REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 1, Fascicola 1, 1972, pp. 5–19

ASUPRA EVALUĂRII NUMĂRULUI RĂDĂCINILOR REALE ALE SOLUŢIILOR ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE LINIARE ŞI OMOGENE

de

OLEG ARAMĂ
(Cluj)

Considerînd ca model, cunoscuta teoremă a lui Sturm, prin care se dă o evaluare a numărului rădăcinilor reale ale polinoamelor reale, în funcţie de numărul variaţiilor şirului de polinoame, ce-i poartă numele, în lucrarea de faţă se prezintă o metodă întrucîtva analoagă, pentru delimitarea numărului rădăcinilor reale ale soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale liniare şi omogene. Într-o exprimare echivalentă, metoda în cauză se referă la delimitarea numărului rădăcinilor reale ale polinoamelor generalizate, care sînt combinaţii liniare cu coeficienţi constanţi ale unor funcţii, formînd pe un interval dat $[a, b)$ un sistem al lui Cebîşev de un ordin dat n $(n \geqslant 2)$, funcţiile respective fiind presupuse continuu-derivabile pînă la ordinul n inclusiv, wronskianul lor neanulîndu-se pe nici un punct din intervalul respectiv. Întrucît, în condiţiile menţionate, astfel de polinoame generalizate constitue soluţii ale unor ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene şi întrucît o astfel de problematică se află în strînsă legătură cu unele rezultate din teoria oscilaţiilor soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale liniare, este firesc să prezentăm teorema care formează conţinutul principal al acestei lucrări, în limbajul teoriei ecuaţiilor diferenţiale.

Fie dată o ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă de ordinul, n, $L_n[y] = 0$, ai cărei coeficienţi sînt funcţii continue pe un interval dat $[a, b)$, coeficientul derivatei de ordinul n fiind diferit de zero pe orice punct x din intervalul respectiv. Vom presupune că mulţimea $\mathcal{Y}$ formată din soluţiile ecuaţiei diferenţiale considerate, constituie o familie interpolatoare de ordinul n pe intervalul $[a, b)$. Aceasta înseamnă că oricare ar fi n puncte date $M_1, \ldots, M_n$ din planul xOy, de abscise distincte $x_1, \ldots, x_n$, aparţinînd intervalului $[a, b)$, există o curbă integrală unică, care trece prin cele n puncte date. Într-o exprimare echivalentă — orice sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei diferenţiale considerate constitue un sistem al lui Cebîşev de ordinul n pe intervalul $[a, b)$. În cele ce urmează vom nota cu $I_n[a, b)$ proprietatea respectivă de interpolare a soluţiilor ecuaţiei diferenţiale în cauză. După cum se ştie, această proprietate este echivalentă cu următoarea proprietate de neoscilaţie : Orice soluţie neidentic nulă a ecuaţiei diferenţiale nu are mai mult de $n-1$ rădăcini reale şi distincte în intervalul $[a, b)$. Într-o exprimare geometrică aceasta înseamnă că orice curbă integrală, care nu coincide cu axa Ox nu poate intersecta această axă în mai mult de $n-1$ puncte distincte.

Se demonstrează (a se consulta de exemplu lucrarea [8]) că în aceste ipoteze, există cel puţin un sistem de soluţii $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$, care verifică următoarea condiţie, denumită „condiţia $W_{n-1}(a, b)$" :

Oricare ar fi $x \in (a, b)$, *au loc inegalităţile*

(1) $W[h_1 ; x] = h_1(x) > 0,\ W[h_1, h_2 ; x] > 0, \ldots, W[h_1, \ldots, h_{n-1} ; x] > 0.$

Aici $W[h_1, \ldots, h_k ; x]$ reprezintă wronskianul funcţiilor $h_1, \ldots, h_k$.

Este adevărată şi următoarea propoziţie, care constituie într-un anumit sens o reciprocă a afirmaţiei precedente :

Fiind dată o ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă $L_n[y] = 0$, cu coeficienţi continui pe un interval dat (a, b), existenţa pentru ecuaţia respectivă a cel puţin unui sistem de soluţii $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$, care să verifice condiţia $W_{n-1}(a, b)$ implică proprietatea $I_n(a, b)$ a mulţimii soluţiilor ecuaţiei diferenţiale respective.

De asemenea se demonstrează (în aceeaşi lucrare) că dacă mulţimea soluţiilor ecuaţiei diferenţiale $L_n[y] = 0$ se bucură de proprietatea $I_n[a, b)$, atunci sistemul de soluţii $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$, care verifică respectiv următoarele condiţii ale lui Cauchy pe punctul $x = a$:

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
&h_1(a) = h_1'(a) = \ldots = h_1^{(n-2)}(a) = 0,\ h_1^{(n-1)}(a) > 0,\\
&h_2(a) = h_2'(a) = \ldots = h_2^{(n-3)}(a) = 0,\ h_2^{(n-2)}(a) < 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&h_{n-1}(a) = 0,\ \operatorname{sgn}\,[h_{n-1}'(a)] = (-1)^n
\end{aligned}
$$

verifică condiţia $W_n(a, b)$.

În ipotezele adoptate referitor la ecuaţia diferenţială $L_n[y] = 0$, fie $h_1, \ldots, h_{n-1}$ un sistem de soluţii care verifică condiţia $W_{n-1}(a, b)$ şi fie p o soluţie oarecare, a aceleiaşi ecuaţii, liniar independentă în raport cu soluţiile $h_1, \ldots, h_{n-1}$ pe intervalul $[a, b)$. Fie $[\alpha, \beta]$ un interval, astfel încît $a < \alpha < \beta < b$. Pentru a putea enunţa teorema care formează obiectul prezentei lucrări, vom introduce următoarele notaţii :

Referitor la funcţia p, considerăm şirul de wronskioni

$$
(3)\quad W[p ; x] = p(x),\ W[h_1, p ; x],\ W[h_1, h_2, p ; x],\ W[h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, p ; x].
$$

Pentru a nu complica inutil expunerea, vom mai presupune că soluţia p este astfel, încît nici una dintre funcţiile din şirul (3) nu se anulează pe niciuna dintre extremităţile intervalului $[\alpha, \beta]$, adică

$$
(1')\quad p(\alpha) \neq 0,\ p(\beta) \neq 0,\ W[h_1, p ; \alpha] \neq 0,\ W[h_1, p ; \beta] \neq 0, \ldots
$$

Fie $V(x)$ numărul de variaţii de semn ale şirului (3) pe punctul x şi fie $N[p ; \alpha \leqslant x \leqslant \beta]$ numărul de rădăcini ale soluţiei p din intervalul $[\alpha, \beta]$. Cu aceste notaţii şi precizări, are loc următoarea teoremă :

TEOREMĂ. *Fie dată o ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă, de ordinul* n, $L_n[y] = 0$, *de formă normală, cu coeficienţi continui pe un interval dat* $[a, b)$. *Presupunem că mulţimea soluţiilor acestei ecuaţii se bucură de proprietatea* $I_n[a, b)$. *În această ipoteză, fie* $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ *un sistem de soluţii, verificînd condiţia* $W_{n-1}(a, b)$, *adică inegalităţile* (1) *şi fie* p *o soluţie oarecare a aceleiaşi ecuaţii, liniar independentă în raport cu soluţiile* $h_1, \ldots, h_{n-1}$ *pe intervalul* $[a, b)$. *Are loc următoarea delimitare*

$$
(4)\quad N[p ; \alpha \leqslant x \leqslant \beta] \leqslant V(\alpha) - V(\beta).
$$

Demonstraţie. Vom aplica metoda inducţiei, relativ la ordinul n al ecuaţiei diferenţiale.

1°. Se constată cu uşurinţă că teorema în cauză este adevărată în cazul în care ordinul ecuaţiei diferenţiale este egal cu 2. Într-adevăr, fie dată o ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă, de ordinul al 2-lea, $L_2[y] = 0$, ai cărei coeficienţi sînt funcţii continue. Vom presupune că mulţimea soluţiilor acestei ecuaţii se bucură de proprietatea $I_2[a, b)$, care, după cum se ştie, este echivalentă cu următoarea proprietate de neoscilaţie : Orice soluţie neindentic nulă a ecuaţiei respective nu poate avea mai mult de o rădăcină reală în intervalul $[a, b)$, rădăcina respectivă, în cazul în care există, fiind simplă. În aceste ipoteze, fie h_1 o soluţie a ecuaţiei diferenţiale considerate, soluţia h_1 ne anulîndu-se pe nici un punct din intervalul (a, b). Existenţa a cel puţin unei astfel de soluţii rezultă din proprietate $I_2[a, b)$ a mulţimii soluţiilor ecuaţiei. De exemplu, soluţia h, care verifică condiţiile $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$, nu se poate anula pe nici un punct din intervalul (a, b), întrucît, dacă s-ar anula pe cel puţin un punct din (a, b), s-ar contrazice proprietatea $I_2[a, b)$ a mulţimii soluţiilor ecuaţiei diferenţiale.

În continuare, fie p o altă soluţie neidentic nulă a aceleiaşi ecuaţii diferenţiale, liniar independentă pe intervalul (a, b) în raport cu soluţia h_1. În aceste ipoteze soluţiile h_1 şi p vor forma un sistem fundamental de soluţii pe intervalul $[a, b)$ şi în consecinţă, wronskianul lor $W[h_1, p]$ nu se va anula pe nici un punct din intervalul $[a, b)$.

Pentru a proba veridicitatea teoremei în cazul $n = 2$, vom avea de considerat următoarele două cazuri:

Cazul 1: Soluţia p are o rădăcină reală în intervalul $[a, b)$, iar $W[h_1, p]$ păstrează un semn constant pe intervalul $[a, b)$, neanulîndu-se pe nici un punct din intervalul respectiv.

Cazul 2: Soluţia p şi funcţia $W[h_1, p]$ nu se anulează pe nici un punct din intervalul $[a, b)$.

În ambele cazuri, afirmaţia teoremei se verifică în mod evident.

2° Vom presupune acum că teorema este adevărată în cazul în care ordinul ecuaţiei diferenţiale este mai mic sau cel mult egal cu numărul natural $n - 1$. În această ipoteză, ne propunem să demonstrăm că afirmaţia teoremei este adevărată şi în cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare şi omogene de ordinul n. Într-adevăr, fie $L_n[y] = 0$ o astfel de ecuaţie, verificînd ipotezele din enunţul teoremei. Fie $h_1, \ldots, h_{n-1}$ un sistem de soluţii, care verifică condiţia $W_{n-1}(a, b)$, adică inegalităţile (1). Fie p o soluţie oarecare, liniar independentă în raport cu soluţiile $h_1, \ldots, h_{n-1}$ pe intervalul $[a, b)$. Funcţiile $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, p$ vor forma un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei diferenţiale considerate şi deci wronkianul $W[h_1, \ldots, h_{n-1}, p; x]$ nu se va anula pe nici un punct din intervalul $[a, b)$. Vom utiliza în vederea demonstrării teoremei, următoarea identitate, stabilită de L. ARAMĂ în lucrarea [1], pe baza unor rezultate obţinute de G. POLYA [8]:

$$(5)\quad W[H_1^{[k]}, H_2^{[k]}, \ldots, H_{n-k}^{[k]}] = W^{n-k-1}[h_1, h_2, \ldots, h_k] \cdot W[h_1, h_2, \ldots, h_n]$$

În această identitate, $h_1, \ldots, h_n$ reprezintă funcţii de clasă C_{n-1} pe un interval dat J, iar

$$H_i^{[k]}(x) = W[h_1, h_2, \ldots, h_k, h_{k+i}; x] \quad (i = 1, 2, \ldots, n - k).$$

În particular, pentru $k = 1$, identitatea (5) devine

$$(6)\quad W[W[h_1, h_2], W[h_1, h_3], \ldots, W[h_1, h_n]] = h_1^{n-2} \cdot W[h_1, h_2, \ldots, h_n].$$

Vom aplica această identitate sistemului de $n + 1$ funcţii $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, p, y$, care intervin în enunţul teoremei. Vom obţine identitatea

$$(7)\quad W[W[h_1, h_2], W[h_1, h_3], \ldots, W[h_1, h_{n-1}], W[h_1, p], W[h_1, y]] = h_1^{n-1} \cdot W[h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, p, y].$$

În această identitate, y reprzintă o funcţie oarecare, de clasă C_n pe intervalul $[a, b)$.

Să considerăm ecuaţia diferenţială

$$(8)\quad W[h_1, \ldots, h_{n-1}, p, y] = 0,$$

obţinută prin egalarea cu zero a wronskianului, care intervine în membrul al doilea al identităţii (7). Se observă cu uşurinţă că această ecuaţie are ordinul n în raport cu funcţia necunoscută y. Coeficientul derivatei de ordinul n a funcţiei necunoscute y, din expresia ecuaţiei (8) este wronskianul $W[h_1, \ldots, h_{n-1}, p]$, care, după cum s-a menţionat anterior, nu se anulează pe nici un punct din intervalul $[a, b)$. Se mai observă că ecuaţia diferenţială (8) admite ca sistem fundamental de soluţii, sistemul $h_1, \ldots, h_{n-1}, p$, care constituie dealtfel un sistem fundamental de soluţii, pe intervalul $[a, b)$, al ecuaţiei diferenţiale $L_n[y] = 0$. De aici, rezultă că cele două ecuaţii diferenţiale sînt echivalente pe intervalul $[a, b)$. Cu această precizare, să considerăm wronskianul de ordinul n, care intervine în membrul întîi al identităţii (7) şi să-l egalăm cu zero. Introducînd notaţia

$$(8')\quad W[h_1, y] = Y,$$

obţinem următoarea ecuaţie diferenţială în funcţia necunoscută Y:

$$(9)\quad W[W[h_1, h_2], W[h_1, h_3], \ldots, W[h_1, h_{n-1}], W[h_1, p], Y] = 0.$$

Această ecuaţie este de ordinul $n - 1$, cu coeficienţi continui pe intervalul $[a, b)$, coeficientul lui $Y^{(n-1)}$ fiind wronskianul

$$(10)\quad W[W[h_1, h_2], W[h_1, h_3], \ldots, W[h_1, h_{n-1}], W[h_1, p]].$$

Acest wronskian nu se anulează pe nici un punct din intervalul (a, b), deoarece, în baza formulei (6) se poate reprezenta sub forma $h_1^{n-2} \cdot W[h_1, \ldots, h_{n-1}, p]$, fiecare factor al acestui produs fiind diferit de zero pe orice punct x din intervalul (a, b). Ultima afirmaţie rezultă din prima inegalitate a şirului de inegalităţi (1), precum şi din faptul că soluţiile $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, p$ formează, prin ipoteză, un sistem fundamental pe intervalul $[a, b)$ al ecuaţiei diferenţiale $L_n[y] = 0$.

Se mai observă că ecuaţia diferenţială (9) admite ca soluţii, funcţiile

$$(11)\quad H_1 = W[h_1, h_2], H_2 = W[h_1, h_3], \ldots, H_{n-2} = W[h_1, h_{n-1}], P = W[h_1, p].$$

Aceste funcţii formează pe intervalul (a, b) un sistem fundamental de soluţii, deoarece wronskianul lor este wronskianul (10), care, după cum s-a arătat anterior, nu se anulează pe nici un punct din intervalul (a, b).

Pe de altă parte, după cum se constată cu uşurinţă, primele $n - 2$ funcţii din şirul (11) verifică condiţia $W_{n-2}(a, b)$, adică o condiţie de forma

Întrucît, prin ipoteză, funcția $W[h, p]$ nu se anulează pe intervalul $[\alpha, \xi_1)$, rezultă din (15′) că derivata de ordinul întîi a funcției $\frac{p}{h_1}$ va avea un semn constant pe intervalul $[\alpha, \xi_1)$. Acest semn nu poate fi altul decît semnul pozitiv. De aici, ținînd seamă de identitatea (15), rezultă că funcția $W[h_1, p]$ ia numai valori pozitive pe intervalul $[\alpha, \xi_1]$. Am obținut astfel următorul rezultat:

Șirul format din funcțiile p și $W[h_1, p]$ prezintă o variație de semn pe punctul $x = \alpha$.

Studiind în mod asemănător semnul funcției $\frac{p}{h_1}$ pe intervalul $(x_{m-1}, \beta]$, precum și semnul derivatei acestei funcții, pe intervalul $(\xi_{m-1}, \beta]$, se ajunge la concluzia că, în ipotezele adoptate, funcțiile p și $W[h_1, p]$ au același semn pe punctul $x = \beta$ și deci:

Șirul format din funcțiile p și $W[h_1, p]$ nu prezintă nici o variație de semn pe punctul $x = \beta$.

Din cele două concluzii rezultă egalitățile

(17) $$V(\alpha) = \bar{V}(\alpha) + 1, \quad V(\beta) = \bar{V}(\beta).$$

Prin ipoteză însă, are loc inegalitatea (13). Înlocuind în această inegalitate pe $\bar{V}$ în funcție de V, în conformitate cu formulele (17), obținem inegalitatea

$$\bar{N}[P;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] \leqslant [V(\alpha) - 1] - V(\beta).$$

Dar, prin ipoteză, $\bar{N}[P;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] = N[p;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] - 1 = m - 1$. Înlocuind în inegalitatea precedentă pe $\bar{N}$ în funcție de N, obținem inegalitatea $N[p;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] - 1 \leqslant V(\alpha) - V(\beta) - 1$, echivalentă cu inegalitatea (4). Astfel, teorema în cauză se verifică în condițiile cazului considerat.

C a z u l 2: *Numărul rădăcinilor din intervalul* $[\alpha, \beta]$, *ale funcției* $P = W[h_1, p]$ *este egal* cu m (adică egal cu numărul rădăcinilor din același interval, a funcției p).

În acest caz, în baza identității (15) și în baza teoremei lui Rolle va rezulta că, în ipotezele adoptate, funcția $P = W[h_1, p]$ are cel puțin $m - 1$ rădăcini reale și distincte în intervalul (x_1, x_m). Prin ipoteză însă, funcția P are exact m rădăcini reale și distincte în intervalul $[\alpha, \beta]$. Vom distinge două subcazuri, după cum funcția P are, sau nu rădăcini în intervalul $[\alpha, x_1]$.

S u b c a z u l 1: *Funcția* P *are* $m - 1$ *rădăcini* (simple) *în intervalul* (x_1, x_m), *o singură rădăcină* (simplă) *în intervalul* $[\alpha, x_1]$ *și nici o rădăcină în intervalul* $[x_m, \beta]$.

Fie ξ_1 rădăcina funcției P, din intervalul $[\alpha, x_1]$. Această rădăcină va aparține în mod necesar intervalului *deschis* (α, x_1), deoarece, prin ipoteză, funcția P nu se anulează pe punctul $x = \alpha$ și deoarece x_1 este o rădăcină *simplă* a funcției p. Deci $\alpha < \xi_1 < x_1$. Să considerăm intervalul (ξ_1, ξ_2). Pe acest interval, funcția $p\left(\text{și deci și funcția } \frac{p}{h_1}\right)$ are o singură rădăcină (simplă), anume rădăcina x_1, iar funcția $\left(\frac{p}{h_1}\right)'$ nu are nici o rădăcină, și în consecință, păstrează un semn constant. Această afirmație rezultă din ipoteza adoptată în subcazul considerat și din identitatea (15′). Să presupunem pentru fixarea ideilor că

(18) $$\operatorname{sgn} \frac{p(x)}{h_1(x)} = -1 \text{ pentru } x \in [\alpha, x_1)$$
$$\operatorname{sgn} \frac{p(x)}{h_1(x)} = +1 \text{ pentru } x \in (x_1, x_2].$$

Din aceste egalități, ținînd seamă de faptul menționat anterior, anume că funcția $\left(\frac{p}{h_1}\right)'$ păstrează un semn constant pe intervalul (ξ_1, ξ_2), va rezulta, în baza unui raționament simplu, că acest semn este neapărat pozitiv. De aici, în baza identității (15) rezultă inegalitatea $P(x) > 0$, pentru orice $x \in (\xi_1, \xi_2)$. Deoarece ξ_1 este o rădăcină simplă a funcției P, din inegalitatea precedentă va rezulta că funcția P verifică inegalitatea $P(x) < 0$ pentru orice $x \in [\alpha, \xi_1)$, în particular, pentru $x = \alpha$. Deci $\operatorname{sgn} P(\alpha) = -1$. Deoarece, prin ipoteză, $\operatorname{sgn} \frac{p(x)}{h_1(x)} = -1$ pentru orice $x \in [\alpha, x_1)$, rezultă că șirul de două funcții p și $P = W[h_1, p]$ nu prezintă nici o variație de semn pe punctul $x = \alpha$. De aici, ținînd seamă de semnificațiile simboalelor $V(\alpha)$ și $\bar{V}(\alpha)$, rezultă egalitatea

(19) $$V(\alpha) = \bar{V}(\alpha).$$

Pe de altă parte, se observă că referitor la intervalul $(\xi_1, \beta]$ sînt îndeplinite condițiile specifice cazului 1, studiat anterior. Printr-un raționament analog cu acela utilizat în cazul 1, se ajunge la concluzia că șirul de două funcții p, $P = W[h_1, p]$ nu prezintă nici o variație de semn pe punctul $x = \beta$, de unde rezultă egalitatea

(20) $$V(\beta) = \bar{V}(\beta).$$

Din (19) și (20) rezultă egalitatea

(21) $$V(\alpha) - V(\beta) = \bar{V}(\alpha) - \bar{V}(\beta).$$

Dar, deoarece, prin ipoteză, funcția P are pe intervalul (α, β) m rădăcini și deoarece s-a presupus că afirmația teoremei este adevărată pentru ecuaţiile diferenţiale de ordinul $n-1$ (în ipotezele corespunzătoare, care decurg din enunţul teoremei în cauză), rezultă că $\bar{N}[P;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] \leqslant \bar{V}(\alpha) - \bar{V}(\beta)$. Prin ipoteză însă $\bar{N}[P;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] = N[p;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] = m$. Din inegalitatea precedentă şi din egalitatea (21) va rezulta în definitiv inegalitatea $N[p;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] \leqslant V(\alpha) - V(\beta)$, care exprimă valabilitatea afirmaţiei teoremei, în subcazul considerat.

S u b c a z u l 2: *Funcţia P nu are nici o rădăcină în intervalul* $[\alpha, x_1]$ *şi are în total m rădăcini* (simple) *în intervalul* (x_1, β).

Să presupunem, pentru fixarea ideilor, că sînt verificate condiţiile (18). Utilizînd un raţionament analog, se constată că, în ipotezele specifice subcazului considerat, din relaţiile (18) rezultă egalităţile

$$\operatorname{sgn} p(\alpha) = -1,\ \operatorname{sgn} P(\alpha) = +1,\ \operatorname{sgn} p(\beta) = -\operatorname{sgn} P(\beta).$$

Din aceste egalităţi rezultă că şirul format din funcţiile p şi P prezintă cîte o variaţie de semn pe fiecare dintre punctele $x = \alpha$ şi $x = \beta$, şi în consecinţă au loc egalităţile

$$V(\alpha) = \bar{V}(\alpha) + 1,\ V(\beta) = \bar{V}(\beta) + 1. \tag{22}$$

Întrucît teorema în cauză a fost presupusă adevărată în cazul în care ordinul ecuaţiei diferenţiale este $n-1$ (în condiţiile corespunzătoare, care rezultă din enunţul teoremei respective), rezultă inegalitatea

$$\bar{N}[P;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] \leqslant \bar{V}(\alpha) - \bar{V}(\beta). \tag{23}$$

Dar, prin ipoteză, $\bar{N}[P;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] = m = N[p;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta]$. Din această egalitate şi din relaţiile (22) şi (23) rezultă inegalitatea $N[p;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] \leqslant V(\alpha) - V(\beta)$, prin care se atestă valabilitatea teoremei în subcazul considerat.

C a z u l 3: *Numărul rădăcinilor din intervalul* $[\alpha, \beta]$, *ale funcţiei* p *este egal cu m, iar numărul rădăcinilor din acelaşi interval, ale funcţiei P este mai mare sau cel puţin egal cu* $m+1$.

În acest caz, în baza teoremei, presupusă adevărată pentru ecuaţiile diferenţiale liniare şi omogene de ordinul $n-1$ (în ipotezele corespunzătoare, care decurg din enunţul teoremei respective), are loc inegalitatea

$$\bar{N}[P;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] \leqslant \bar{V}(\alpha) - \bar{V}(\beta). \tag{23'}$$

Dar, în ipotezele specifice cazului 3, considerat, au loc relaţiile:

$$\bar{N}[P;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] \geqslant m+1,\ N[p;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] = m.$$

Din aceste relaţii rezultă că $\bar{N}[P;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] \geqslant N[p;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] + 1$. Prin compunerea acestei inegalităţi cu inegalitatea (23′) rezultă

$$N[p;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] \leqslant \bar{V}(\alpha) - \bar{V}(\beta) - 1. \tag{24}$$

Pe de altă parte, între valorile funcţiilor $V(x)$ şi $\bar{V}(x)$, care reprezintă numărul de variaţii ale şirurilor (3), respectiv (14), pe punctul x, nu pot avea loc decît una dintre următoarele egalităţi:

$$V(x) = \bar{V}(x),\ \text{sau}\ V(x) = \bar{V}(x) + 1.$$

În particular, pe punctele $x = \alpha$ şi $x = \beta$ nu pot avea loc decît următoarele egalităţi:

$$V(\alpha) = \bar{V}(\alpha),\ \text{sau}\ V(\alpha) = \bar{V}(\alpha) + 1,$$
$$V(\beta) = \bar{V}(\beta),\ \text{sau}\ V(\beta) = \bar{V}(\beta) + 1.$$

De aici, ţinînd seamă de inegalitatea $\bar{V}(\alpha) \geqslant \bar{V}(\beta)$, care rezultă din afirmaţia teoremei, în cazul în care ordinul ecuaţiei diferenţiale este mai mic sau cel mult egal cu $n-1$, se constată că întodeauna are loc inegalitatea

$$V(\alpha) - V(\beta) \geqslant \min\{\bar{V}(\alpha) - \bar{V}(\beta),\ \bar{V}(\alpha) + 1 - \bar{V}(\beta),$$
$$\bar{V}(\alpha) - [\bar{V}(\beta) + 1],\ \bar{V}(\alpha) + 1 - [\bar{V}(\beta) + 1]\} = \bar{V}(\alpha) - \bar{V}(\beta) - 1. \tag{25}$$

Prin compunerea inegalităţilor (24) şi (25) se obţine inegalitatea $N[p;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta] \leqslant V(\alpha) - V(\beta)$, prin care se atestă valabilitatea teoremei şi în cazul 3, considerat.

În concluzie, presupunînd că afirmaţia teoremei este adevărată pentru ecuaţiile diferenţiale liniare şi omogene, de un ordin mai mic sau cel mult egal cu $n-1$ (în condiţiile corespunzătoare, care decurg din enunţul teoremei respective în cazul unor astfel de ecuaţii), am demonstrat că afirmaţia teoremei în cauză este adevărată şi în cazul în care ordinul ecuaţiei diferenţiale este n. În baza principiului inducţiei complete, teorema este adevărată oricare ar fi ordinul n (număr natural) al ecuaţiei diferenţiale.

O b s e r v ă r i. 1°. În enunţul teoremei s-a presupus că soluţia neidentic nulă p este liniar independentă în raport cu soluţiile $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ ale ecuaţiei diferenţiale $L_n[y] = 0$, adică că formează împreună cu aceste soluţii un sistem fundamental de soluţii, pe intervalul în cauză. Dacă această condiţie nu ar fi îndeplinită, atunci, în ipoteza că funcţiile $h_1, \ldots, h_{n-1}$, presupuse de clasă $C_n[a, b)$ verifică condiţia $W_{n-1}[a, b)$, adică inegalităţile (1), ar rezulta că funcţia p este o soluţie a unei ecuaţii diferenţiale, liniare şi omogene, de un ordin mai mic decît n (cu coeficienţi continui şi de formă normală pe intervalul $[a, b)$), ecuaţia diferenţială respectivă avînd ca sistem fundamental, o anumită secţiune din şirul de funcţii $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$. Teorema în cauză se va referi în acest caz la ecuaţia diferenţială redusă.

2°. Teorema enunţată este valabilă şi în cazul în care rădăcinile di intervalul (α, β) ale soluţiei p considerate nu sînt toate simple, unele dintr aceste rădăcini putînd să fie multiple. Această afirmaţie rezultă din faptu că, dacă mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene, d ordinul n $(n \geqslant 2)$ se bucură de proprietatea $I_n[a, b)$, adică de proprietate de a fi interpolatoare de ordinul n pe intervalul $[a, b)$, atunci, dacă y este soluţie neidentic nulă a ecuaţiei respective, soluţie care are rădăcini mul tiple în intervalul $[a, b)$, printr-o deformare *continuă* a soluţiei y se poat obţine o altă soluţie $\tilde{y}$ a aceleiaşi ecuaţii diferenţiale, *oricît de „apropiată” de soluţia y*, soluţia deformată avînd toate rădăcinile simple şi în total tot atîtea rădăcini (reale) în intervalul $[a, b)$, cîte rădăcini reale a avut soluţia y în intervalul respectiv (rădăcinile soluţiei y fiind considerate împreună cu ordinul lor de multiplicitate).

Justificarea acestei afirmaţii este dată în lucrarea noastră [2] şi se bazează pe următoarea teoremă stabilită în lucrarea respectivă: Dacă mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene, de ordinul n, cu coeficienţi continui, de formă normală, are proprietatea de a fi interpolatoare pe noduri simple (în sensul interpolării lui Lagrange), pe un interval dat $[a, b)$, atunci aceea mulţime se bucură şi de proprietatea de a fi interpolatoare pe noduri multiple (în sensul lui Hermite) pe acelaşi interval $[a, b)$.

C a z p a r t i c u l a r. Să considerăm ecuaţia diferenţială $y^{(n+1)} = 0$, ale cărei soluţii sînt polinoamele de grad cel mult egal cu n. Relativ la această ecuaţie, să considerăm sistemul de soluţii

$$h_1(x) = 1,\ h_2(x) = x,\ h_3(x) = x^2,\ \ldots,\ h_n(x) = x^{n-1}. \tag{26}$$

Se observă să soluţiile $h_1, \ldots, h_n$ verifică condiţia W_n pe intervalul $(-\infty, \infty)$. Fie p un polinom oarecare, de grad n (efectiv). Şirul (3), corespunzător polinomului p şi sistemului de soluţii $h_1, \ldots, h_n$ considerat va fi:

$$W[p\,;\, x] = p(x),\ W[h_1, p\,;\, x] = p'(x),\ W[h_1, h_2, p\,;\, x] = p''(x), \ldots,$$
$$W[h_1, h_2, \ldots, h_n, p\,;\, x] = (n-1)!\, p^{(n)}(x).$$

Acest şir este echivalent, în ceea ce priveşte numărul variaţiilor de semn, cu şirul

$$p(x),\ p'(x),\ p''(x),\ \ldots,\ p^{(n)}(x).$$

Enunţul teoremei noastre revine în acest caz la enunţul unei cunoscute teoreme, purtînd denumirea de teoremă a lui Budan-Fourier.

O altă demonstraţie a acestei teoreme, bazată pe teoria operatorilor matriciali pozitivi a fost dată de S. KARLIN în lucrarea [4]. În această direcţie menţionăm de asemenea lucrarea [9], în care T. POPOVICIU prezintă un studiu sistematic al teoremei lui Sturm, sub aspectul teoriei polinoamelor ortogonale.

Dacă ne interesează, de exemplu, numai numărul rădăcinilor pozitive ale polinomului p, considerat anterior, atunci, putem utiliza ca sistem de soluţii $h_1, \ldots, h_n$, care să verifice condiţia W_n pe intervalul $(0, \infty)$, următorul sistem:

$$h_1(x) = x^{n-1},\ h_2(x) = -x^{n-2},\ h_3(x) = x^{n-3}, \ldots,\ h_{n-1}(x) = (-1)^n x,\quad h_n = (-1)^{n+1}. \tag{27}$$

Se constată ca uşurinţă, că acest sistem de soluţii verifică condiţia W_n pe intervalul $(0, \infty)$, fără însă s-o verifice pe punctul $x = 0$. Şirul (3) corespunzător polinomului p, intervalului $(0, \infty)$ şi sistemului de soluţii $h_1, \ldots, h_n$ considerat va fi:

$$W[p\,;\, x] = p(x),\ W[h_1, p\,;\, x] = x^{n-1}p' - (n-1)\, x^{n-2}p, \tag{28}$$
$$W[h_1, h_2, p\,;\, x] = x^{2(n-2)}p'' - 2(n-2)x^{2n-5}p' + (n-1)(n-2)x^{2n-6}p, \ldots$$

Notînd cu $V(x)$ numărul de variaţii de semn pe care le prezintă şirul (28) pe punctul x, teorema demonstrată exprimă faptul că numărul rădăcinilor (pozitive) ale unui polinom de grad n (efectiv), cuprinse într-un interval dat $[\alpha, \beta]$ al semiaxei pozitive (în ipoteza că nici unul dintre termenii şirului (28) nu se anulează pe niciunul dintre punctele $x = \alpha$ şi $x = \beta$) este delimitat de diferenţa $V(\alpha) - V(\beta)$.

O afirmaţie analoagă se poate obţine pentru cazul în care intervalul $[\alpha, \beta]$ aparţine semiaxei negative. Dacă, de exemplu, n este un număr impar, atunci se poate considera ca şir $h_1, h_2, \ldots, h_n$, care să verifice proprietatea W_n pe intervalul $(-\infty, 0)$ tot şirul (27), etc.

Este de menţionat însă faptul că şirurile (26) şi (27) nu sînt singurele şiruri de funcţii $h_1, \ldots, h_n$, care verifică, de exemplu, pe intervalul $(0, \infty)$ proprietatea W_n. Se pot imagina şi alte astfel de şiruri. Pentru fiecare alegere a şirului $h_1, \ldots, h_n$, se va obţine în baza teoremei demonstrate, cîte o delimitare a numărului rădăcinilor reale ale polinomului p, din intervalul $[\alpha, \beta]$ considerat. Credem că ar fi interesant de a se cerceta, dacă pentru un grad n dat şi pentru un interval $[\alpha, \beta]$ dat, există, sau nu, o mulţime finită $\mathscr{M}$ de şiruri de forma $h_1, \ldots, h_n$ (mulţimea respectivă depinzînd numai de gradul n ales), astfel încît oricare ar fi polinomul real p, de grad n, să existe pentru polinomul respectiv cel puţin un element din mulţimea $\mathscr{M}$ de şiruri, astfel încît inegalitatea (4) corespunzătoare să devină o egalitate? De asemenea, credem că ar prezenta interes obţinerea unei noi demonstraţii a teoremei lui Sturm, pe baza cunoscutei teoreme a lui W. A. MARKOV [6], referitoare la separarea rădăcinilor a două polinoame şi a rădăcinilor derivatelor acestora (A se consulta în această direcţie lucrările [10] şi [12] citate în bibliografie).

SUR L'ÉVALUATION DU NOMBRE DES RACINES RÉELLES DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES

RÉSUMÉ

En considérant comme modèle le théorème bien connu de Sturm, concernant l'évaluation du nombre des racines réelles des polynomes réels, en fonction du nombre des variations de la suite qui porte son nom, dans le présent travail on présente une méthode, à certains égards analogue, pour la délimitation du nombre des racines réelles des solutions des équations différentielles linéaires et homogènes d'ordre n $(n \geqslant 2)$.

Soit $L_n[y] = 0$ une telle équation. On supposera que les conditions suivantes sont remplies: 1°. Les coefficients de l'équation sont des fonctions continues sur un intervalle donné $[a, b)$ et le coefficient de la dérivée d'ordre n de la fonction inconnue y ne s'annule dans aucun point de $[a,b)$. 2°. L'ensemble $\mathscr{Y}$ constitué par les solutions de l'équation considérée est interpolatoire d'ordre n sur l'intervalle $[a, b)$, ce qui en énoncé équivalent, signifie que quelleque soit la solution non identiquement nulle y de l'équation différentielle, la solution respective ne peut avoir plus de $n - 1$ racines réelles dans l'intervalle $[a, b)$. Dans ces conditions, soit $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ un système de solutions, qui pour tout $x \in [a, b)$ vérifie les inégalités (1), où $W[h_1, h_2, \ldots, h_k]$ représente le wronskien des fonctions $h_1, h_2, \ldots, h_k$. L'existence d'un tel système résulte des conditions sus-mentionnées. Soit p une solution quelconque, linéairement indépendente sur l'intervalle $[a, b)$, par rapport aux solutions $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$. Nous associerons à cette solution la suite des wronskiens (3). Soit $[\alpha, \beta]$ un intervalle, tel que $a < \alpha < \beta < b$ et qu'aucune des fonctions de la suite (3) ne s'annule dans aucune des extrémités de cet intervalle. Désignons par $V(x)$ le nombre des variations de signe de la suite (3) au point x, et par $N[p\,; \alpha \leqslant x \leqslant \beta]$ le nombre des racines réelles de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ de la solution p considérée. Dans le travail on démontre que dans les conditions mentionnées on a la délimitation

$$N[p; \quad \alpha \leqslant x \leqslant \beta] \leqslant V(\alpha) - V(\beta),$$

laquelle généralise le théorème bien connu de Budan-Fourier. On présente quelques applications de la délimitation obtenue.

BIBLIOGRAFIE

[1] A r a m ă, L., *Asupra unei teoreme a lui G. Mammana*. Analele Universităţi din Bucureşti, Seria Stiinţele naturii, Matem.-Fiz. **X, 29,** 63–69 (1961).

[2] A r a m ă, O., *Rezultate comparative asupra unor probleme la limită polilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare*. Studii şi cerc. de matematică (Cluj), **X,** *2*, pp. 207–257 (1959). Idem în limba franceză în revista Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., **6 (54)**, nr. *1–2*, 3–52 (1962).

[3] — *Sur un théorème de W. A. Markov*. Mathematica (Cluj), **3 (26)**, pp. 197–216 (1961).

[4] K a r l i n, S., *Total positivity*. Standford, California, 1968.

[5] M a m m a n a, G., *Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogene in prodotto di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari*. Mathem. Zeitschrift, **33,** 186–231 (1931).

[6] M a r k o v, W. A., *Über Polynome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen*. Mathem. Annallen, **77,** 213–258 (1916).

[7] M o l d o v a n, E., *Asupra noţiunii de funcţie convexă faţă de o de o mulţime interpolatoare*. Studii şi cerc. de matematică (Cluj), **IX,** 161–224 (1958).

[8] P ó l y a, G., *On the mean-value theorem corresponding to a linear given homogeneous differential equation*. Amer. Math. S. Bull. **24,** 312–324 (1922).

[9] P o p o v i c i u, T., *Curs special*. Universitatea din Cluj (1970–1971).

[10] — *Sur un théorème de W. A. Markov*. Mathematica (Cluj), **2 (25)**, 299–321 (1960).

[11] V a s i l e s c u, F., *Asupra teoremei lui Sturm*. Gazeta Mat. (Soc. de ştiinţe matematice şi fiz., România) **21,** 81–83, 201–206, 287–291 (1915–1916).

[12] V i d e n s k i i, V. S., *Zamečianja k teoreme V. A. Markova o dvuh mnogočlenah, nuli kotoryk peremežajutsja*. Izv. Acad. Nauk Armianskoi SSR, **XV,** nr. *2*, 15–24 (1962).

Primit la 21. VIII. 1971.