac. Toulouse 3ème s. t. L. (1909), pp. 25—117, sp. p. 44.

Les points ξ, ξ' sont dans un intervalle de longueur $\leq \eta$. D'autre part $f^{(n-1)}(x)$ existe partout et est à première différence divisée bornée, en vertu d'un théorème de M. LEBESGUE $f^{(n)}(x)$ existe donc presque partout et est évidemment bornée. En vertu des propriétés bien connues des fonctions sommables il résulte que le problème se réduit à la continuité d'une expression de la forme $F_\alpha(x)$. Ce que nous savons être exact (³⁴).

On sait que la dérivée d'ordre α $(\alpha > 0)$ est définie par l'égalité

$$D^{(\alpha)} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_a^{(n-\alpha)} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} F_{n-\alpha}(x)$$

n étant entier $> \alpha$.

La première proposition énoncée au No. 21 nous permet d'écrire les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une dérivée continue d'ordre α. En vertu de la propriété exprimée par la formule (51) nous déduisons que *si* $f(x)$ *est à* $n^{\text{ème}}$ *différence divisée bornée la dérivée d'ordre* α *existe et est continue dans* (a, b) *pour* $\alpha < n$. C'est un théorème de M. P. MONTEL, énoncé d'une façon un peu différente. M. MONTEL a montré que, la fonction étant supposée bornée, il suffit de considérer seulement les différences divisées prises sur des points équidistants (³⁵).

Les propriétés démontrées au No. 21 permettent d'écrire les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence, dans l'intervalle (a, b) ouvert à gauche, de la dérivée d'ordre α ou bien de la dérivée continue d'ordre α. Pratiquement ces enoncés ne présentent pas beaucoup d'intérêt. Il est possible par diverses transformations d'en déduire les critères donnés par M. MARCHAUD. Nous n'insistons pas sur cette question qui nous eloignerait trop de notre sujet et nous renverrons au mémoire de M. A. MARCHAUD (³⁶).

§. 2. — Remarques sur les dérivées des fonctions étudiées aux Chap. I. et II.

23. Nous déduisons de ce qui précède qu'*une fonction d'ordre* n *sur* E *a des dérivées continues d'ordre* $1, 2, \ldots, n-1$ *sur tout sous-ensemble complètement intérieur à* E. Si la fonction est définie dans un intervalle *elle a des dérivées continues d'ordre* $r < n$ *dans tout intervalle complètement intérieur.*

(³⁴) A la rigueur ceci ne résulte que si x est dans (a_1, b) ce qui n'est pas en contradiction avec notre hypothèse initiale.

(³⁵) P. MONTEL „Sur les polynomes d'approximation" Bull. de la Soc. Math. t. 46 (1918) pp. 151—192 sp. p. 183.

(³⁶) Voir loc. cit. (⁷).

Posons

$$\mathrm{U}\begin{pmatrix} x_1, & x_2, \ldots, & x_{n+1} \\ x_1', & x_2', \ldots, & x'_{n+1} \end{pmatrix}; f\Bigg) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & [x_1, x_1'; x^2] & [x_1, x_1'; x^3] & \ldots & [x_1, x_1'; x^n] & [x_1, x_1'; f] \\ 1 & [x_2, x_2'; x^2] & [x_2, x_2'; x^3] & \ldots & [x_2, x_2'; x^n] & [x_2, x_2'; f] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & [x_{n+1}, x'_{n+1}; x^2] & [x_{n+1}, x'_{n+1}; x^3] & \ldots & [x_{n+1}, x'_{n+1}; x^n] & [x_{n+1}, x'_{n+1}; f] \end{vmatrix}$$

Cette expression s'annule identiquement lorsque $f(x)$ est un polynome de degré n. Donc, pourvu que tous les points

$$(53) \qquad x_1, x_1', x_2, x_2', \ldots, x_{n+1}, x'_{n+1}$$

soient distincts, elle est nécessairement de la forme

$$(54) \quad \mathrm{U}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \\ x_1', x_2', \ldots, x'_{n+1} \end{pmatrix}; f\Bigg) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{A}_i \cdot [y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+n+1}; f]$$

$$y_{2i+1} = x_i,\ y_{2i} = x_i', \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

On peut déterminer cette formule de la manière suivante: On retranche chaque ligne du déterminant de la suivante. En appliquant alors la formule (6) le déterminant se décompose (en vertu de la formule de Binet donnant le produit de deux tableaux) en une somme de déterminants d'ordre n de la même forme mais portant sur des différences divisées secondes, multipliés chacun par un facteur indépendant de la fonction f. On décompose chaque déterminant de la même manière jusqu'à ce qu'on arrive à la formule (54). Si on suppose que la suite (53) soit ordonnée on peut écrire la formule (6) de manière que les facteurs introduits soient toujours positifs et ce procédé conduit effectivement à (54). Il en résulte que *si la suite* (53) *est ordonnée les coefficients* A_i *dans* (54) *sont positifs.*

Si la dérivée $f'(x)$ existe et est continue on a

$$(55) \quad \lim.\ \mathrm{U}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \\ x_1', x_2', \ldots, x'_{n+1} \end{pmatrix}; f\Bigg) = n!\, \mathrm{U}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x^*_{n+1}; f')$$

si x_i, x_i' tendent vers le point x_i^* de E', $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

La suite (53) étant ordonnée, des formules (54) et (55) on déduit que *si la fonction* $f(x)$ *est non-concave d'ordre* n *sa dérivée est non-concave d'ordre* $n-1$. La réciproque de cette propriété n'est pas vraie en général. La dérivée $f'(x)$ peut être d'ordre $n-1$ sans que la fonction soit d'ordre n, elle peut être convexe d'ordre $n-1$ et la fonction d'ordre n, sans être convexe. La $(n-1)^{ème}$ dérivée d'une fonction d'ordre

n est d'ordre 1. Une telle fonction a une dérivée à gauche et une dérivée à droite, qui sont des fonctions d'ordre 0. Si la $(n+1)^{ème}$ dérivée existe, elle est de signe constant.

Si E est un intervalle et si la dérivée $f'(x)$ est non-concave d'ordre $n-1$ la fonction $f\ x)$ est nécessairement non-concave d'ordre n. De plus, si $f(x)$ est convexe, $f'(x)$ est convexe aussi et réciproquement puisqu'une de ces fonctions ne peut être polynomiale sans que l'autre le soit aussi dans le même intervalle. Dans le cas où E est un intervalle, si $f^{(n+1)}(x)$ existe, la condition $f^{(n+1)}(x) \geq 0$ est nécessaire et suffisante pour que la fonction soit non-concave d'ordre n, la condition $f^{(n+1)}(x) > 0$ est suffisante pour qu'elle soit convexe.

Dans le cas d'un intervalle les propriétés de la fonction se déduisent simplement de celles de la dérivée par la formule facile à établir

$$(56) \quad \mathrm{U}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f) = n! \int_{x_1}^{x_2}\int_{x_2}^{x_3} \cdots \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} \mathrm{U}(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}; f')\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{n+1}.$$

24. Nous avons vu qu'une fonction à $n^{ème}$ variation bornée est à $n^{ème}$ différence divisée bornée donc, *une fonction à* $n^{ème}$ *variation bornée a des dérivées continues d'ordre* 1, 2, ..., $n-1$. Si elle est définie dans un intervalle fermé (a, b) *les dérivées continues d'ordre* $r < n$ *existent dans l'intervalle ouvert à gauche.*

Nous allons démontrer aussi que *la dérivée d'une fonction à* $n^{ème}$ *variation bornée est à* $(n-1)^{ème}$ *variation bornée.*

Ecrivons la formule générale (54) pour les $2n$ points

$$\alpha_1, \alpha_1', \alpha_2, \alpha_2', \ldots, \alpha_n, \alpha_n'.$$

Faisant $f = x^n$, nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{A} = \mathrm{U}\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha^n \\ \alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n' \end{pmatrix}; x^n\Bigg).$$

Il est manifeste alors que si $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ est une suite ordonnée, à tout $\varepsilon > 0$, correspond un $\eta > 0$ tel qu'on ait

$$0 < \frac{\mathrm{A}_i}{\mathrm{V}(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)} < n! + \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n \quad \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i}{\mathrm{V}(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)} - n! \right| < \varepsilon$$

pourvu que $|\alpha_i - \alpha_i^*| < \eta$, $|\alpha_i' - \alpha_i^*| < \eta$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Considérons maintenant une suite ordonnée de E'

$$(57) \qquad x_1, x_2, \ldots x_m.$$

D'après la propriété précédente on peut toujours prendre les points de E

$$y_1, y_2, \ldots, y_{2m} \tag{58}$$

de manière que, $\varepsilon > 0$ étant donné, on ait

$$\left| \frac{U\begin{pmatrix} y_{2i-1}, y_{2i+1}, \ldots, y_{2i+2n-3} \\ y_{2i}, y_{2i+2}, \ldots, y_{2i+2n-2} \end{pmatrix}; f}{V(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1})} - \frac{U\begin{pmatrix} y_{2i+1}, y_{2i+3}, \ldots, y_{2i+2n-1} \\ y_{2i+2}, y_{2i+4}, \ldots, y_{2i+2n} \end{pmatrix}; f}{V(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n})} \right| <$$

$$< (2n-1)(n!+\varepsilon)\{|\Delta_n^{2i-1} - \Delta_n^{2i}| + |\Delta_n^{2i} - \Delta^{2i+1}| + \cdots$$

$$\cdots + |\Delta_n^{2i+n-1} - \Delta_n^{2i+n}|\} + 2\varepsilon.\Delta_n[f; E]$$

$$i = 1, 2, \ldots, m-n$$

où

$$\Delta_n^j = [y_j, y_{j+1}, \ldots, y_{j+n}; f], \qquad j = 1, 2, \ldots, 2m-n.$$

On en déduit que

$$\sum_{i=1}^{m-n} \left| \frac{U\begin{pmatrix} y_{2i-1}, y_{2i+1}, \ldots, y_{2i+2n-3} \\ y_{2i}, y_{2i+2}, \ldots, y_{2i+2n-2} \end{pmatrix}; f}{V(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1})} - \right. \tag{59}$$

$$\left. - \frac{U\begin{pmatrix} y_{2i+1}, y_{2i+3}, \ldots, y_{2i+2n-1} \\ y_{2i+2}, y_{2i+4}, \ldots, y_{2i+2n} \end{pmatrix}; f}{V(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n})} \right| <$$

$$< (2n-1)(n!+\varepsilon)(n+1)\{|\Delta_n^1 - \Delta_n^2| + |\Delta_n^2 - \Delta_n^3| + \cdots$$

$$\cdots + |\Delta_n^{2m-n-1} - \Delta_n^{2m-n}|\} + 2\varepsilon(m-n)\Delta_n[f; E].$$

Mais $\Delta_n[f; E]$ étant fini, avec un léger changement de notations on peut dire aussi que, la suite (57) étant donnée, on peut déterminer la suite (58) de manière que le premier membre de (59) soit

$$< (2n-1) . (n+1)! V_n[f; E] + \frac{\varepsilon}{3}$$

$\varepsilon > 0$ étant donné d'avance.

Mais le premier membre de (59) peut être déterminé par un choix convenable de la suite (57) de manière qu'il diffère de moins de $\frac{\varepsilon}{3}$ de la quantité

$$(n \quad 1)! . ((n-1)^{\text{ème}} \text{ variation de } f'(x) \text{ sur } (57)). \tag{60}$$

Enfin la suite (57) peut être prise telle que la quantité (60) diffère de moins de $\frac{\varepsilon}{3(n-1)!}$ de $V_{n-1}[f'; E']$.

Il en résulte que

$$V_{n-1}[f'; E'] < (2n-1)(n+1)! V_n[f; E] + \varepsilon$$

donc

$$V_{n-1}[f'; E'] \leq (2n-1)(n+1)! V_n[f; E].$$

Cette inégalité est assez grossière, mais suffit pour démontrer la propriété. $f(x)$ étant à $n^{\text{ème}}$ variation bornée $f^{(n-1)}(x)$ est donc à première variation bornée. On sait que $f^{(n-1)}(x)$ admet alors une dérivée à gauche et une dérivée à droite qui sont à variation bornée d'ordre 0 [37].

25. Suupposons d'abord que E soit un intervalle (a, b). On peut donner un sens précis à la $(n+1)^{\text{ème}}$ différence divisée d'une fonction d'ordre n, même si les points ne sont pas tous distincts.

Il s'agit de donner un sens à la différence divisée

$$[\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{i_1}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{i_2}, \underbrace{x_k, x_k, \ldots, x_k}_{i_k}; f] \tag{61}$$

$$i_1 + i_2 + \cdots i_k = n+2$$

les points $x_1, x_2, \ldots, x_k$ étant distincts. Si nous regardons (61) comme le quotient de deux déterminants (voir No. 1) elle se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour lever l'indétermination nous remplaçons chaque groupe de points confondus $x_j, x_j, \ldots, x_j$ par i_j points distincts tendant vers x_j. On peut alors obtenir par un procédé bien connu (règle de l'Hospital) la vraie valeur du quotient (61). Ceci revient à définir le déterminant

$$U(\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{i_1}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{i_2}, \underbrace{x_k, x_k, \ldots, x_k}_{i_k}; f)$$

comme étant égal au déterminant $U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+2}; f)$ où, d'une manière générale on remplace les lignes d'ordre $i_1 + i_2 + \cdots + i_{j-1} + 1$, $i_1 + i_2 + \cdots + i_{j-1} + 2, \ldots, i_1 + i_2 + \cdots + i_{j-1} + i_j$ par :

$$\begin{matrix} 1 & x_j & x_j^2 & x_j^3 & \cdots\cdots\cdots & & x_j^n & f(x_j) \\ 0 & 1 & 2x_j & 3x_j^2 & \cdots\cdots\cdots & & nx_j^{n-1} & f'(x_j) \\ 0 & 0 & 2 & 6x_j & \cdots\cdots\cdots & & n(n-1)x_j^{n-2} & f''(x_j) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots (i_j-1)! \ldots & n(n-1) \ldots & (n-i_j+2)x_j^{n-i_j+1} & f^{(i_j-1)}(x_j) \end{matrix}$$

[37] Voir le mémoire de M. Winternitz loc. cit. [5].

$V(x_1, x_1, \ldots, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_2, \ldots, x_k, x_k, \ldots, x_k)$ s'obtient en faisant $f = x^{n+1}$ et on voit facilement que cette expression est différente de zéro, donc la différence divisée est parfaitement définie.

L'opération précédente est justifiée si $k > 2$ puisque la fonction a une dérivée continue d'ordre $n-1$. Il en est de même si $k=2$, et $2 \leq i_1 \leq n$. Si $k=2$ et $i_1 = 1$ il faut introduire la $n^{ème}$ dérivée. Cette dérivée n'existe pas en général mais il y a toujours une $n^{ème}$ dérivée à gauche et une $n^{ème}$ dérivée à droite. Il en résulte qu'on peut encore donner un sens à la différence divisée à condition de faire tendre les $n+1$ points du deuxième groupe vers x_2 *d'un même côté*.

Par exemple si ces points restent constamment à gauche de x_2 la formule trouvée est valable pourvu que $f^{(n)}(x_2)$ *représente la $n^{ème}$ dérivée à gauche.*

Il est clair que ces considérations ne sont valables qu'à l'intérieur de l'intervalle (a, b), plus exactement partout où les dérivées existent.

On peut compléter maintenant les propriétés des fonctions d'ordre n. Si $f(x)$ est non-concave d'ordre n on a

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] \geq 0$$

les points étant distincts ou non. On verra aussi que si $f(x)$ est d'ordre n et si l'on a

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] = 0$$

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n+2} \quad \text{(non pas tous confondus)}$$

la fonction est polynomiale d'ordre n dans l'intervalle (x_1, x_{n+2}).

D'ailleurs toutes ces proriétés peuvent se traduire géométriquement au moyen des polynomes L.

Si l'ensemble E est quelconque les considérations précédentes s'appliquent encore à condition que les points où il y en a plusieurs confondus appartiennent à un ensemble dérivé d'ordre convenable. Les dérivées peuvent d'ailleurs être prolongées par l'expression $n!f_n(x)$ sur tout l'ensemble E'. On vérifie facilement que ce prolongement permet de généraliser tout à fait les propriétés. Par exemple si $f(x)$ est non-concave d'ordre n on montre que partout où ils existent $f_1(x), f_2(x), \ldots$ sont aussi non-concaves d'ordre $n-1, n-2, \ldots$ respectivement

26. Supposons que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient des points de l'ensemble dérivé. On peut prendre $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ suffisamment près des points respectifs de la suite précédente tels que, $\varepsilon > 0$ étant donné, on ait

avec la formule (54)

$$\left| \frac{U\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1', x_2', \ldots, x_n' \end{pmatrix}; f}{V(x_1, x_2, \ldots, x_n)} - (n-1)!\,[x_1, x_2, \ldots, x_n; f'] \right| < \frac{\varepsilon}{2}(n-1)!$$

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{V(x_1, x_2, \ldots, x_n)} - n! \right| < \frac{\varepsilon}{2\Delta_n}(n-1)!$$

en supposant que la fonction soit à $n^{ème}$ différence divisée bornée.

On en déduit

$$|[x_1, x_2, \ldots, x_n; f']| < n \,.\, \Delta_n[f; E] + \varepsilon$$

d'où

$$\Delta_{n-1}[f'; E'] \leq n\Delta_n[f; E]. \tag{62}$$

Lorsque l'ensemble E est un intervalle (a, b) la formule (56) permet d'écrire (pour $n+1$ points)

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f) =$$

$$= (n-1)! \int_{x_1}^{x_2}\int_{x_2}^{x_3} \ldots \int_{x_n}^{x_{n+1}} [t_1, t_2, \ldots, t_n; f'] \, V(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n.$$

Nons avons aussi

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = n! \int_{x_1}^{x_2}\int_{x_2}^{x_3} \ldots \int_{x_n}^{x_{n+1}} V(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n.$$

On en déduit

$$n \,.\, |[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]| \leq \Delta_{n-1}\overset{b}{\underset{a}{[f']}}$$

d'où

$$n\Delta_n\overset{b}{\underset{a}{[f]}} \leq \Delta_{n-1}\overset{b}{\underset{a}{[f']}}.$$

Comparant avec (62) on déduit pour le cas d'un intervalle, l'égalité

$$\Delta_{n-1}\overset{b}{\underset{a}{[f']}} = n\Delta_n\overset{b}{\underset{a}{[f]}}. \text{[38]} \tag{63}$$

27. Nous savons déjà que si $f(x)$ est à $n^{ème}$ variation bornée $f'(x)$ est à $(n-1)^{ème}$ variation bornée. Nous savons aussi que si la

[38] On peut facilement vérifier que cette égalité n'a pas lieu en général si l'ensemble E est quelconque. Ceci est d'ailleurs évident à priori puisque la dérivation n'existe pas sur les points isolés de E.

fonction est continue (ce qui a toujours lieu si $n \geq 1$) on peut ne considérer que des points équidistants pour l'étude de la variation.

Supposons que E soit un intervalle (a, b) et que $n > 1$.

A tout $\varepsilon > 0$ correspond une suite

$$x,\ x+h,\ x+2h, \ldots, x+mh. \qquad (h > 0) \tag{64}$$

telle que

$$(n^{\text{ème}} \text{ variation de } f \text{ sur } (64)) > \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}_n}}[f] - \varepsilon. \tag{65}$$

On peut toujours supposer (par suite de la continuité) $a < x$, $x+mh < b$.

On voit facilement que

$$[x+ih,\ x+(i+1)h, \ldots, x+(n+i)h\,;f] =$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 [ht+x+ih,\ ht+x+(i+1)h, \ldots, ht+x+(n+i-1)h\,;f']\,dt$$

et en comparant avec (65) il résulte que

$$n(\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}_n}}[f] - \varepsilon) < \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}_{n-1}}}[f']$$

d'où

$$n\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}_n}}[f] \leq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}_{n-1}}}[f'].$$

Maintenant, à tout $\varepsilon > 0$, correspond un nombre $\eta > 0$ tel que

$$\left| \{[x+y, x+2y, \ldots, x+ny\,;f'] - [x, x+y, \ldots x+(n-1)y\,;f']\} - \right.$$

$$\left. - \frac{ny}{h}\{[x, x+y, \ldots, x+ny\,;f] - [x+h, x+y+h, \ldots, x+ny+h\,;f]\} \right| < \varepsilon$$

pourvu que $|h| < \eta$.

A l'aide des formules (6) et (10) on peut écrire

$$[x+h, x+y+h, \ldots, x+ny+h\,;f] - [x, x+y, \ldots, x+ny\,;f] = \tag{66}$$

$$= \mathrm{A}_1[x, x+h, x+y, \ldots;f] + \mathrm{A}_2[x+h, x+y, x+y+h, \ldots;f] + \ldots$$

$$\ldots + \mathrm{A}_{n+1}[\ldots, x+(n-1)y+h, x+ny, x+ny+h\,;f]$$

toutes les différences divisées du second membre étant d'ordre $n+1$. Les A_i sont indépendants de $f(x)$ *et aussi de* x et ils sont non-négatifs si $x < x+h < x+y$.

Nous pouvons trouver une suite

$$x,\ x+y, \ldots, x+my, \qquad y > 0,\ a < x,\ x+my < b$$

telle que, $\varepsilon > 0$ étant donné, on ait

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}_{n+1}}}[f'] - \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \sum_{i=1}^{m-n+1} |\ [x+iy, x+(i+1)y, \ldots, x+(n+i-1)y\,;f'] -$$

$$- [x+(i-1)y, x+iy, \ldots, x+(n+i-2)y\,;f']\ |.$$

Nous prenons h assez petit tel que $x < x+h < x+y$, $x+my+h < b$, et

$$\sum_{i=1}^{m-n+1} |\ [x+iy, x+(i+1)y, \ldots, x+(n+i-1)y\,;f'] -$$

$$- [x+(i-1), x+iy, \ldots, x+(n+i-2)y\,;f']\ | <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{ny}{h}\sum_{i=1}^{m-n+1} |\ [x+(i-1)y+h, x+iy+h, \ldots, x+(n+i-1)y+h\,;f] -$$

$$[x+(i-1)y, x+iy, \ldots, x+(n+i-1)y\,;f]\ |.$$

Or, la formule (66) montre que la somme du second membre est plus petite que

$$\mathrm{A}^*\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}_n}}[f]$$

où

$$\mathrm{A}^* = \frac{2}{(n+1)y}\cdot \max.\ (\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_3+\mathrm{A}_5+\ldots,\quad \mathrm{A}_2+\mathrm{A}_4+\mathrm{A}_6+\ldots) \quad n \text{ impair}$$

$$= \max.\left(\frac{\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_3+\mathrm{A}_5+\ldots}{\frac{n}{2}y+h}, \frac{\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_4+\mathrm{A}_6+\ldots}{\left(\frac{n}{2}+1\right)y-h}\right) \quad n \text{ pair.}$$

Si n est impair il suffit de faire $f = x^{n+1}, x^{n+2}$ pour voir que

$$\mathrm{A}^* = \frac{h}{y}.$$

La relation (1) permet ensuite de montrer que cette égalité a lieu aussi pour n pair.

On en déduit

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}_{n-1}}}[f'] - \varepsilon < n\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}_n}}[f]$$

d'où

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}_{n-1}}}[f'] \leq n\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}_n}}[f].$$

Finalement on a donc

$$V_{n-1}\overset{b}{\underset{a}{[f']}} = n V_n \overset{b}{\underset{a}{[f]}}. \tag{67}$$

Nous avons supposé que f' soit continue. M. A. WINTERNITZ a montré qu'on a aussi [39]

$$V_0\overset{b}{\underset{a}{[f_d']}} = V_1\overset{b}{\underset{a}{[f]}}$$

f étant à première variation bornée et f_d' sa dérivée à droite.

§ 3. — Sur la limitation de la dérivée d'une fonction d'ordre n.

28. Soit $f(x)$ non-concave d'ordre n dans l'intervalle (a, b). Si $n > 1$ elle admet une dérivée continue, donc bornée, dans tout intervalle complètement intérieur.

La suite $x_1, x_2, \ldots, x_k, x, x', x_{k+1}, \ldots, x_n$ étant ordonnée on a

$$\lim_{x' \to x} \frac{U(x_1, x_2, \ldots, x_k, x, x', x_{k+1}, \ldots, x_n; f)}{x'-x} \geq 0$$

d'où en développant

$$(-1)^{n-k-1} f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots\ldots & x_1^n & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots\ldots & x_2^n & f(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \ldots\ldots & x_k^n & f(x_k) \\ 1 & x & x^2 & \ldots\ldots & x^n & f(x) \\ 0 & 1 & 2x & \ldots\ldots & nx^{n+1} & 0 \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \ldots\ldots & x_{k+1}^n & f(x_{k+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots\ldots & x_n^n & f(x_n) \end{vmatrix}}{V(x_1, x_2, \ldots, x_k, x, x_{k+1}, \ldots, x_n)} \tag{68}$$

Pour trouver une limitation de f' dans l'intervalle (a_1, b_1) $a < a_1 < b_1 < b$, il suffit de prendre les points $x_1, x_2, \ldots, x_k$ dans

[39] loc cit [5].

(a, a_1) les points $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ dans (b_1, b) et de déterminer convenablement k (on peut toujours choisir entre deux valeurs consécutives de k) de manière que $(-1)^{n-k-1} f'(x) > 0$. On peut alors prendre les modules dans (68).

Soit Δ_0 la borne de $f(x)$ et posons

$$P(z) = (z-x)(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n).$$

Le second membre de (68) peut s'écrire

$$|P'(x)| \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n-i} f(x_i)}{|x-x_i| \cdot |P'(x_i)|} + (-1)^{n-k+1} f(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-x_i}$$

et cette expression permet d'écrire

$$|f'| \leq \Delta_0 \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{|P'(x)|}{|x-x_i| \cdot |P'(x_i)|} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|x-x_i|} \right\}$$

k étant convenablement choisi.

Cherchons une meilleure limitation pour des points suffisamment intérieurs.

Nous allons supposer que $f(x) = 0$. Posons alors

$$B_k = |P'(x)| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|x-x_i| \cdot |P'(x_i)|} = (-1)^{n-k} P'(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n-i+1}}{(x-x_i)P'(x_i)}$$

et

$$B^*_k = \text{min. de } B_k, \quad B^*_{i,j} = \text{max. } (B^*_i, B^*_j) \qquad i+j = \text{impair.}$$

On en déduit que

$$|f'| \leq \Delta_0 \,.\, \text{min. } (B^*_{i,j}) \qquad i, j = 0, 1, 2, \ldots, n, \quad i+j = \text{impair.}$$

Désignons encore par $F(z)$ le polynome L prenant les valeurs $(-1)^{n-i+1}$ aux points x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ $(x_{n+1} = x)$, nous avons

$$\frac{F(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(-1)^{n-i+1}}{(z-x_i)P'(x_i)} \qquad (x_{n+1} = x)$$

$$B_k = (-1)^{n-k} \left(F'(x) - \frac{P''(x)}{2P'(x)} \right)$$

Finalement si nous posons

$$P(z) = (z-x)(z-x_1)(z-x_n)\,Q(z)$$

$$R(z) = F(z) - \frac{(z-x_1)(z-x_n)\,Q(z)}{(x-x_1)(x-x_n)\,Q(x)}$$

nous en déduisons

$$B_k = (-1)^{n-k} R'(x) = |R'(x)|.$$

29. On voit que si x est fixe B_k est positif et ne s'annule jamais. Si deux points x_i et x coïncident B_k devient infini, il atteint donc certainement son minimum pour des points distincts. Enfin B_k est homogène de degré -1 en x_i et x et ne dépend que des différences mutuelles de ces nombres. Il en résulte que pour le minimum l'une au moins des égalités $x_1 = a$, $x_n = b$, doit être vérifiée.

Supposons $x_1 = a$ et écrivons les conditions

$$\frac{\partial B_k}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

La valeur ainsi trouvée pour B_k sera $\geq B^*_k$.

Nous avons

$$\frac{\partial B_k}{\partial x_j} = \frac{(-1)^{n-k} P'(x)}{x_j - x}\left(\frac{F'(x_j)}{P'(x_j)} - \frac{1}{(x_j - x)\, P'(x)}\right)$$

donc

$$(x_j - x)\, P'(x)\, F'(x_j) = P'(x_j) \qquad j = 2, 3, \ldots, n$$

en supposant les points x_j, x distincts.

Nous en déduisons finalement

$$R(x) = 0,\ R(x_i) = (-1)^{n-i+1},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ R'(x_i) = 0,\ i = 2, 3, \ldots, n.$$

Pour mettre en évidence le nombre k désignons ce polynome par $T_k(z)$.

Supposons maintenant que $x_n = b$ et écrivons

$$\frac{\partial B_k}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1$$

nous obtenons alors pour B_k une valeur $\geq B^*_k$. Comme plus haut on trouve

$$R(x) = 0,\ R(x_i) = (-1)^{n-i+1},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ R'(x_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Désignons ce polynome par $-\overline{T}_k(z)$.

Nous avons

(69) $\qquad B^*_k \leq |T'(x)|$ pourvu que $x_n \leq b$

(70) $\qquad B^*_k \leq |\overline{T}'(x)|$ pourvu que $x_1 \geq a$.

On peut d'ailleurs démontrer que l'égalité est effectivement atteinte pour une position particulière du point x.

Le polynome $T(z)$ est un polynome de Tchebichef [40] dans un

[40] Voir S. Bernstein loc. cit. [8].

certain intervalle (a, b_1)

$$T_k(z) = \cos\left[n \arccos \frac{2z - b_1 - a}{b_1 - a}\right].$$

Pour que la formule (69) soit applicable il faut écrire que x est la $k^{\text{ème}}$ racine de $T_k(z) = 0$ et que x_n, qui est la plus grande racine de la dérivée, est au plus égal à b,

$$x = \frac{b_1 + a}{2} - \frac{b_1 - a}{2} \cos \frac{2k-1}{2n}\pi, \qquad b \geq x_n = \frac{b_1 + a}{2} + \frac{b_1 - a}{2} \cos \frac{\pi}{n}.$$

Eliminant b_1 nous trouvons

$$x \leq \xi_k = \frac{a\left(\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + b\left(1 - \cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)}{1 + \cos\frac{\pi}{n}}$$

Les points ξ_k sont distribués de la manière suivante:

$$a < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-1} < b < \xi_n$$

De la même manière nous avons

$$\overline{T}_k(z) = \cos\left[n \arccos \frac{2z - a_1 - b}{b - a_1}\right]$$

et les conditions d'applicabilité de la formule (70) sont

$$x = \frac{b + a_1}{2} + \frac{b - a_1}{2} \cos \frac{2k+1}{2n}\pi, \qquad a \leq x_1 = \frac{b + a_1}{2} + \frac{b - a_1}{2} \cos \frac{\pi}{n}$$

d'où

$$x \geq \eta_k = \frac{a\left(1 + \cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right) + b\left(\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right)}{1 + \cos\frac{\pi}{n}}.$$

Les points η_k sont distribués de la manière suivante:

$$\eta_0 < a < \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_{n-1} < b.$$

30. Si x est dans l'intervalle (ξ_{k-1}, ξ_k) les polynomes $T_m(z)$, $m = k, k+1, \ldots$ conviennent pour la limitation. Nous avons

$$|T'_m(x)| = \frac{n}{\sqrt{(x-a)(b_1 - x)}} = \frac{n}{x-a} \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4n}\pi$$

donc

$$|T'_k(x)| < |T'_{k+1}(x)| < |T'_{k+2}(x)| < \ldots$$

et on poura alors écrire certainement

$$|f'(x)| \leq \Delta_0 . |T'_{k+1}(x)| \qquad \text{dans } (\xi_{k-1}, \xi_k).$$

De la même manière on trouve

$$|f'(x)| \leq \Delta_0 . |T'_{k-1}(x)| \qquad \text{dans } (\eta_k, \eta_{k+1})$$

avec

$$|T'_{k-1}(x)| = \frac{n}{\sqrt{(x-a_1)(b-x)}} = \frac{n}{b-x} \operatorname{cotg} \frac{2k-1}{4n}\pi.$$

Nous avons dans (ξ_{k-1}, ξ_k)

$$|T'_{k+1}(x)| = \frac{n}{x-a} \operatorname{tg} \frac{2k+1}{4n}\pi \leq \frac{n}{\xi_{k-1}-a} \operatorname{tg} \frac{2k+1}{4n}\pi =$$

$$= \frac{n}{b-a} \, \frac{1+\cos\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{2k-3}{2n}\pi} \cdot \operatorname{tg}\frac{2k+1}{2n}\pi = \frac{n}{b-a} \, \frac{1+\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2k-3}{2n}} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{2k+1}{4n}\pi}{\operatorname{tg}\frac{2k-3}{4n}\pi} <$$

$$< \frac{2n}{b-a} \, \frac{2n}{\pi} \, \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} \, \frac{\operatorname{tg}\frac{2k+1}{4n}\pi}{\operatorname{tg}\frac{2k-3}{4n}\pi} < \frac{4n}{b-a} \, \frac{1}{\pi} \, \frac{\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} \, \frac{\operatorname{tg}\frac{2k+1}{4n}\pi}{\operatorname{tg}\frac{2k-3}{4n}\pi}$$

et finalement

$$|T'_{k+1}(x)| < \frac{4}{3}\,\frac{n^2}{b-a} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{2k+1}{4n}\pi}{\operatorname{tg}\frac{2k-3}{4n}\pi} \qquad \text{dans } (\xi_{k-1}, \xi_k)$$

$$n > 2, \; k = 2, 3, \ldots, n-1.$$

De la même manière nous avons

$$|T'_{k-1}(x)| < \frac{4}{3}\,\frac{n^2}{b-a} \, \frac{\operatorname{tg}\frac{2k+3}{4n}\pi}{\operatorname{tg}\frac{2k-1}{4n}\pi} \qquad \text{dans } (\eta_k, \eta_{k+1})$$

$$n > 2, \; k = 1, 2, \ldots, n-2.$$

On peut écrire aussi dans (ξ_{k-1}, ξ_k)

$$|T'_{k+1}(x)| = \frac{n}{\sqrt{(x-a)(b_1-x)}} = \frac{n}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} \cdot \operatorname{tg}\frac{2k+1}{4n}\pi \leq$$

$$\leq \frac{n}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \sqrt{\frac{b-\xi_{k-1}}{\xi_{k-1}-a}} \operatorname{tg}\frac{2k+1}{4n}\pi =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \, \frac{\operatorname{tg}\frac{2k+1}{4n}\pi}{\operatorname{tg}\frac{2k-3}{4n}\pi} \sqrt{\frac{\cos\frac{2k-5}{4n}\pi . \cos\frac{2k-1}{4n}\pi}{\cos^2\frac{2k-3}{4n}\pi}}$$

d'où enfin

$$|T'_{k+1}(x)| < \frac{n}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \, \frac{\operatorname{tg}\frac{2k+1}{4n}\pi}{\operatorname{tg}\frac{2k-3}{4n}\pi} \qquad \text{dans } (\xi_{k-1}, \xi_k)$$

$$n > 2, \; k = 2, 3, \ldots, n-1.$$

D'une manière analogue

$$|T'_{k-1}(x)| < \frac{n}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{2k+3}{4n}\pi}{\operatorname{tg}\frac{2k-1}{4n}\pi} \qquad \text{dans } (\eta_k, \eta_{k+1})$$

$$n > 2, \; k = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Remarquons que

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{2k+1}{4n}\pi}{\operatorname{tg}\frac{2k-3}{4n}\pi} \leq \frac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4n}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}} \leq \frac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}, \qquad n > 2, \; k = 2, 3, \ldots, n-1$$

et

$$\eta_1 > \xi_1 = \frac{a\left(\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{\pi}{2n}\right) + b\left(1 - \cos\frac{\pi}{2n}\right)}{1+\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$\xi_{n-1} < \eta_{n-1} = \frac{a\left(1 - \cos\frac{\pi}{2n}\right) + b\left(\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{\pi}{2n}\right)}{1+\cos\frac{\pi}{n}}.$$

On voit donc que :

La dérivée d'une fonction $f(x)$ bornée et d'ordre n dans l'inter-

valle (a, b) *vérifie les inégalités* $(n > 2)$

(71)
$$\begin{cases} |f'(x)| < \dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{n^2}{b-a}\Delta_0 \\ |f'(x)\sqrt{(x-a)(b-x)}| < 2\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\, n\,.\,\Delta_0 \end{cases}$$

x *appartenant à l'intervalle* $(a+\lambda,\ b-\lambda)$ *avec*

$$\lambda=(b-a)\frac{1-\cos\dfrac{\pi}{2n}}{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}.$$

Nous avons introduit ici le coefficient 2; il provient du fait que, dans la démonstration, nous avons supposé $f(x)=0$. Le cas général se ramène à celui-ci en considérant la fonction $f_1(z)=f(z)-f(x)$ qui est encore d'ordre n et on a évidemment

$$f_1(x)=0,\ f'_1(z)=f'(z),\ |f_1(z)|\leq 2\Delta_0.$$

M. P. Montel a bien voulu nous faire remarquer que, dans le voisinage des extrémités $a+\lambda$ ou $b-\lambda$ la seconde limitation est comparable à la première pour les grandes valeurs de n. Il suffit de remarquer pour celà que λ est de l'ordre de $\dfrac{1}{n^2}$.

Les formules (71) ressemblent beaucoup à celles que Markoff et M. S. Bernstein ont donné pour la limitation de la dérivée d'un polynome [41]. On voit qu'*une fonction d'ordre n se comporte à peu près comme un polynome de degré n dans un sous-intervalle,* qui se rapproche d'ailleurs autant qu'on veut de (a, b) pour $n\to\infty$.

CHAPITRE IV.

SUR LES FONCTIONS CONVEXES AU SENS DE M. JENSEN.

31. Dans son célèbre mémoire M. J. Jensen [42] définit les fonctions convexes (ordinaires) en ne considérant que des différences divisées secondes prises sur des points équidistants.

(41) Voir S. Bernstein loc. cit. (8).

(42) J. L. W. V. Jensen „Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes". Acta Math. t. 30 (1906), p. 175. M. L. Galvani a le premier considéré des fonctions définies sur des ensembles quelconques. Voir son mémoire „Sulle funzioni convesse di una o due variabili definite in un aggregato qualunque" Rendiconti di Palermo t. 41 (1916), p. 103.

Supposons pour fixer les idées que E soit un intervalle (a, b) et considérons les différences divisées

$$\delta_n(x\,;h\,;f)=\frac{1}{n!\,h^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f(x+(n-i)h).$$

Supposons que $f(x)$ soit bornée et posons

$$\text{lim. sup.}\left|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f(x+(n-i)h)\right|=\omega_n(\delta)$$

$$a\leq x,\ x+h\leq b,\quad |h|\leq\delta$$

$\omega_n(\delta)$ est le module d'oscillation d'ordre n de la fonction.

Posons

$$\Delta'_n=\text{lim. sup.}\ |\delta_n(x\,;h\,;f)|\qquad\text{dans } (a, b).$$

Nous avons $\omega_n(\delta)\leq n!\,\delta^n\Delta'_n$, donc si Δ'_n est fini

$$\lim_{\delta\to 0}\omega_n(\delta)=0.$$

M. A. Marchaud a démontré que dans ce cas la fonction est continue [43].

Prenons $n+1$ points ordonnés $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ et divisons l'intervalle (x_1, x_{n+1}) en p parties égales par les points

$$x_1=x'_0,\ x'_1,\ldots,x'_{p-1},\ x'_p=x_{n+1}.$$

Soit x_i'' le point x_i' qui est le plus proche de x_i (ou bien l'un d'eux s'il y en a deux). La formule (10) nous donne alors

$$|[x''_1,\ldots,x''_{n+1};f]|\leq\Delta'_n.$$

Mais

$$|x_i-x''_i|\leq\frac{x_{n+1}-x_1}{2p}$$

et la fonction étant continue, on peut trouver un nombre $\eta>0$ tel que

$$|[x_1,x_2,\ldots,x_{n+1};f]-[x''_1,x''_2,\ldots,x''_{n+1};f]|<\varepsilon$$

$\varepsilon>0$ étant un nombre donné quelconque, pourvu que $p>\eta$. Il en résulte que

Si Δ'_n *est fini et si la fonction est bornée elle est aussi à $n^{\text{ème}}$ différence divisée bornée et on a*

$$\Delta_n=\Delta'_n.$$

(43) A. Marchaud loc. cit. (7).

On peut aussi définir une $n^{\text{ème}}$ variation totale V'_n sur des points équidistants en posant

$$V'_n = \text{lim. sup.} \sum_{i=0}^{m} | \delta_n(x+ih\,;h\,;f) - \delta_n(x+(i+1)h\,;h\,;f) | =$$

$$= \text{lim. sup.}\ (n+1)\,h \sum_{i=1}^{m} | \delta_{n+1}(x+ih\,;h\,;f) | \qquad (h > 0).$$

Si Δ'_{n+1} est borné, il en est de même pour V'_n, mais V'_n peut être bornée sans que Δ'_n le soit.

On démontre encore comme plus haut que *si V'_n est fini et la fonction $f(x)$ bornée, elle est à $n^{\text{ème}}$ variation bornée et on a*

$$V_n = V'_n.$$

Bien entendu, cette propriété n'est vraie que pour $n > 0$. On a en général $V_0 > V'_0$.

32. Nous pouvons enfin considérer des fonctions $f(x)$ vérifiant l'inégalité

$$\delta_{n+1}(x\,;h\,;f) \geq 0 \quad \text{dans } (a,\, b). \tag{72}$$

Je dis d'abord que *si une telle fonction est bornée elle est continue dans l'intervalle ouvert (a, b)* $(n > 0)$.

De la formule (10) résulte qu'on a

$$[x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n+2}\,;\, f] \geq 0 \tag{73}$$

pourvu que les points $x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$ divisent rationnellement l'intervalle (x_1, x_{n+2}). Soit alors x un point intérieur de (a, b) et prenons n points *fixes* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ordonnés et à gauche de x et soit x' un point voisin de x, qu'on peut supposer à droite de x, pour fixer les idées. On a

$$U(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, x,\, x'\,;\, f) \geq 0 \tag{74}$$

pourvu que la condition de rationalité soit vérifiée. Or, nous pouvons toujours prendre les points x_i de manière que $x_2, x_3, \ldots, x_n$ divisent rationnellement l'intervalle (x_1, x). Alors, ou bien $x_2, x_3, \ldots, x_n, x$ divisent rationnellement l'intervalle (x_1, x'), ou bien nous pouvons remplacer les points x_i par d'autres x'_i *aussi près qu'on veut* des x_i tels que cette propriété soit vérifiée. En développant alors l'inégalité (74) nous avons

$$f(x') - f(x) \geq (x'-x)\,\frac{A}{V(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, x)} = (x'-x)\,A_1\,. \tag{75}$$

La quantité A est bornée la fonction l'étant aussi par hypothèse. Dans $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ les points ordonnés $x_1, \ldots, x_n, x$ sont, ou bien fixes ou bien on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par des points aussi voisins qu'on veut ; on peut donc s'arranger toujours de manière que $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ reste plus grand qu'un nombre positif.

Il en résulte que A_1 reste borné quand x' varie.

Par le même procédé nous obtenons

$$f(x') - f(x) \leq (x'-x)\,B_1 \tag{76}$$

B_1 étant borné lorsque x' varie. Pour celà il suffit de prendre par exemple x_n à droite de x. On procède de la même manière si x' est à gauche de x.

Les inégalités (75), (76) prouvent la continuité.

Comme au No. précédent nous obtenons la propriété suivante :

Si une fonction bornée définie dans l'intervalle (a, b) vérifie l'inégalité (72), elle est non-concave d'ordre n (au sens du Chap. II).

Signalons encore la propriété suivante [44] :

Si une fonction mesurable (au sens de M. LEBESGUE) *vérifie l'inégalité (72), dans (a, b) elle est continue en tout point intérieur.*

Supposons le contraire et soit x un point de discontinuité intérieur à (a, b). Il résulte de ce qui précède que dans tout intervalle entourant x il existe un point ξ tel que

$$|f(\xi)| > A \tag{77}$$

A étant un nombre positif aussi grand qu'on veut.

Soit σ un nombre positif tel que l'intervalle $(x-2\sigma, x+2\sigma)$ soit complètement intérieur à (a, b). Dans l'intervalle $(x-\sigma, x+\sigma)$ il existe un point ξ tel que

$$|f(\xi)| > (n+1)\binom{n+1}{k}A \tag{78}$$

où k est égal à $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$ suivant que n est pair ou impair.

---

[44] Pour $n=1$ voir W. SIERPINSKI „Sur les fonctions convexes mesurables". Fundamenta Math. t. I (1920), p. 125.

Considérons l'un des intervalles de longueur σ ayant ξ comme extrémité. Nous avons

$$\frac{1}{n+1}\left\{f(\xi-h)+\binom{n+1}{2}f(\xi+h)-\binom{n+1}{3}f(\xi+2h)+\cdots\right\}\geq f(\xi)\geq$$
$$\geq\binom{n+1}{1}f(\xi+h)-\binom{n+1}{2}f(\xi+2h)+\binom{n+1}{3}f(\xi+3h)+\cdots$$

en supposant par exemple $h>0$ et $\xi+(n+1)h\leq x+2\sigma$.

On voit alors qu'on a

$$|f(\xi+jh)|>A$$

au moins pour un $j=-1,1,2,\ldots,n+1$. En effet autrement il y aurait certainement contradiction avec (78).

Il en résulte que les points ξ, pour lesquels on a (77), forment un ensemble de mesure $\geq\sigma$ et alors la fonction ne peut être mesurable en vertu d'un théorème de M. BOREL.

SECONDE PARTIE.

SUR LES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR DE DEUX VARIABLES RÉELLES.

CHAPITRE V.

SUR LES DIFFÉRENCES DIVISÉES DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES RÉELLES.

§ 1. — Théorie générale des différences divisées.

33. Considérons une fonction $f(x, y)$ réelle et uniforme sur un ensemble plan borné E dont la nature sera précisée plus loin.

On peut généraliser la notion de différence divisée pour le cas des fonctions de deux variables indépendantes d'une infinité de manières. Nous étudierons la généralisation qui paraît présenter le plus d'intérêt.

Soient $M_1, M_2, \ldots, M_k$, $k=(m+1)(n+1)$ points de l'ensemble E. Désignons par x_i, y_i, $i=1, 2, \ldots, k$ les coordonnées du point M_i et posons

(79) $$V_{m,n}(M_1, M_2, \ldots, M_k)=$$
$$=|1\ x_i\ x_i^2\ldots x_i^m\ y_i\ y_ix_i\ y_ix_i^2\ldots y_ix_i^m\ldots y_i^n\ y_i^nx_i\ y_i^nx_i^2\ldots y_i^nx_i^m|$$

où, suivant une notation usitée, nous n'avons écrit que la ligne générale du déterminant.

Pour abréger, nous désignerons aussi par e l'ensemble des points M_i et par $V_{m,n}(e)$ le déterminant (79).

Désignons par $U_{m,n}(M_1, M_2, \ldots M_k; f)$ ou $U_{m,n}(e; f)$ le déterminant qu'on déduit de (79) en remplaçant les éléments de la dernière colonne par

$$f(x_1, y_1),\ f(x_2, y_2), \ldots, f(x_k, y_k).$$

Appelons *courbe d'ordre* (m, n) une courbe algébrique représentée par l'équation $F(x, y)=0$ où $F(x, y)$ est un polynome de degré m en x et de degré n en y.

Considérons alors le quotient

$$[M_1, M_2, \ldots, M_k; f]_{m,n} = \frac{U_{m,n}(M_1, M_2, \ldots, M_k; f)}{V_{m,n}(M_1, M_2, \ldots, M^k)} \tag{80}$$

que nous désignerons aussi par $[e; f]_{m,n}$.

Le déterminant (79) est différent de zéro si et seulement si les points M_i ne sont pas sur une courbe d'ordre (m, n). Dans ce cas le quotient (80) est déterminé et on peut l'appeler *la différence divisée d'ordre* (m, n) *de la fonction* $f(x, y)$ *sur les points* M_i.

Remarquons que la différence divisée d'ordre (m, n) est symétrique par rapport aux points M_i.

Soit E^* l'ensemble dont les éléments sont les groupes de $k = (m+1)(n+1)$ points de E non situés sur une courbe d'ordre (m, n). A chaque élément de E^* correspond, pour la fonction $f(x, y)$, une différence divisée d'ordre (m, n).

Prenons un sous-ensemble E^*_1 de E^*. L'ensemble de toutes les différences divisées d'ordre (m, n) forme ce que nous appelerons *une différence divisée d'ordre* (m, n) *sur* E de la fonction $f(x, y)$.

La différence divisée d'ordre (m, n) sur E est donc une fonction d'ensemble égale au quotient (80) en tout élément de E^*_1. Ainsi à tout sous-ensemble E^*_1 correspond une différence divisée d'ordre (m, n) sur E.

Un sous-ensemble E^*_1 est toujours caractérisé par certaines propriétés restrictives que doivent vérifier les groupes de points donnant les éléments de ce sous-ensemble.

34. Supposons que tout point de E appartienne à au moins *un* élément de E^*_1. Nous dirons alors que la différence divisée d'ordre (m, n) sur E, correspondant à E^*_1, est *complète*.

Il est à peu près évident qu'une différence divisée sur E non complète ne présente aucune utilité pour l'étude de la fonction sur E.

Soit E_1 un groupe de $k=(m+1)(n+1)$ points de E, ce groupe étant un élément de E^*_1, E_2 l'ensemble de tous les points de E tels que chacun d'eux donne, avec $k-1$ points de E_1, un élément de $E^*_1, \ldots, E_p$ l'ensemble de tous les points de E tels que chacun d'eux donne, avec $k-1$ points de E_{p-1}, un élément de $E^*_1, \ldots$ etc.

On a $E_1 < E_2 < \ldots < E_p < \ldots$ et la somme ΣE_p est contenue dans E.

Supposons qu'on puisse trouver E_1 de manière qu'on ait $\Sigma E_p = E$. Nous dirons alors que la différence divisée sur E, correspondant à E^*_1, est *close*.

Il est clair que la propriété d'être close entraine celle d'être complète.

Soient E^*_1, E^*_2 deux sous-ensembles de E^* tels que $E^*_1 < E^*_2$. Nous dirons alors que la différence divisée d'ordre (m, n) sur E, correspondant au sous-ensemble E^*_2 est *plus étendue* que celle correspondant au sous-ensemble E^*_1. On peut aussi dire que la différence divisée sur E, correspondant à E^*_1, est *moins étendue* que celle correspondant à E^*_2.

Si une différence divisée sur E est complète ou close, toute différence divisée sur E plus étendue sera a fortiori complète ou close.

Nous supposons bien entendu qu'il existe au moins une différence divisée d'ordre (m, n) donc que l'ensemble E ne soit pas vide. Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que les points de E ne soient pas tous sur une courbe d'ordre (m, n).

Une différence divisée d'ordre (m, n) sur E est *nulle identiquement* si les différences divisées sont nulles pour tout élément de l'ensemble E^*_1 correspondant.

Si une différence divisée close d'ordre (m, n) *sur* E *est nulle identiquement, la fonction se réduit sur* E *aux valeurs d'un polynome de degré* m *en* x *et de degré* n *en* y *ne contenant pas de terme en* $x^m y^n$.

Considérons une suite d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_p, \ldots$ exprimant la clôture. Nous allons démontrer la propriété de proche en proche. La propriété est vraie sur l'ensemble E_1. On le voit immédiatement en remarquant que, parmi les $k=(m+1)(n+1)$ points de E_1, il y a toujours $k-1$ par lesquels passe *une seule* courbe d'ordre (m, n). Il suffit maintenant de montrer que si la propriété est vraie sur l'ensemble E_{p-1} elle sera vraie aussi sur l'ensemble E_p. Ceci résulte du fait que les points de E_p qui ne se trouvent pas dans E_{p-1} s'obtiennent de la manière suivante: On prend dans E_{p-1} $k-1$ points par lesquels passe une seule courbe d'ordre (m, n); soit (C) cette courbe. On prend les points qui ne sont pas sur (C) et qui avec les $k-1$ points choisis donnent un élément de l'ensemble E^*_1 correspondant à la différence divisée sur E considérée. En prenant toutes les courbes (C) possibles on obtient tous les points de E_p.

35. Etablissons encore une propriété de certaines différences divisées sur E. Pour qu'une différence divisée sur E soit utilisable pour l'étude des fonctions il faut que, au moins pour des fonctions simples, elle conduise à des propriétés différentielles simples pour la fonction $f(x, y)$.

Soit M' un point du dérivé E' de E et e un élément de E^*_1, formé par les points M_i, $i=1, 2, \ldots, k$, $k=(m+1)(n+1)$. Appelons *distance du point* M' *à l'élément* e la plus grande des distances du point M' aux points M_i.

Convenons de dire que la suite d'éléments de E^*_1, e', e'', ..., $e^{(p)}$, ... *tend vers le point* M' *de* E' si la distance du point M' à l'élément $e^{(p)}$ tend vers zéro lorsque $p \to \infty$.

Nous dirons qu'une différence divisée sur E *est régulière si quelle que soit la manière dont une suite d'éléments* e', e'', ..., $e^{(p)}$, ... *de* E *tend vers le point* M' *de* E', *la différence divisée* $[e^{(p)}; x^\alpha y^\beta]_{m,n}$ *tend vers une limite finie et bien déterminée et ceci:*

1°. *Pour tout point* M' *qui est limite d'au moins une suite d'éléments de* E^*_1

2°. *Pour tout couple de nombres* α, β *entiers non négatifs* (45).

Les conditions de régularité ne sont pas toutes indépendantes. Tout d'abord pour $\alpha \leq m$, $\beta \leq n$, $\alpha+\beta < m+n$ la limite en question est toujours égale à zéro et pour $\alpha=m$, $\beta=n$ elle est évidemment égale à 1. Ces propriétés appartiennent à toutes les différences divisées sur E.

Désignons par $L_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x', y')$ la limite de la différence divisée $[e; x^\alpha y^\beta]_{m,n}$ au point $M'(x', y')$, dans le cas de la régularité. Nous avons donc

$$L_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x', y') = 0 \qquad \alpha \leq m, \quad \beta \leq n, \quad \alpha+\beta < m+n$$
$$= 1 \qquad \alpha = m, \quad \beta = n.$$

Nous pouvons écrire

$$[e; x^\alpha y^\beta]_{m,n} = \sum_{i=1}^{k} A_i x_i^\alpha y_i^\beta \qquad (k=(m+1)(n+1))$$

les A_i étant indépendants de α et β.

Désignons par X_i les fonctions symétriques fondamentales des abscisses des points formant e et par Y_i, $i=i, 2, \ldots, k$ les fonctions symétriques fondamentales des ordonnées de ces points. Nous avons

$$[e; x^\alpha y^\beta]_{m,n} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} X_i [e; x^{\alpha-i} y^\beta]_{m,n} \qquad \alpha \geq k$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} Y_i [e; x^\alpha y^{\beta-i}]_{m,n} \qquad \beta \geq k$$

ce qui nous montre que:

Il n'y a qu'un nombre fini de conditions de régularité indépendantes.

Il suffit en particulier que la condition de régularité soit vérifiée pour $\alpha \leq k-1$, $\beta \leq k-1$ et nous avons alors

$$L_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x', y') = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} x'^i L_{m,n}^{(\alpha-i,\beta)}(x', y') \qquad \alpha \geq k$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} y'^i L_{m,n}^{(\alpha,\beta-i)}(x', y') \qquad \beta \geq k$$

Nous avons ainsi trouvé $(m+1)(n+1)(m+n+mn)$ conditions de régularité. Ces conditions ne sont pas encore toutes indépendantes et on peut les réduire de diverses manières. Nous n'insistons pas ici sur ce point.

La régularité n'entraine pas la clôture et inversement la clôture n'entraine pas la régularité (46).

Si une différence divisée sur E est régulière, toute différence divisée sur E moins étendue est aussi régulière et présente le même caractère de régularité (les limites sont les mêmes).

§. 2. — Sur une différence divisée particulière.

36. Si le sous-ensemble E^*_1 coïncide avec E on obtient la différence divisée sur E la plus étendue. E n'étant pas vide on peut facilement démontrer que cette différence divisée sur E est close. Toutefois, cette différence divisée sur E ne paraît pas présenter un grand intérêt pour l'étude de la fonction, car *elle n'est pas en général régulière*. Soient

(45) Les considérations précédentes s'appliquent aux fonctions d'une variable La différence divisée générale, envisagée dans la première partie, est close. Si la fonction est définie dans un intervalle, la différence divisée prise sur des points équidistants est complète mais n'est pas close. La question de régularité ne se pose pas. *Toute différence divisée est régulière.* C'est précisément à cause de cette propriété que les questions exposées dans la première partie presentaient une aussi grande simplicité.

(46) C'est précisément sur ce point que le cas de deux variables diffère essentiellement de celui d'une variable.

par exemple les quatre points

$$M_1(1,1),\quad M_2(1-a,\ 1-a^2(1-\theta)),\quad M_3(1+a,\ 1-a,\ 1-a^2(1-\theta)),\quad M_4(1+a^2,\ 1+\theta a^2)$$

et la fonction $f(x,y)=x^2$; nous avons

$$[M_1, M_2, M_3, M_4; f]_{1,1} = (1-\theta)a^2+\theta .$$

Si $a\to 0$ les quatre points tendent vers le point $(1,1)$ et la différence divisée peut tendre vers n'importe quelle limite.

37. Nous allons supposer, pour simplifier, que E soit un rectangle fermé [47]

$$(81)\qquad E\begin{pmatrix} a\le x\le b\\ c\le y\le d\end{pmatrix}$$

Appelons avec M. MARCHAUD [48], *réseau d'ordre* (m, n) la figure formée par m parallèles à l'axe Oy et n parallèles à l'axe Ox. Bien entendu on ne considère que les points du réseau qui appartiennent au rectangle E.

Nous appelons *différence divisée partielle d'ordre* (m, n) la différence divisée sur E correspondant au sous-ensemble E^*_1 dont les éléments sont les noeuds (ou points d'intersections) de tous les réseaux d'ordre $(m+1, n+1)$.

La différence divisée partielle d'ordre (m, n) est complète mais n'est pas close. Elle est aussi régulière et sa régularité s'exprime par les égalités

$$L^{(\alpha,\beta)}_{m,n}(x',y')=\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n}x'^{m-\alpha}y'^{n-\beta}.$$

La dénomination de différence divisée partielle peut s'expliquer de la manière suivante: Prenons la $m^{\text{ème}}$ différence divisée de la fonction par rapport à x

$$F(y)=[x_1, x_2,\dots, x_{m+1}; f]$$

et la $n^{\text{ème}}$ différence divisée de $F(y)$

$$\left[\begin{matrix} x_1, x_2,\dots, x_{m+1}\\ y_1, y_2,\dots, y_{n+1}\end{matrix}; f\right] = [y_1, y_2,\dots, y_{n+1}; F].$$

En changeant l'ordre des deux variables x, y nous définissons également la quantité

$$\left[\begin{matrix} y_1, y_2,\dots, y_{n+1}\\ x_1, x_2,\dots, x_{m+1}\end{matrix}; f\right]$$

(47) Il est clair qu'on pourrait prendre un ensemble plus compliqué.
(48) Thèse loc. cit. (7).

Nous voyons facilement qu'on a identiquement

$$(82)\qquad \left[\begin{matrix} y_1, y_2,\dots, y_{n+1}\\ x_1, x_2,\dots, x_{m+1}\end{matrix}; f\right] = \left[\begin{matrix} x_1, x_2,\dots, x_{m+1}\\ y_1, y_2,\dots, y_{n+1}\end{matrix}; f\right].$$

L'expression (82) est précisément la différence divisée d'ordre (m, n) de la fonction $f(x, y)$ sur les points (x_i, y_j), $i=1, 2,\dots, m+1$ $j=1, 2,\dots, n+1$.

Appelons encore avec M. MARCHAUD [49] *pseudo-polynome d'ordre* (m, n) toute fonction de la forme

$$\sum_{i=0}^{m} x^i A_i(y)+\sum_{j=0}^{n} y^j B_j(x)\qquad \begin{matrix} A_i(y) \text{ fonctions arbitraires de } y\\ B_j(x) \text{ fonctions arbitraires de } x\end{matrix}.$$

Un pseudo-polynome d'ordre (m, n) *est complétement déterminé par ses valeurs sur un réseau d'ordre* $(m+1, n+1)$.

Cette propriété est analogue à la propriété d'unicité des polynomes L.

Désignons par

$$P\left(\begin{matrix} x_1, x_2,\dots, x_{m+1}\\ y_1, y_2,\dots, y_{n+1}\end{matrix}; f\middle| \begin{matrix} x\\ y\end{matrix}\right)$$

le pseudo-polynome d'ordre (m, n) coïncidant avec la fonction $f(x, y)$ sur le réseau

$$\begin{matrix} x=x_i, & i=1, 2,\dots, m+1\\ y=y_j, & j=1, 2,\dots, n+1\end{matrix}.$$

On voit aisément que

$$(83)\qquad f(x,y)-P\left(\begin{matrix} x_1, x_2,\dots, x_{m+1}\\ y_1, y_2,\dots, y_{n+1}\end{matrix}; f\middle| \begin{matrix} x\\ y\end{matrix}\right)=$$

$$\frac{V(x_1, x_2,\dots, x_{m+1}).V(y_1, y_2,\dots, y_{n+1})}{V(x_1, x_2,\dots, x_{m+1}, x).V(y_1, y_2,\dots, y_{n+1}, y)}\left[\begin{matrix} x_1, x_2,\dots, x\\ y_1, y_2,\dots, y\end{matrix}; f\right].$$

38. On peut voir facilement que la solution générale de l'équation

$$\left[\begin{matrix} x_1, x_2,\dots, x_{m+1}\\ y_1, y_2,\dots, y_{n+1}\end{matrix}; f\right]=0 \quad \text{sur E}$$

est un pseudo-polynome d'ordre $(m-1, n-1)$.

(49) Nous appelons pseudo-polynome d'ordre (m, n) ce que M. MARCHAUD appelle d'ordre $(m+1, n+1)$. Nous introduisons ce changement en vue d'obtenir une plus grande symétrie dans les dénominations.

Les différences divisées partielles d'ordre $(m_1, n_1) < (m, n)$ $[m_1 \leq m,\ n_1 \leq n,\ m_1 + n_1 < m + n]$ d'un pseudo-polynome d'ordre $(m-1, n-1)$ ne sont pas bornées en général. Le pseudo-polynome lui même est en général non borné. Nous avons la propriété suivante:

Pour qu'un pseudo-polynome d'ordre $(m-1, n-1)$ ait toutes ses différences divisées partielles d'ordre $\leq (m, n)$ bornées il faut et il suffit que ses différences divisées partielles d'ordre $(m, 0)$, $(0, n)$ soient bornées.

Supposons la fonction $f(x, y)$ nulle sur le réseau

$$x = x'_i,\quad i = 1, 2, \ldots, m;\quad y = y'_j,\quad j = 1, \ldots, n.$$

Appliquons la formule (6) aux différences divisées partielles

$$\left[\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \end{matrix}; f\right] = \left[\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \end{matrix}; f\right] - \left[\begin{matrix} x'_1, x'_2, \ldots, x'_m \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \end{matrix}; f\right]$$

$$\left[\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{matrix}; f\right] = \left[\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{matrix}; f\right] - \left[\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+1} \\ y'_1, y'_2, \ldots, y'_n \end{matrix}; f\right]$$

nous voyons alors que *si la différence divisée partielle d'ordre (m, n) est bornée les différences divisées partielles d'ordre $(m-1, n)$, $(m, n-1)$ sont aussi bornées.*

Il en résulte que toutes les différences divisées partielles d'ordre $\leq (m, n)$ sont bornées. On peut donc énoncer la propriété suivante:

Pour que les différences divisées partielles d'ordre $\leq (m, n)$ d'une fonction $f(x, y)$ soient bornées il faut et il suffit que:

1⁰. *La différence divisée partielle d'ordre (m, n) soit bornée.*

2⁰. *Les différences divisées partielles d'ordre $(m, 0)$, $(0, n)$ soient bornées sur un réseau d'ordre $(m+1, n+1)$.*

On voit aussi que:

Toute fonction dont la différence divisée partielle d'ordre (m, n) est bornée est la somme d'une fonction ayant toutes ses différences divisées partielles d'ordre $\leq (m, n)$ bornées et d'un pseudo-polynome d'ordre $(m-1, n-1)$.

Le fait que la différence divisée partielle d'ordre $(0, 0)$ est bornée signifie que la fonction est bornée.

On peut encore remarquer que

$$f(x, y - f(x', y') = (y-y')\left[\begin{matrix} x \\ y, y' \end{matrix}; f\right] + (x-x')\left[\begin{matrix} x, x' \\ y \end{matrix}; f\right]$$

donc, si les différences divisées partielles d'ordre $(1, 0)$ et $(0, 1)$ *sont bornées la fonction est continue.*

Rappelons encore un théorème de M. P. Montel [50] sous une forme un peu modifiée.

Si les différences divisées partielles d'ordre $(m-m', n)$, $(m, n-n')$ d'une fonction sont bornées, la différence divisée partielle d'ordre (m'', n'') est bornée pourvu que

$$m'' \geq m - m' \qquad m \geq m' > 0 \qquad \frac{m-m''}{m'} + \frac{n-n''}{n'} > 1.$$
$$n'' \geq n - n' \qquad n \geq n' > 0$$

On montre d'abord que la propriété est vraie pour un pseudo-polynome d'ordre $(m-1, n-1)$ (les conditions $m \geq m'' \geq m - m'$, $n \geq n'' \geq n - n'$ sont alors suffisantes). On démontre ensuite la propriété pour une fonction s'annulant sur un réseau d'ordre (m, n) (les deux premières conditions peuvent alors être remplacées par $m'' \leq m$, $n'' \leq n$). La démonstration peut se faire à l'aide des fonctions $\omega_{m,n}(\delta, \lambda)$ introduites par M. Marchaud dans sa Thèse [51].

§. 3. — Étude d'une autre différence divisée particulière.

39. Pour simplifier nous supposerons encore que E soit un rectangle (81).

Soit E^*_1 le sous-ensemble de E^* dont les éléments sont tous les groupes e de $m+1$ points $M_i(x_i, y_i)$ vérifiant les conditions suivantes:

1⁰. *La suite $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ est ordonnée.*

2⁰. *On a*

$$|y_{i+1} - y_i| \leq \phi(x_{i+1} - x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

où $\phi(\theta)$ est une fonction positive et non décroissante pour $\theta > 0$.

Nous dirons que la différence divisée d'ordre $(m, 0)$ sur E correspondant à E^*_1 est une *différence divisée normale d'ordre* $(m, 0)$. La fonction $\phi(\theta)$ est sa *fonction caractéristique*.

Une différence divisée normale d'ordre $(m, 0)$ est *close*; elle est régulière si $\phi(\theta)$ est assez petit et tend assez rapidement vers zéro.

Nous dirons qu'une différence divisée sur E *est bornée au point* $M(x, y)$ *de* E s'il existe un cercle de centre M où cette différence divisée soit bornée. On dira aussi que la différence divisée sur E *n'est pas bornée au point* M si elle n'est bornée dans aucun cercle de centre M.

Démontrons la propriété suivante:

Si une fonction $f(x, y)$ a une différence divisée normale d'ordre

[50] Voir loc. cit. [35].

[51] Voir le troisième Chapitre de sa Thèse.

$(m, 0)$ *bornée dans* E, *elle a aussi une différence divisée normale d'ordre* $(m-1, 0)$ *bornée en tout point de* E.

On peut faire la démonstration avec la formule (6) de la première partie qui est ici aplicable sous la forme

$$(84) \qquad [M_1, M_2, \dots, M_m; f]_{m-1,0} - [M'_1, M'_2, \dots, M'_m; f]_{m-1,0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (x_i - x'_i)\, [M_i, M_{i+1}, \dots, M_m, M'_1, M'_2, \dots, M'_i; f]_{m,0}$$

où (x_i, y_i), (x'_i, y'_i) sont les coordonnées des points M_i, M'_i $i=1, 2, \dots, m$.

Soit M(x, y) un point de E et considérons un cercle de centre M et de rayon ρ. Prenons les points fixes M'_i à l'extérieur du cercle et du même côté de la verticale passant par M. Supposons que nous les prenions à droite de cette verticale de manière que la suite $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ soit ordonnée. Prenons les points M_i dans le cercle tel que la suite $x_1, x_2, \dots, x_m$ soit ordonnée. Les suites $x_i, x_{i+1}, \dots, x_m, x'_1, x'_2, \dots, x'_i$ seront alors ordonnées.

On voit alors qu'on peut toujours fixer le points M'_i et prendre le rayon ρ assez petit pour que quels que soient les points M_i, vérifiant la condition 2⁰, les groupes de points $M_i, M_{i+1}, \dots, M_m$ $M'_1, M'_2, \dots, M'_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, vérifient aussi la condition 2⁰. La formule (84) démontre alors la propriété.

Nous allons préciser les résultats obtenus.

Désignons par C(M ; ρ) le cercle de centre M et de rayon ρ.

Nous pouvons dire qu'*il existe un* $\rho > 0$ *tel que la fonction ait une différence divisée normale d'ordre* $(m-1, 0)$ *bornée dans* C(M ; ρ), ***quel que soit le point*** M.

Pour tous les points M situés à gauche de la verticale d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ on prend les points M'_i tel qu'on ait $x'_i < b - \lambda$, $i=1, 2, \dots, m$, λ étant un nombre positif fixe assez petit. La propriété en résulte pour tous ces points, tenant compte du fait que la fonction caractéristique $\phi(\theta)$ de la différence divisée normale d'ordre $(m, 0)$ donnée est non décroissante. On démontre de la même manière pour les points M qui sont à droite de la verticale d'abscisse $\frac{a+b}{2}$. La propriété énoncée en résulte.

Je dis encore que: *la différence divisée normale d'ordre* $(m-1, 0)$ *est uniformément bornée dans les cercles* C(M ; ρ_1), $\rho > \rho_1 > 0$.

Cet énoncé signifie qu'il existe un nombre positif A, tel que dans le cercle C(M ; ρ_1) les différences divisées de la différence divisée normale considérée, ne dépassent pas en module le nombre A, *quel que soit* M.

En effet, dans le cas contraire on trouve aisément qu'il existe un point M_0 tel que dans le cercle C(M_0 ; ρ) la différence divisée normale d'ordre $(m-1, 0)$ ne soit pas bornée; ce qui est impossible.

40. Supposons que la fonction $f(x, y)$ ait une différence divisée normale d'ordre $(m, 0)$ qui soit bornée dans le cercle C(M ; ρ), $\rho > 0$ quel que soit M dans E.

Nous allons montrer que dans ce cas *la fonction à une (autre) différence divisée normale d'ordre* $(m, 0)$ *bornée dans le rectangle* E.

Soit $\phi(\theta)$ la fonction caractéristique de la différence divisée normale donnée. Considérons la différence divisée normale d'ordre $(m, 0)$ dont la fonction caractéristique $\phi_1(\theta)$ est définie de la manière suivante:

$$\phi_1(\theta) = \phi(\theta) \qquad \text{pour } 0 \le \theta \le \frac{\rho_1}{2m} \qquad \rho > \rho_1 > 0$$

$$\phi_1(\theta) = \phi(\rho_1) \qquad \text{pour } \theta > \frac{\rho_1}{2m}.$$

Nous montrerons qu'on peut toujours choisir ρ_1 de manière que cette différence divisée normale vérifie la propriété.

Soient $M_i(x_i, y_i)$, $i=1, 2, \dots, m+1$, $m+1$ poits de E vérifiant les inégalités:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{m+1}$$

$$|y_{i+1} - y_i| \le \phi_1(x_{i+1} - x_i), \qquad i = 1, 2, \dots, m.$$

Sur chaque couple de points „consécutifs" M_i, M_{i+1} nous faisons l'opération suivante: Si $x_{i+1} - x_i \le \frac{\rho_1}{m}$ nous laissons les points inchangés, si $\frac{\rho_1}{m} < x_{i+1} - x_i \le \frac{2\rho_1}{m}$ nous partageons le segment M_iM_{i+1} en deux parties égales par un point supplémentaire; en général, si $\frac{(j-1)\rho_1}{m} < x_{i+1} - x_i \le \frac{j\rho_1}{m}$ nous partageons le segment M_iM_{i+1} en j parties égales par $j-1$ points supplémentaires.

Rangeons les points M_i et tous les points supplémentaires introduits dans l'ordre de croissance de leurs abscisses. On voit alors qu'on peut choisir ρ_1, ρ_2 $(\rho > \rho_2 > \rho_1 > 0)$, de manière que quels que soient les points M_i tout groupe de $m+1$ points consécutifs de la suite obtenue vérifie les propriétés suivantes:

1°. Le groupe de $m+1$ points est un élément du sous-ensemble E^*_1 correspondant à la différence divisée normale donnée (dont la fonction caractéristique est $\phi(\theta)$).

2°. Les $m+1$ points du groupe sont dans un cercle de rayon ρ_2 ayant pour centre un point de E.

La propriété énoncée en résulte alors, en appliquant éventuellement la formule (10) de la première partie et tenant compte du fait que la différence divisée normale donnée est uniformément bornée dans les cercles $C(M; \rho_2)$.

Tenant compte des résultats du No. précédent nous pouvons énoncer la propriété:

Si une fonction $f(x, y)$ a une différence divisée normale d'ordre $(m, 0)$ bornée dans E, elle a aussi une différence divisée normale d'ordre $(m-1, 0)$ bornée dans E.

On voit aussi que la fonction a une différence divisée normale d'ordre $(r, 0)$ bornée dans E pour $r < m$.

Remarque. Considérons la différence divisée normale d'ordre $(m, 0)$ dont la fonction caractéristique est $\lambda . \theta$, λ étant un nombre positif. Pour que cette différence divisée normale soit bornée dans E il faut et il suffit qu'elle soit bornée en tout point de E. On montre en effet, à l'aide de la formule (10), que si elle n'est pas bornée dans E, il existe un point où elle est non-bornée.

41. *Si la fonction $f(x, y)$ a une différence divisée normale d'ordre $(1, 0)$ bornée elle est continue en tout point de E.*

Soit $M(x, y)$ un point de E et $M_p(x_p, y_p)$ une suite de points de E tendant vers M. On voit qu'à tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre N et une abscisse x'_p telle qu'on ait

$$|f(x, y) - f(x'_p, y_p)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'_p, y_p) - f(x_p, y_p)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour $p > N$; donc

$$|f(x, y) - f(x_p, y_p)| < \varepsilon, \quad p > N.$$

Si la fonction a une différence divisée normale d'ordre $(m, 0)$ bornée elle a en tout point de E une dérivée partielle d'ordre $m-1$, $\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{m-1}}$. Nous nous proposons de montrer que:

Si la fonction $f(x, y)$ a une différence divisée normale d'ordre $(m, 0)$, $m > 1$ bornée, la dérivée partielle f'_x existe en tout point et a une différence divisée normale d'ordre $(m-1, 0)$ bornée.

Pour démontrer la propriété il suffit de prendre les points M_i, M'_i, de manière que $y_i = y'_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ et $x_1 < x'_1 < x_2 < x'_2 < \ldots$ On peut alors appliquer le raisonnement employé pour les fonctions d'une variable au Chap. III. En faisant tendre x'_i vers x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, on voit que f'_x a une différence divisée normale d'ordre $(m-1, 0)$ bornée correspondant à une même fonction caractéristique $\phi(\theta)$.

De la propriété précédente et de ce qui a été dit aux N-os 39 et 40 on déduit que:

Si la fonction $f(x, y)$ a une différence divisée normale d'ordre $(m, 0)$ bornée, elle a des dérivées partielles $f'_x, f''_{x^2}, \ldots, f^{(m-1)}_{x^{m-1}}$ continues en tout point de E.

La dérivée $f^{(i)}_{x^i}$ a une différence divisée normale d'ordre $(m-i, 0)$ bornée et en particulier $f^{(m-1)}_{x^{m-1}}$ a une différence divisée normale d'ordre $(1, 0)$ bornée.

Supposons que la fonction $f(x, y)$ ait une différence divisée normale d'ordre $(m, 0)$ et que cette différence divisée normale soit telle que la différence divisée ait une limite finie et bien déterminée quand les points, sur lesquels elle est prise, tendent d'une manière quelconque vers un point limite.

Il en résulte que la différence divisée normale considérée est bornée et que la dérivée partielle $\frac{\partial^m f}{\partial x^m}$ existe et est continue. Réciproquement, si $\frac{\partial^m f}{\partial x^m}$ existe et est continue la fonction à une différence divisée normale d'ordre $(m, 0)$ bornée. Il est à remarquer que la fonction caractéristique $\phi(\theta)$ de cette différence divisée normale dépend en général de la fonction considérée.

On peut démontrer aussi la propriété suivante:

Pour que la fonction $f(x, y)$ ait une dérivée partielle $\frac{\partial^m f}{\partial x^m}$ continue en tout point de E il faut et il suffit qu'il existe une différence divisée normale d'ordre $(m, 0)$ telle que quelle que soit la manière dont les points sur lesquels une différence divisée est prise tendent vers un point limite, la différence divisée tende vers une limite finie et bien déterminée.

Disons encore qu'on peut faire la même construction pour l'ordre $(0, n)$ et introduire ainsi des différences divisées normales d'ordre $(0, n)$ qui jouirons des mêmes propriétés relativement à la variable y.

42. Définissons le sous-ensemble E^*_1 de manière que ses éléments e soient tous les groupes de $k = (m+1)(n+1)$ points $M_{i,j}(x_{i,j}, y_{i,j})$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$ vérifiant les conditions suivantes:

1°. *Les suites*

$$x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{m+1,j} \qquad j=1,2,\dots,n+1$$
$$y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,n+1} \qquad i=1,2,\dots,m+1$$

sont ordonnées.

2°. *On a les inégalitées*

$$|y_{i+1,j} - y_{i,j}| \le \phi(x_{i+1,j} - x_{i,j}), \qquad i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,m+1$$
$$|x_{i,j+1} - x_{i,j}| \le \phi(y_{i,j+1} - y_{i,j}), \qquad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n+1$$

où $\phi(\theta)$ est une fonction positive et non-décroissante pour $\theta > 0$.

On peut déterminer la fonction $\phi(\theta)$ de manière qu'on ait aussi $V_{m,n}(e) \neq 0$, quels que soient les points $M_{i,j}$. Nous supposerons qu'il en soit toujours ainsi. On voit que si la fonction $\phi(\theta)$ vérifie cette propriété toute fonction plus petite vérifiera la même propriété.

Nous appelons *différence divisée normale d'ordre* (m, n) la différence divisée sur E correspondant à un tel sous-ensemble E^*_1. La fonction $\phi(\theta)$ est sa *fonction caractéristique*.

Une différence divisée normale d'ordre (m, n) est plus étendue que la différence divisée partielle de même ordre. Donc, toute différence divisée normale est complète.

Démontrons encore que toute différence divisée normale est close. Soient en effet $P_{i,j}(x_i, y_j)$ $i=1, 2, \dots, m+1$ $j=1, 2, \dots, n+1$ les noeuds d'un réseau d'ordre $(m+1, n+1)$. Désignons par e l'ensemble de ces $k=(m+1)(n+1)$ points Attachons à chaque point $P_{i,j}$ un cercle ayant ce point pour centre et pour rayon le nombre positif ρ. Considérons les ensembles e' de k points $P'_{i,j}$ tels que chacun soit dans ou sur la circonférence du cercle correspondant au point $P_{i,j}$ de mêmes indices i et j. Il existe un ρ_e dépendant de l'ensemble e tel que: 1° si $\rho < \rho_e$ on ait $V_{m,n}(e') \neq 0$ quel que soit e'; 2° si $\rho \ge \rho_e$ il y ait un e' dont le déterminant $V_{m,n}$ soit nul. Le nombre ρ_e est indépendant d'une translation du groupe de points $P_{i,j}$.

Considérons maintenant le sous-ensemble E^*_1 dont les éléments sont e' obtenus en prenant pour ρ une valeur $< \rho_e$ indépendante d'une translation. On peut facilement démontrer que la différence divisée sur E correspondant à un tel sous-ensemble est *close*, en exprimant la condition de clôture d'une façon convenable. Or, étant donnée une différence divisée normale il existe toujours une différence divisée sur E de cette dernière forme qui soit moins étendue, ce qui démontre la propriété.

Nous pouvons énoncer la propriété suivante:

Si une différence divisée normale d'ordre (m, n) d'une fonction s'annule identiquement, cette fonction se réduit sur E à un polynome de degré m en x et de degré n en y ne contenant pas de terme en $x^m y^n$.

Sans entrer dans les détails disons encore qu'on peut démontrer que si la fonction caractéristique tend assez rapidement vers zéro avec θ, la différence divisée normale est aussi *régulière*. Cette régularité est évidemment toujours celle de la différence divisée partielle de même ordre.

43. Considérons une différence divisée normale d'ordre (m, n). Soit E^*_1 le sous-ensemble correspondant à cette différence divisée normale et $\phi(\theta)$ sa fonction caractéristique. Nous avons supposé que les points d'un élément de E^*_1 soient tous distincts. Supposons qu'une suite d'éléments de E^*_1 tende vers un groupe limite e de $(m+1)(n+1)$ points et soient $M_{i,j}(x_{i,j}, y_{i,j})$ $i=1, 2, \dots, m+1$, $j=1, 2, \dots, n+1$ les points de e tels que

$$x_{1,j} \le x_{2,j} \le \dots \le x_{m+1,j} \qquad j=1, 2, \dots, n+1$$
$$y_{i,1} \le y_{i,2} \le \dots \le y_{i,n+1} \qquad i=1, 2, \dots, m+1.$$

Les points de e ne sont pas nécessairement tous distincts. On peut voir aisément que si la fonction caractéristique $\phi(\theta)$ tend assez rapidement vers zéro avec θ, un point multiple de e est toujours formé par un groupe de $(p+1)(q+1)$ points confondus tels que $M_{r+i,s+j}$ $i=0, 1, 2, \dots, p$, $j=0, 1, 2, \dots, q$.

Nous allons essayer de donner un sens à la différence divisée pour un tel groupe e, contenant des points confondus. Supposons toujours que les points $M_{r+i,s+j}$ $0 \le i \le p$, $0 \le j \le q$ viennent se confondre au point $M(x, y)$. Supposons-les d'abord distincts. Nous remplaçons dans $U_{m,n}(e; f)$ les lignes correspondantes aux points $M_{r+i,s+j}$ par $(p+1)(q+1)$ autres lignes qui se déduissent de la ligne

$$(85) \qquad 1 \; x \; x^2 \dots x^m \; y \; yx \; yx^2 \dots yx^m \dots y^n \; y^n x \dots y^n x^m \quad f(x, y)$$

par le procédé suivant: On remplace la ligne correspondante au point $M_{r+i,s+j}$ par (85) dans lequel on a substitué à chaque terme sa différence divisée d'ordre (i, j) prise sur les points $M_{r+\alpha,s+\beta}$ $\alpha=0, 1, 2, \dots, i$, $\beta=0, 1, 2, \dots, j$. On fait cette opération pour $i=0, 1, 2, \dots, p$, $j=0, 1, 2, \dots, q$ [on pose bien entendu $[M_{r,s}; f]_{0,0} = f(x_{r,s}, y_{r,s})$]. Faisons tendre maintenant les points $M_{r+i,s+j}$ vers M [52]. On voit alors facilement que si la fonction caractéristique tend assez

[52] On suppose bien entendu que ces points appartiennent constamment des éléments de E^*_1.

vite vers zéro avec θ, la ligne correspondante au point $M_{r+i,s+j}$ tend vers ce qu'on déduit de (85), si on applique à ses termes l'opération $\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}$, pourvu bien entendu que la dérivée $\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}$ existe et soit continue. On peut choisir $\phi(\theta)$ de manière que ceci soit vrai pour $i=0, 1, 2, \ldots, p$, $j=0, 1, 2, \ldots, q$.

Enfin, on peut choisir $\phi(\theta)$ de manière que le procédé précédent s'applique à tous les points multiples de e, pourvu que toutes les dérivées introduites existent et soient continues. Le déterminant $V_{m,n}(e)$ sera défini par l'égalité $V_{m,n}(e) = U_{m,n}(e; x^m y^n)$ et si $\phi(\theta)$ est assez petit et tend assez vite vers zéro avec θ, on aura encore $V_{m,n}(e) \neq 0$.

Il est donc possible de définir, sous les conditions indiquées, la différence divisée sur e par le rapport

$$[e; f]_{m,n} = \frac{U_{m,n}(e; f)}{V_{m,n}(e)}.$$

Ajoutons à l'ensemble E^*_1 toutes les limites d'éléments sur lesquelles la différence divisée peut être définie de cette manière. On voit alors que si une suite d'éléments de E^*_1 tend vers un tel groupe limite e, les différence divisées correspondantes ont pour limite $[e; f]_{m,n}$.

Supposons en particulier que $f(x, y)$ soit continue et ait une dérivée $\frac{\partial^{m+n-2} f}{\partial x^{m-1} \partial y^{n-1}}$ continue; donc toutes les dérivées $\frac{\partial^{r+s} f}{\partial x^r \partial y^s}$ $r \leq m-1$, $s \leq n-1$ existent et sont continues. Nous savons alors que la fonction a une différence divisée normale d'ordre (m, n) qui peut être prolongée sur tout groupe limite contenant *au moins quatre* points distincts.

Supposons de plus que la dérivée $\frac{\partial^{m+n-2} f}{\partial x^{m-1} \partial y^{n-1}}$ ait une différence divisée normale d'ordre $(1, 0)$ et une différence divisée normale d'ordre $(0, 1)$ bornées dans E. Par des considérations analogues à celles faites plus haut on montre que la fonction a alors une différence divisée normale d'ordre (m, n) qui peut être prolongée sur tout groupe limite e contenant *au moins deux* points distincts. Il est à remarquer que si e a seulement deux points distincts la valeur de $[e; f]_{m,n}$ peut ne pas être déterminée; nous pouvons seulement affirmer que *cette quantité reste bornée*.

Soit $e^{(p)}$ $p=1, 2, \ldots$ une suite d'éléments de E^*_1 tendant vers un groupe limite e de cette nature. La suite $[e^{(p)}; f]_{m,n}$ $p = 1, 2, \ldots$ ne tend pas nécessairement vers une limite; on peut seulement affirmer que toutes les valeurs limites de cette suite sont finies (l'ensemble des valeurs limites étant fermé il sera nécessairement *borné*).

(53) La rapidité avec laquelle la fonction caractéristique doit tendre vers zéro pour $\theta \to 0$ dépend en général de la fonction $f(x, y)$ On peut préciser cette rapidité à l'aide des modules d'oscilation de divers ordres de la fonction $f(x, y)$.

Nous pouvons maintenant énoncer la propriété suivante:

Si la dérivée $\frac{\partial^{m+n-2} f}{\partial x^{m-1} \partial y^{n-1}}$ *de la fonction* $f(x, y)$ *existe et a une différence divisée normale d'ordre* $(1, 0)$ *et une différence divisée normale d'ordre* $(0, 1)$ *bornées dans* E. *Si en outre la fonction* $f(x, y)$ *a une différence divisée normale d'ordre* (m, n) ***bornée en tout point de*** E, *elle a aussi une différence divisée normale d'ordre* (m, n) ***bornée dans*** E.

La fonction a en effet une différence divisée normale d'ordre (m, n) moins étendue que celle donnée et qui soit prolongeable sur tout groupe limite ayant au plus deux points distincts Cette différence divisée normale est évidemment bornée en tout point de E. Supposons qu'elle ne soit pas bornée dans E et considérons alors une suite d'éléments $e^{(p)}$ de E^*_1 tendant vers un groupe limite e telle que $[e^{(p)}; f]_{m,n}$ tende vers $+\infty$. On en déduit que tous les points de e doivent être confondus. Il existerait donc un point où la différence divisée normale considérée ne soit pas bornée, ce qui est impossible. La propriété est donc démontrée.

Cette propriété complète et généralise certains résultats du No. 40.

44. Le prolongement sur tout groupe limite est possible, au sens du No. précédent, si la fonction est un polynome et si la différence divisée normale considérée est régulière.

Supposons que la fonction soit à $m^{\text{ème}}$ différence divisée bornée par rapport à x pour toute valeur de y et à $n^{\text{ème}}$ différence divisée bornée par rapport à y pour toute valeur de x. Considérons une différence divisée normale et régulière d'ordre (m, n) de cette fonction, ayant pour fonction caractéristique $\phi(\theta)$. Supposons que cette différence divisée normale *ne soit pas bornée* en un point $M(x, y)$ de E.

Nous allons démontrer, sous ces hypothèses, que *la différence divisée normale d'ordre* $(m+1, n)$, *de même fonction caractéristique* $\phi(\theta)$, ***ne peut pas être bornée dans*** E.

Supposons, pour fixer les idées, que M ne se trouve pas sur le côté vertical droit ou sur le côté horizontal supérieur du rectangle E. Considérons le cercle $C(M; \rho)$ $a \leq x+\rho < b$, $c \leq y+\rho < d$. Soit $e^{(p)}$, $p=1, 2, \ldots$ une suite d'éléments du sous-ensemble E^*_1, correspondant à la différence divisée normale donnée, situées dans $C(M; \rho)$ telle que:

1^0 les points $M_{i,j}^{(p)}(x_{i,j}^{(p)}, y_{i,j}^{(p)}), 1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq n+1, x_{1,j} < x_{2,j} < \ldots$ $\ldots < x_{m+1,j}$; $y_{i,1} < y_{i,2} < \ldots < y_{i,n+1}$ de $e^{(p)}$ tendent tous vers M, 2^0, $[e^{(p)}; f]_{m,n}$ tende vers $+\infty$. Nous modifions $U_{m,n}(e^{(p)}; f)$ comme au No. précédent; nous remplaçons donc la ligne correspondante au point $M_{i,j}^{(p)}$ par (85) dans lequel on a substitué à chaque terme sa différence divisée d'ordre $(i-1, j-1)$ prise sur les points $M_{\alpha,\beta}^{(p)}, 1 \leq \alpha \leq i$, $1 \leq \beta \leq j$. Nous faisons la même opération sur $V_{m,n}(e^{(p)})$ en remplaçant f par $x^m y^n$. De cette manière le rapport $[e^{(p)}; f]_{m,n}$ ne change pas. Soit maintenant $e_1^{(p)}$ le groupe de $(m+2)(n+1)$ points formé par $e^{(p)}$ et par les points $P_{1,j}^{(p)}(x_0, y_{m+1,j}^{(p)})$ $1 \leq j \leq n+1$, x_0 étant fixe et $> x+\rho$. A la limite les points $P_{1,j}^{(p)}$ viendrons se confondre avec le point (x_0, y). Nous modifions aussi le rapport $[e_1^{(p)}; f]_{m+1,n}$ comme plus haut.

Faisons $p \to \infty$, alors ou bien $|[e_1^{(p)}; f]_{m+1,n}|$ a une limite infinie, ou bien il reste borné. Dans ce dernier cas on voit immédiatement qu'il faut qu'une au moins des différences divisées

$$[M_{1,1}^{(p)}, M_{1,2}^{(p)}, \ldots, M_{i,j}^{(p)}; f]_{i-1,j-1} \tag{86}$$
$$i=1, 2, \ldots, m+1, \quad j=1, 2, \ldots, n+1$$
(le système $i=m+1$, $j=n+1$ étant exclu.)

soit non bornée.

Supposons que (86) soit non borné pour $i=r+1$, $j=s+1$, $r \leq m$, $s \leq n$, $r+s < m+n$ et que les différences divisées (86) pour $i=1, 2, \ldots, r+1$, $j=1, 2, \ldots, s+1$, $i+j < r+s+2$ restent bornées. On peut toujours déterminer r et s de cette manière (si $r=s=0$ la fonction est non bornée au point M).

Désignons par $e_2^{(p)}$ l'ensemble de $(m+2)(n+1)$ points

$$\begin{array}{lll} M_{i,j}^{(p)} & i=1,2,\ldots,r,\ j=1,2,\ldots,s & \\ (x_{i,1}^{(p)}, y_j) & i=1,2,\ldots,r+1,\ j=1,2,\ldots,n-s & \\ (x_i, y_j) & i=1,2,\ldots,m-r+1,\ j=1,2,\ldots,n\text{-}s & \left.\right\} \text{(aucun si } n=s) \\ (x_i, y_{r+1,j}^{(p)}) & i=1,2,\ldots,m-r+1,\ j=1,2,\ldots,s+1 & \end{array}$$

où $x+\rho < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-r+1}$; $y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-s} < y-\rho$ sont des abscisses et des ordonnées fixes.

Faisant $p \to \infty$, la différence divisée $[e_2^{(p)}; f]_{m+1,n}$ ne reste pas bornée, ce qui démontre la propriété.

On démontre de la même manière que la différence divisé normale d'ordre $(m, n+1)$ et plus généralement que la différence divisée normale d'ordre (m_1, n_1) $m_1 \geq m$, $n_1 \geq n$, $m_1 + n_1 > m+n$, de même fonction caractéristique $\phi(\theta)$, *ne peut pas être bornée dans* E.

45. Supposons maintenant que la fonction $f(x, y)$ ait une différence divisée normale d'ordre (m, n) bornée dans E. Nous allons démontrer que la différence divisée partielle d'ordre $(m, 0)$ et la différence divisée partielle d'ordre $(0, n)$ sont bornées dans E. Il suffit de montrer que ces différences divisées partielles sont bornées en tout points de E. Nous obtenons cette propriété, pour l'ordre $(m, 0)$ par exemple, par un raisonnement analogue à celui employé pour la démonstration des propriétés du No 39 et en faisant usage de l'identité, facile à établir

$$[M_1, M_2, \ldots, M_{m+1}; f]_{m,0} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{V(y, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)}{V(y_1, y_2, \ldots, y_n)} [M_{1,i}, M_{2,i}, \ldots, M_{m+1,i}; f]_{m,0}$$
$$+ \frac{(-1)^n V(y, y_1 y_2, \ldots, y_n)}{V(y_1, y_2, \ldots, y_n)} [M_1, M_2, \ldots, M_{m+1}, M_{1,1}, M_{1,2}, \ldots, M_{m+1,n};]_{m,n}$$

où, (x'_i, y) sont les coordonnées des point M_i, $i=1, 2, \ldots, m+1$ et (x_i, y_j) sont les coordonnées des points $M_{i,j}$, $i=1, 2, \ldots, m+1$, $j=1, 2, \ldots, n$. Ici on suppose que les points $M_{i,j}$ restent fixes et que x'_i, y varient dans le domaine permis par la fonction caractéristique de la différence divisée donnée.

Les résultats du No. précédent nous montrent que:

Si une fonction $f(x, y)$ a une différence divisée normale d'ordre (m, n) bornée dans E, elle a aussi une différence divisée normale d'ordre $(m-1, n)$ et une différence divisée normale d'ordre $(m, n-1)$ bornées dans E.

On en déduit que la fonction a aussi une différence divisée normale d'ordre $(m, 0)$ bornée dans E. La dérivée $\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{m-1}}$ existe donc et est continue. Or, considérons la différence divisée normale d'ordre $(m-1, n)$, qui est aussi bornée et envisageons seulement les différences divisées prises sur des points distribués m à m sur $n+1$ parallèles à l'axe OX. Par un passage à limite on en déduit que la dérivée $f_{x^{m-1}}^{(m-1)}$ a aussi une différence divisée normale d'ordre $(0, n)$ bornée. Il en résulte que:

Si la fonction $f(x,y)$ a une différence divisée normale d'ordre (m, n) bornée dans E, elle a une dérivée $f_{x^{m-1} y^{n-1}}^{(m+n-2)}$ continue en tout point de E.

On peut d'ailleurs démontrer plus exactement que la dérivée $f_{x^r y^s}^{(r+s)}$ $r \leq m-1$, $s \leq n-1$ a une différence divisée normale d'ordre $(m-r, n-s)$ bornée dans E.

Supposons qu'une différence divisée normale d'ordre (m, n), de la fonction $f(x, y)$, soit telle que la différence divisée ait une limite finie et bien déterminée quand les points, sur lesquels elle est prise, tendent d'une manière quelconque vers un point limite. Cette limite est égale en tout point à $\frac{1}{m!\,n!}\, f^{(m+n)}_{x^m y^n}$. La dérivée $f^{(m+n)}_{x^m y^n}$ existe et est continue dans E. Bien entendu les limites en question n'existent que pour une classe particulière de fonctions dépendant de la différence divisée normale considérée. Cette classe comprend les polynomes si la différence divisée normale est régulière.

CHAPITRE VI.

SUR LES FONCTIONS CONVEXES DE DEUX VARIABLES RÉELLES.

§ 1. — Première extension de la notion de convexité.

46. Les différences divisées partielles permettent une généralisation immédiate de la cenvexité d'ordre quelconque pour les fonctions de deux variables indépendantes.

La fonction $f(x,y)$ sera ***convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe*** *ou* ***concave*** *d'ordre* (m, n) *sur l'ensemble* E *suivant qu'on a*

$$\begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+2} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n+2} \end{bmatrix}; f \Bigg] > 0,\ \geq 0,\ = 0,\ \leq 0,\ < 0, \text{ sur E.} \tag{87}$$

On peut distinguer cette sorte de convexité par la désignation de convexité, non-concavité... etc. *partielle*, mais nous supprimons cette distinction, étant sous-entendu que nous ne parlons dans de § que de cette sorte de convexité.

L'ensemble des fonctions précédemment définies constitue *la classe des fonctions d'ordre* (partiel) (m, n).

La valeur $m=-1$ n'est pas exclue. Une fonction d'ordre $(-1, n)$ est une fonction qui jouit d'une même propriété de convexité d'ordre n par rapport à la variable y, pour toute valeur da x. On définit de la même manière une fonction d'ordre $(m, -1)$. Enfin, les fonctions d'ordre $(-1, -1)$ sont les fonctions de signe invariable.

Une définition géométrique, analogue à celle donnée pour les fonctions d'une variable, est obtenue à l'aide des pseudo-polynomes.

Soit en effet

$$P\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \end{pmatrix}; f \left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \tag{88}$$

le pseudo-polynome d'ordre (m, n) prenant les valeurs de $f(x, y)$ sur le réseau $x=x_i$, $i=1, 2, \ldots, m+1$, $y=y_j$, $j=1, 2, \ldots, n+1$ où on peut supposer que les suites $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$, $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ soient ordonnées. La formule (83) nous montre alors que la non-concavité (convexité) s'exprime par le fait que la fonction doit être en tout point du rectangle

$$\begin{matrix} (x_i, y_j) & (x_i, y_{j+1}) \\ (x_{i+1}, y_j) & (x_{i+1}, y_{j+1}) \end{matrix} \tag{89}$$

non au-dessous (au-dessus) ou non au-dessus (au-dessous) du pseudo-polynome (88) suivant que $n+m-i-j$ est pair ou impair. Cette propriété s'applique au rectangle E entier, en convenant de poser dans (89) $x_0=a$, $x_{m+2}=b$, $y_0=c$, $y_{n+2}=d$.

Disons enfin qu'on peut aussi considérer des fonctions jouissant de plusieurs propriétés de convexité et définir ainsi diverses *classes* de fonctions, comme dans le cas d'une seule variable.

47. Les propriétés des fonctions convexes d'une variable ne se généralisent pas tout à fait pour ce cas. Par exemple, une fonction d'ordre (m, n) dans le rectangle fermé (81), n'est pas nécessairement bornée. Mais:

Si une fonction d'ordre (m, n) dans le rectangle E *est bornée sur un réseau d'ordre $(m+2, n+2)$ elle est bornée dans le plus petit rectangle contenant les noeuds de ce réseau.*

En particulier, si les côtés de E appartiennent au réseau la fonction est bornée dans tout le rectangle E.

On voit également que:

Si la fonction est d'ordre (m, n) et si on a

$$\begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+2} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n+2} \end{bmatrix}; f \Bigg] = 0$$

elle est polynomiale, donc se réduit à un pseudo-polynome d'ordre (m, n) dans le plus petit rectangle contenant les points (x_i, y_j).

La démonstration est immédiate.

48. Considérons pq ($p\geq m+2$, $q\geq n+2$) points $M(x_i, y_j)$ $i=1, 2, \ldots, p$, $j=1, 2, \ldots, q$, dans le rectangle E et supposons que les suites $x_1, x_2, \ldots, x_p$; $y_1, y_2, \ldots, y_q$ soient ordonnées. On voit alors, comme dans le cas d'une seule variable, que *les conditions nécessaires et suffisantes pour la non-concavité (convexité) d'ordre (m, n) sur les pq points sont*

$$\begin{bmatrix} x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m+1} \\ y_j, y_{j+1}, \ldots, y_{j+n+1} \end{bmatrix}; f \Bigg] \geq 0, (>0)$$

$$i=1, 2, \ldots, p-m-1,\ j=1, 2, \ldots, q-n-1.$$

La formule (1) nous montre que les suites

$$\begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+1} \\ y_j, y_{j+1}, \ldots, y_{j+n+1} \end{bmatrix}; f\Big], \quad \begin{bmatrix} x_2, x_3, \ldots, x_{m+2} \\ y_j, y_{j+1}, \ldots, y_{j+n+1} \end{bmatrix}; f\Big], \ldots$$

$$\begin{bmatrix} x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m+1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \end{bmatrix}; f\Big], \quad \begin{bmatrix} x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m+1} \\ y_2, y_3, \ldots, y_{n+2} \end{bmatrix}; f\Big], \ldots$$

sont ordonnées. On en déduit facilement que:

Si la fonction est d'ordre (m, n) dans le rectangle E et si les différences divisées partielles d'ordre $(m+1, n)$, $(m, n+1)$ sont bornées sur un réseau d'ordre $(2m+2, 2n+2)$ $x=x_i$, $i=1, 2, \ldots, 2m+2$, $y=y_j$, $j=1, 2, \ldots, 2n+2$, ces différences divisées seront bornées dans tout le rectangle

$$(x_{m+1}, y_{n+1}) \quad (x_{m+1}, y_{n+2}) \qquad (90)$$
$$(x_{m+2}, y_{n+1}) \quad (x_{m+2}, y_{n+2})$$

Si, de plus, les différences divisées partielles d'ordre $(m+1,0)$ et $(0,n+1)$ sont bornées sur un réseau d'ordre $(m+1, n+1)$, compris dans le rectangle (90), toutes les différences divisées partielles d'ordre $<(m+1, n+1)$ sont bornées dans ce rectangle. Nous démontrons encore, exactement comme au No. 13 pour les fonctions d'une variable, que:

Il existe des fonctions d'une classe donnée d'avance sur les p q points considérés à condition que si (m, n) est la plus grand ordre de polynomialité toutes les propriétés d'ordre supérieur soient de polynomialité.

Il est à remarquer qu'ici une fonction polynomiale d'ordre (m, n) n'est pas nécessairement d'ordre $(m$-$1, n)$ ou $(m, n$-$1)$.

49. Nous avons la propriété suivante:

Si une fonction est d'ordre $(1, -1)$ et d'ordre $(-1, 1)$, elle est continue par rapport à l'ensemble des variables en tout point intérieur.

Cette propriété a été démontrée par M. P. Montel en supposant que la fonction soit non-concave d'ordre $(1, -1)$ et non-concave d'ordre $(-1, 1)$ [54].

M. N. Kritikos a généralisé la propriété précédente de la manière suivante: [55]

[54] P. Montel „Sur les fonctions doublement convexes et les fonctions doublement sous-harmoniques" Praktika de l'Acad. d'Athènes 6, (1931), p. 374. Une telle fonction est dite *doublement convexe*.

[55] N. Kritikos „Sur les fonctions multiplement convexes ou concaves" Praktika de l'Acad. d'Athènes, 7 1932, p. 44. Voir aussi un mémoire de même auteur paru dans le Bulletin de la Soc. Math. de Grèce, t. XI (1930), pp. 21—28.

Si $f(x, y)$ est d'ordre 1 par rapport à l'une des variables et continue par rapport à l'autre, elle est continue par rapport à l'ensemble des variables en tout point intérieur.

Plus généralement, si la fonction est d'ordre n par rapport à l'une des variables et continue par rapport à l'autre elle est continue par rapport à l'ensemble des variables. Cette propriété peut d'ailleurs se déduire du théorème de M. Kritikos, compte tenant des résultats du No. 14 de la première partie.

Une fonction d'ordre $(m,-1)$ continue par rapport à y dans le rectangle E a une différence divisée partielle d'ordre $(m,0)$ bornée dans tout rectangle complètement intérieur.

Soint en effet E $(a' \leq x \leq b', c' \leq y \leq d')$, $a < a' < b' < b$, $c < c' < d' < d$ un rectangle complètement intérieur. Prenons les abscisses $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{m+1}$ à l'intérieur de (a, a') et les abscisses $x''_1, x''_2, \ldots, x''_{m+1}$ à l'intérieur de (b', b). Nous savons (No. 17 de la première partie) que si $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ sont dans l'intervalle fermé (a', b'), la différence divisée

$$\begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+1} \\ y \end{bmatrix}; f\Big]$$

est comprise entre les différences divisées

$$\begin{bmatrix} x'_1, x'_2, \ldots, x'_{m+1} \\ y \end{bmatrix}; f\Big], \quad \begin{bmatrix} x''_1, x''_2, \ldots, x''_{m+1} \\ y \end{bmatrix}; f\Big]. \qquad (91)$$

Or, la fonction étant continue par rapport a y elle est bornée sur l'ensemble des parallèles $x=x'_i$, $x=x''_i$ $i=1, 2, \ldots, m+1$. Il en résulte que les différences divisées (91) restent bornées dans leur ensemble lorsque y varie, se qui démontre la propriété.

En particulier une fonction qui est d'ordre $(m, -1)$ et d'ordre $(-1, n)$ a une différence divisée partielle d'ordre $(m, 0)$ et une différence divisée partielle d'ordre $(0, n)$ bornées dans tout rectangle complètement intérieur.

Tenant compte d'un théorème de M. P. Montel [56] on en déduit la propriété:

Une fonction qui est d'ordre $(m, -1)$ et d'ordre $(-1, n)$ a en tout point intérieur une dérivée $\frac{\partial^{r+s} f}{\partial x^r \partial y^s}$ continue par rapport à l'ensemble des variables, pourvu que

$$\frac{r}{m} + \frac{s}{n} < 1.$$

[56] P. Montel loc. cit. [35].

Si la fonction est d'ordre (m, n) et si la dérivée partielle f'_x existe c'est une fonction d'ordre $(m\text{-}1, n)$ présentant le même caractère de convexité et réciproquement. Plus généralement si f est d'ordre (m, n) et si $f^{(r+s)}_{x^r y^s}$ existe c'est une fonction d'ordre $(m\text{-}r, n\text{-}s)$. Si $f^{(m+n+2)}_{x^{m+1} y^{n+1}}$ existe, elle est non négative si la fonction est non-concave d'ordre (m, n) et réciproquement. On suppose ici encore que E soit un rectangle.

50. Avant de finir ce § disons qu'on peut définir la convexité avec d'autres différences divisées que les différences divisées partielles. On peut par exemple donner des définitions à l'aide des différences divisées normales. Il est inutile de répéter comment on écrit ces conditions. Ces fonctions jouissent des propriétés plus restrictives que celles précédemment définies. Considérons par exemple une fonction qui est d'ordre $(m, -1)$ par rapport à une différence divisée normale d'ordre $(m+1, 0)$. Une telle fonction a une différence divisée normale d'ordre $(m, 0)$ bornée dans tout rectangle complètement intérieur. Elle a donc des dérivées partielles $\dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}$ $i=1, 2, \ldots, m\text{-}1$ continues en tout point intérieur. La dérivée f'_x est d'ailleurs a son tour d'ordre $(m\text{-}1, \text{-}1)$ par rapport à une certaine différence divisée normale d'ordre $(m, 0)$. Il est à remarquer que si la dérivée $f^{(m+1)}_{x^{m+1}}$ existe elle est d'un signe invariable, mais la réciproque n'est pas vraie. Il faut des conditions supplémentaires de continuité pour pouvoir affirmer que de l'inégalité $f^{(m+1)}_{x^{m+1}} \geq 0$ résulte la non-concavité d'ordre $(m, -1)$ de la fonction par rapport à une différence divisée normale d'ordre $(m+1, 0)$.

§ 2. — Seconde extension de la notion de convexité.

51. Considérons une fonction $f(x, y)$ définie, pour ne pas compliquer, sur un domaine fermé convexe et borné E. L'allure de la fonction sur une droite s'obtient en prenant le plan perpendiculaire sur XOY qui se projète suivant cette droite et en considérant la fonction dans ce plan. L'axe OY dans ce plan est orientée vers le OZ positif.

Nous nous proposons d'étudier *les fonctions qui sont d'ordre n sur toute droite contenant des points de* E. Nous dirons d'une telle fonction qu'elle est *d'ordre n sur l'ensemble* E.

Supposons que n soit pair. Nous avons vu que le caractère de convexité d'une fonction d'une variable *dépend* de l'orientation de l'axe OX. Pour cette raison nous ne ferons pas de distinction entre la convexité et la concavité, resp. entre la non-concavité et la non-convexité sur une droite. Une fonction peut être *d'ordre n au sens strict ou au sens large* suivant qu'elle est convexe (ou concave) resp. non-concave (ou non-convexe). Elle peut enfin être polynomiale sur une droite.

Supposons maintenant que n soit impair. La nature de convexité d'une fonction d'une variable et d'ordre impair *ne dépend* pas de l'orientation de l'axe OX. On peut donc ici faire la distinction entre la convexité, non-concavité, polynomialité, non-convexité et la concavité sur une droite. Une fonction d'ordre impair n sera dite *convexe, non-concave,* .... etc. *d'orde n sur* E si elle est convexe, non-concave, ... etc. d'ordre n sur toute droite de E.

On peut distinguer la sorte de convexité ainsi introduite en disant qu'il s'agit d'une convexité, non-concavité .... etc. *totale* d'ordre n. Nous supprimons dans la suite cette dénomination étant sous endendu qu'il ne s'agira que de cette sorte de convexité.

Considérons par exemple un polynome de degré $n+1$

$$a_0 x^{n+1} + a_1 x^n y + \ldots + a_{n+1} y^{n+1} + \ldots$$

C'est toujours une fonction d'ordre n. Si n est pair il y a toujours des droites sur lesquelles la fonction est polynomiale. Si n est impair et si le polynome $a_0 t^{n+1} + a_1 t^n + \cdots + a_{n+1}$ est positif (non négatif) la fonction est convexe (non-concave) d'ordre n. Sur cet exemple on voit bien qu'une fonction peut être d'ordre n sans présenter un caractère de convexité déterminé.

On pourait également considérer des classes de fonctions présentant plusieurs propriétés de convexité déterminées.

52. Je dis que *si la fonction est d'ordre n* $(n > 0)$ *elle présente le même caractère de convexité sur des droites parallèles.*

On peut supposer que les droites soient parallèles à l'axe OX. La démonstration se fait alors très facilement en tenant compte du fait que si la suite d'ordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_p, \ldots$ tend vers l'ordonnée y_0, la suite de fonctions de x, $f(x, y_1)$, $f(x, y_2), \ldots, f(x, y_p), \ldots$ converge vers $f(x, y_0)$.

Une fonction d'ordre n $(n > 0)$ est en particulier d'ordre n par rapport à chacune des variables ; elle est donc d'ordre $(n, -1)$ et d'ordre $(-1, n)$. Nous en déduisons que :

Toute fonction d'ordre n sur E *est continue en tout point intérieur si* $n > 0$.

En particulier :

Toute fonction d'ordre n sur E *est bornée dans tout domaine complètement intérieur à* E.

Je dis que cette propriété est vraie même pour $n=0$. Soit $\{M_p\}$ une suite de points de E tendant vers un point limite intérieur M. Prenons un point M′ et une droite Δ dans E de manière que pour $p > N$ l'intersection des droites $M'M_p$ et Δ tombe à l'intérieur de E. Désignons par M'_p l'intersection des droites $M'M_p$ et Δ. La valeur de la fonction en M_p est toujours comprise entre ses valeurs en M′ et M'_p. On voit maintenant que si nous supposons que les valeurs de la fonction aux points M_p aient une limite infinie il arrive ou bien qu'en M′ la fonction ne soit pas bornée ou bien qu'elle ne soit pas bornée sur Δ au voisinage de l'intersection de cette droite avec MM′, ce qui est impossible. La propriété est donc démontrée.

53. Nous avons encore la propriété suivante:

Une fonction d'ordre n dans le domaine E a des dérivées partielles d'ordre $< n$ continues en tout point intérieur.

En ce qui concerne les dérivées d'ordre n, nous savons qu'en tout point intérieur elles existent suivant toute demi-droite issue de ce point.

Soient $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ deux points et prenons la différence divisée première sur la droite joignant ces deux points. Nous avons

$$\frac{f(x_1, y_1)-f(x_2, y_2)}{M_1-M_2}=\cos\alpha\,.\,[x_1, x_2\, f(x, y_1)]+\sin\alpha\,.\,[y_1, y_2\, f(x_2, y)]$$

où α est l'angle de la droite M_1M_2 avec l'axe OX.

Nous en déduisons facilement que la différence divisée d'ordre $n+1$ sur $n+2$ points $M_i(x_i, y_i)$, $i=1, 2, \ldots, n+2$ en ligne droite s'écrit

$$\sum_{i=0}^{n+1}\cos^{n+1-i}\alpha\,\sin^i\alpha\,.\left[\begin{matrix}x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+2}\\ y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{i+1}\end{matrix}; f\right].$$

Si la fonction est d'ordre n cette expression est de signe invariable sur toute droite.

Supposons en particulier que les dérivées d'ordre $n+1$ existent. Il faut alors et il suffit que la fonction

$$(92)\qquad \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\cos^{n-i+1}\alpha\,\sin^i\alpha\,.\,\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-i+1}\,\partial y^i}$$

soit de signe invariable sur toute droite faisant l'angle α avec l'axe OX.

Si la fonction est d'ordre impair et convexe (non-concave) le polynome est non négatif en tout point où les dérivées existent. Réciproquement, si les dérivées existent et si en tout point intérieur le polynome (92) est non négatif resp. positif on peut affirmer que la fonction est non-concave resp. convexe d'ordre impair n. Si $n=1$, pour que la fonction soit non-concave d'ordre 1 il faut et il

suffit que $f''_{x^2} \geq 0$, $f''_{x^2} f''_{y^2}-(f''_{xy})^2 \geq 0$ et pour qu'elle soit convexe il suffit que $f''_{x^2} > 0$, $f''_{x^2} f''_{y^2}-(f''_{xy})^2 > 0$, en admettant, bien entendu, que les dérivées secondes existent.

Les fonctions d'ordre 1 sont très proches des fonctions convexes de M. JENSEN [56]. M. JENSEN définit une fonction convexe par l'inégalité

$$f\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x, y)+f(x', y')\right)$$

les points (x, y), (x', y'), $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ appartenant à l'ensemble de définition de la fonction. Si une telle fonction est bornée elle est non concave d'ordre 1, avec notre définition.

54. — Une fonction polynomiale se réduit à un polynome sur toute droite. Nous allons démontrer que:

Une fonction polynomiale d'ordre n se réduit sur E aux valeurs d'un polynome de degré n.

Prenons dans E les $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ points $M_{i,j}(x_i, y_j)$ $i=1, 2, \ldots, j$, $j=1, 2, \ldots, n+1$ et considérons le polynome de degré n prenant les valeurs $f(x_i, y_j)$ aux points $M_{i,j}$. Ce polynome est bien déterminé. Il suffit de faire passer par un points M de E une droite convenable et d'appliquer la propriété de polynomialité sur cette droite pour voir que la fonction prend en M la même valeur que ce polynome.

Sur les fonctions polynomiales on peut faire encore diverses observations. Par exemple si la fonction est d'ordre n et coïncide avec un polynome de degré n sur un certain nombre de segments de droites, elle est polynomiale aussi sur tout segment qui a ses extrémités sur les segments considérés et contient en outre au moins n autres points appartenant aux segments donnés.

Si la fonction est d'ordre n et si elle se réduit a un même polynome de degré n sur les segments AB, AA_i, BB_i, $i=1, 2, \ldots, n-1$ AC, BC, les points $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ étant sur le segment BC et $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ sur le segment AC, *elle est polynomiale d'ordre n dans le triangle* ABC. Pour voir que tout segment, ayant ses extrémités sur les côtés du triangle, contient encore au moins n points il suffit de compléter les segments donnés par ceux qui sont parallèles aux côtés AC et BC. Ces parallèles contiennent évidemment n points appartenant aux segments donnés.

[56] Voir J. L. W. JENSEN loc. cit. [42].

TABLE DES MATIÈRES.