REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 1, Fascicola 2, 1972, pp. 113–123

OBSERVAŢII ASUPRA REZOLVĂRII SISTEMELOR DE ECUAŢII OPERAŢIONALE PRINTR-UN PROCEDEU DE TIP GAUSS-SEIDEL

de

ADRIAN DIACONU
(Cluj)

Introducere

În lucrarea de faţă vom da condiţii suficiente de existenţă şi unicitate a soluţiei unui sistem de ecuaţii operaţionale în care operatorii sînt definiţi pe produse carteziene de m spaţii Banach cu valori în aceleaşi spaţii Banach. În cazul sistemelor de două ecuaţii problema a fost abordată de către I. PĂVĂLOIU [3], [4]. De asemenea în lucrarea [3] este schiţată pe scurt problema cu care ne vom ocupa în nota de faţă.

Fie date m spaţii Banach X_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ şi spaţiul $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$ care de asemenea este un spaţiu Banach [1]. Fie $\varphi_i : X \to X_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$; m operatori.

Considerăm sistemul de ecuaţii operaţionale:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m = \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_m). \end{cases}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem considerăm următoarea metodă iterativă de tip Gauss-Seidel:

$$(2)\qquad x_k^{(n+1)} = \varphi_k(x_1^{(n+1)}, \ldots, x_{k-1}^{(n+1)}, x_k^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}),\ k=1, 2, \ldots, m;\ n=0, 1, 2, \ldots$$

unde $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ este un element convenabil ales din spaţiul X.

În cele ce urmează vom presupune că sînt îndeplinite următoarele condiţii:

a) Operatorul $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ transformă mulţimea închisă $D \subseteq X$ în ea însăşi şi $x^{(0)} \in D$.

b) Operatorii φ_i; $i = 1, 2, \ldots, m$ verifică condiţia lui Lipschitz în D, adică există constantele nenegative a_{ij}; $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, m$ astfel încît oricare ar fi punctele $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_m^{(2)})$ din D să fie verificate inegalităţile:

$$\|\varphi_i(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}) - \varphi_i(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_m^{(2)})\| \leqq \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \|x_j^{(1)} - x_j^{(2)}\|,$$
$$i = 1, 2, \ldots, m$$

c) Constantele a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, m$ din condiţia b) sînt toate nenule.

1. Consideraţii preliminare

Să considerăm şirurile $(f_k^{(n)})_{n=0}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ definite de următorul sistem de inegalităţi recurente:

$$f_k^{(n+1)} \leqq a_{k1} f_1^{(n+1)} + \ldots + a_{kk-1} f_{k-1}^{(n+1)} + a_{kk} f_k^{(n)} + \ldots + a_{km} f_m^{(n)}, \tag{3}$$
$$k = 1, 2, \ldots, m.$$

unde a_{ij} sînt constantele lui Lipschitz din condiţia b) şi $f_1^{(0)}, \ldots, f_m^{(0)}$ sînt numere reale date.

Sistemului de inegalităţi recurente (3) îi ataşăm sistemul de ecuaţii algebrice:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_m = {} & a_{k1} z_1 z_2 \cdot \ldots \cdot z_{m-k+1} + a_{k2} z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_{m-k+1} z_m + \ldots \\ & \ldots + a_{kk-1} z_1 \cdot \ldots \cdot z_{m-k+1} z_{m-k+3} \cdot \ldots \cdot z_m + a_{kk} + a_{kk+1} z_{m-k+1} + \ldots \\ & \ldots + a_{km} z_2 \cdot \ldots \cdot z_m, \end{aligned} \tag{4}$$
$$k = 1, 2, \ldots, m.$$

De asemenea să considerăm următoarea ecuaţie de gradul m în p.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - p & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1\,m-1} & a_{1m} \\ a_{21} p & a_{22} - p & a_{23} & \ldots & a_{2\,m-1} & a_{2m} \\ a_{31} p & a_{32} p & a_{33} - p & \ldots & a_{3\,m-1} & a_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} p & a_{m2} p & a_{m3} p & \ldots & a_{m\,m-1} p & a_{mm} - p \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

În (4) şi (5), a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, m$ au aceeaşi semnificaţie ca în (3)

L e m a 1. *Dacă este îndeplinită ipoteza* c) *condiţia necesară şi suficientă ca sistemul* (4) *să admită cel puţin q soluţii cu componente reale $q \leqq m$, este ca ecuaţia* (5) *să admită cel puţin q rădăcini reale.*

Demonstraţie. Notăm cu:

$$u_i = z_i \cdot z_{i+1} \ldots z_{m-1}; \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1$$

şi

$$p = z_1 \cdot z_2 \ldots z_m$$

Analizînd fiecare ecuaţie a sistemului (4) deducem pe rînd că în ipoteza c) sistemul nu poate admite nici o soluţie de forma $(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)})$ pentru care să existe cel puţin un număr $z_i^{(0)} = 0$. Într-adevăr din prima ecuaţie a sistemului (4) rezultă că dacă $a_{11} \neq 0$ atunci $z_m \neq 0$. Acest fapt este evident deoarece dacă presupunem că $z_m = 0$ verifică prima ecuaţie din (4), rezultă $a_{11} = 0$. Raţionînd la fel şi cu ecuaţiile următoare din sistemul (4) rezultă că afirmaţia de sus este adevărată.

Cu notaţiile introduse şi ţinînd cont de observaţia de mai sus sistemul (4) se mai scrie:

$$\begin{cases} (a_{11} - p) u_1 + a_{12} p + a_{13} p u_{m-1} + \ldots + a_{1m} p u_2 = 0 \\ a_{21} u_1 + (a_{22} - p) + a_{23} u_{m-1} + \ldots + a_{2m} u_2 = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{k1} u_1 + a_{k2} p + \ldots + a_{k\,k-1} p u_{m-k+3} + (a_{kk} - p) u_{m-k+2} + \\ \qquad + a_{k\,k+1} u_{m-k+1} + \ldots + a_{km} u_2 = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{m1} u_1 + a_{m2} p + a_{m3} p u_{m-1} + \ldots + a_{m\,m-1} p u_3 + (a_{mm} - p) u_2 = 0. \end{cases} \tag{4'}$$

Dacă eliminăm din sistemul (4') necunoscutele $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ rezultă ecuaţia (5).

Prin urmare dacă $(z_{1,i}, z_{2,i}, \ldots, z_{m,i})$; $i = 1, 2, \ldots, q$ sînt q soluţii reale ale sistemului (4) atunci $p_i = z_{1,i}\, z_{2,i} \ldots z_{m,i}$ $i = 1, 2, \ldots, q$ sînt q rădăcini reale ale ecuaţiei (5). Şi reciproc: date fiind cele q rădăcini reale ale ecuaţiei (5) sistemul liniar (4′) pentru $p = p_j$; $i = 1, 2, \ldots, q$ admite soluţiile $(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \ldots, u_{m-1}^{(i)})$ $i = 1, 2, \ldots, q$. Deoarece sistemul (4) admite soluţii cu componente nenule şi sistemul (4′) va admite astfel de sisteme de soluţii deci $u_k^{(i)} \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$; $i = 1, 2, \ldots, q$ şi cele q soluţii ale lui (4) $(z_{1,i}, z_{2,i}, \ldots, z_{m,i})$ se vor obţine după cum urmează

$$z_{k,i} = \frac{u_k^{(i)}}{u_{k+1}^{(i)}}\ ; k = 1, 2, \ldots, m-2; \quad z_{m-1,i} = u_{m-1}^{(i)}; \quad z_{m,i} = \frac{p_i}{u_1^{(i)}},$$

$$i = 1, 2, \ldots, q.$$

Prin urmare lema este demonstrată.

L e m a 2. *Dacă este îndeplinită condiţia* c), $z_1, z_2, \ldots, z_m$ *este o soluţie a sistemului* (4) *şi* $f_k^{(n)}$; $k = 1, 2, \ldots, m$; $n = 1, 2, \ldots$ *verifică relaţiile* (3), *atunci există o constantă pozitivă c astfel ca:*

$$f_k^{(n)} \leqq c z_1^{n-1} z_2^{n-1} \ldots z_{m-k+1}^{n-1} z_{m-k+2}^{n} \ldots z_m^n, \quad k = 1, 2, \ldots, m; \quad n \in N.$$

Demonstraţie. Folosim inducţia completă. Pentru $n = 1$ trebuie să arătăm că există o constantă c, $c > 0$ astfel ca să fie îndeplinite inegalităţile:

$$f_1^{(1)} \leqq c,\ f_2^{(1)} \leqq c z_m,\ \ldots,\ f_k^{(1)} \leqq c z_{m-k+2} \ldots z_m,\ \ldots,\ f_m^{(1)} \leqq c z_2 \ldots z_m.$$

Pentru aceasta putem alege:

$$c \geqq c_0 = \max\left\{f_1^{(1)}, \frac{f_2^{(1)}}{z_m}, \frac{f_3^{(1)}}{z_{m-1} z_m}, \ldots, \frac{f_m^{(1)}}{z_2 z_3 \ldots z_m}\right\},$$

unde $z_2, \ldots, z_m$ sînt componente ale soluţiei considerate a sistemului (4).

Presupunem condiţia îndeplinită pentru $n = s$ deci:

$$f_k^{(s)} \leqq c z_1^{s-1} z_2^{s-1} \ldots z_{m-k+1}^{s-1} z_{m-k+2}^{s} \ldots z_m^s, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Arătăm că inegalitatea are loc şi pentru $n = s + 1$. Pentru $k = 1$ avem:

$$f_1^{(s+1)} \leqq a_{11} f_1^{(s)} + a_{12} f_2^{(s)} + \ldots + a_{1m} f_m^{(s)} \leqq$$
$$\leqq c z_1^{s-1} z_2^{s-1} \ldots z_m^{s-1} (a_{11} + a_{12} z_m + \ldots + a_{1m} z_1 \ldots z_m) =$$
$$= c z_1^s z_2^s \ldots z_m^s,$$

folosind prima ecuaţie a sistemului (4). Constanta c are aceeaşi valoare ca în cazul $n = 1$.

Presupunem acum că avem în plus:

$$f_h^{(s+1)} \leqq c z_1^s z_2^s \cdot \ldots \cdot z_{m-h+1}^s z_{m-h+2}^{s+1} \cdot \ldots \cdot z_m^{s+1},$$

pentru orice $h = 1, 2, \ldots, k-1$. Atunci:

$$f_k^{(s+1)} \leqq a_{k1} f_1^{(s+1)} + \ldots + a_{kk-1} f_{k-1}^{(s+1)} + a_{kk} f_k^{(s)} + \ldots + a_{km} f_m^{(s)} \leqq$$
$$\leqq c z_1^{s-1} \cdot \ldots \cdot z_{m-k+1}^{s-1} z_{m-k+2}^{s} \cdot \ldots \cdot z_m^s (a_{k1} z_1 \cdot \ldots \cdot z_{m-k+1} + \ldots +$$
$$+ a_{kk-1} z_1 \cdot \ldots \cdot z_{m-k+1} z_{m-k+3} \cdot \ldots \cdot z_m + a_{kk} + a_{kk+1} z_{m-k+1} + \ldots +$$
$$+ a_{km} z_2 \cdot \ldots \cdot z_{m-k+1}) = c z_1^s z_2^s \cdot \ldots \cdot z_{m-k+1}^s z_{m-k+2}^{s+1} \cdot \ldots \cdot z_m^{s+1}.$$

În raţionamentul de mai sus m-am folosit de a $k-a$ ecuaţie a sistemului (4). Prin urmare proprietatea exprimată de lemă este adevărată pentru orice $k = 1, 2, \ldots, m$ şi pentru orice n natural.

2. Existenţa şi unicitatea soluţiei sistemului (1)

TEOREMĂ. *Dacă sînt îndeplinite condiţiile* a), b), c), *şi în plus ecuaţia* (5) *admite cel puţin o rădăcină reală şi toate rădăcinile reale ale ei aparţin intervalului* [0,1], *atunci sînt adevărate afirmaţiile:*

A) *Metoda iterativă* (2) *este convergentă.*

B) *Sistemul de ecuaţii operaţionale* (1) *are soluţie unică şi această soluţie este limita şirului generat de metoda iterativă* (2).

Demonstraţie. A) Pentru a demonstra convergenţa şirurilor $x_k^{(n)}$, $n \in \mathbf{N}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ este suficient să arătăm că ele sînt fundamentale fiind vorba de şiruri în spaţii Banach. Vom evalua prin urmare:

$$\|x_k^{(n+s)} - x_k^{(n)}\| \leqq \|x_k^{(n+s)} - x_k^{(n+s-1)}\| + \|x_k^{(n+s-1)} - x_k^{(n+s-2)}\| +$$
$$+ \ldots + \|x_k^{(n+1)} - x_k^{(n)}\|,$$
$$k = 1, 2, \ldots, m.$$

Să presupunem că ecuaţia (5) admite q rădăcini reale $1 \leqq q \leqq m$. Conform lemei 1 sistemul (4) va admite q soluţii cu componente reale $(z_{i,1}, z_{2,i}, \ldots, z_{m,i})$; $i = 1, 2, \ldots, q$ fiecărei rădăcini a ecuaţiei (5) corespunzînd o soluţie a sistemului (4).

Alegem $f_k^{(n+1)} = \|x_k^{(n+1)} - x_k^{(n)}\|$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Ipoteza b) fiind îndeplinită, $f_k^{(n)}$, $n \in \mathbf{N}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ astfel alese verifică inegalităţile

(3) şi situîndu-ne în ipotezele lemei 2 rezultă că există constantele c_i, $i = 1, 2, \ldots, q$ astfel încît:

$$f_k^{(n)} \leqq c_i z_{1,i}^{n-1} z_{2,i}^{n-1} \cdot \ldots \cdot z_{m-k+1,i}^{n-1} z^n_{m-k+2,i} \cdot \ldots \cdot z_{m,i}^n, \quad n \in \mathbf{N}$$

$$i = 1, 2, \ldots, q \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Notînd:

$$c = \max_{i=1,2,\ldots,q} \{c_i\}, \quad z_h = \max_{k=1,2,\ldots,q} \{z_{h,i}\}, \quad h = 1, 2, \ldots, m,$$

$$p = \max_{i=1,2,\ldots,q} \{p_i\}, \quad \text{cu} \quad p_i = \prod_{h=1}^{m} z_{h,i}$$

$$i = 1, 2, \ldots, q,$$

avem:

$$\|x_k^{(n+s)} - x_k^{(n)}\| \leqq f_k^{(n+s)} + f_k^{(n+s-1)} + \ldots + f_k^{(n+1)} \leqq$$

$$\leqq c z_{m-k+2} \cdot \ldots \cdot z_m p^n (1 + p + \ldots + p^s), \quad k = 1, \ldots, m, \quad s \in \mathbf{N}.$$

Deoarece $p_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, q$ rezultă că şi $p < 1$ prin urmare seria geometrică cu raţia p este convergentă, deci:

$$\|x_k^{(n+s)} - x_k^{(n)}\| < \frac{c z_{m-k+2} \cdot \ldots \cdot z_m p^n}{1 - p}, \quad k = 1, \ldots, m, \quad s \in \mathbf{N}.$$

Deoarece $p < 1$ rezultă că şirurile $\{x_k^{(n)}\}_{n \in N}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ sînt fundamentale prin urmare şi convergente.

B) Fie $\bar{x}_k = \lim\limits_{n \to \infty} x_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Vrem să arătăm că $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)$ este o soluţie a sistemului (1). În relaţia $\|x_k^{(n+s)} - x_k^{(n)}\| < \varepsilon_k$ facem $s \to \infty$ şi rezultă:

$$\|\bar{x}_k - x_k^{(n)}\| < \varepsilon_k, \; 0 < \varepsilon_k < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

sau:

$$\|\bar{x}_k - \varphi_k(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n-1)}, \ldots, x_m^{(n-1)})\| \leqq \varepsilon_k$$

Conform ipotezei b) rezultă:

$$\|\bar{x}_k - \varphi_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)\| \leqq \|\bar{x}_k - \varphi_k(x_1^{(n)}, \ldots, x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n-1)}, \ldots, x_k^{(n-1)})\| +$$

$$+ \|\varphi_k(x_1^{(n)}, \ldots, x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n-1)}, \ldots, x_m^{(n-1)}) - \varphi_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)\| <$$

$$< \varepsilon_k + a_{k1}\|x_1^{(n)} - \bar{x}_1\| + \ldots + a_{kk-1}\|x_{k-1}^{(n)} - \bar{x}_{k1}\| + a_{kk}\|x_k^{(n-1)} - \bar{x}_k\| +$$

$$+ \ldots + a_{km}\|x_m^{(n-1)} - \bar{x}_m\| < a_{k1}\varepsilon_1 + \ldots + a_{kk-1}\varepsilon_{k-1} + (a_{kk} + 1)\,\varepsilon_k +$$

$$+ a_{kk+1}\varepsilon_{k+1} + \ldots + a_{km}\varepsilon_m.$$

Alegînd:

$$\varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{1 + \sum\limits_{j=1}^{m} a_{kj}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

obţinem:

$$\|\bar{x}_k - \varphi_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)\| < \varepsilon \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

şi deoarece ε este un număr pozitiv oarecare rezultă:

$$\bar{x}_k = \varphi_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m), \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

prin urmare $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)$ formează o soluţie a sistemului (1).

Deci pornind de la un punct arbitrar $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ am fost conduşi la o soluţie $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)$ a ecuaţiei (1). Se pune problema dacă soluţia depinde sau nu de alegerea punctului iniţial. Vom arăta că nu.

Într-adevăr fie $(x_k'^{(n)})_{n \in N}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ şirul generat de metoda iterativă (2) pornind de la punctul iniţial $x'^{(0)} = (x_1'^{(0)}, x_2'^{(0)}, \ldots, x_n'^{(0)})$. Notînd $g_k^{(n)} = \|x_k^{(n)} - x_k'^{(n)}\|$ datorită condiţiei b) avem:

$$g_k^{(n)} \leqq a_{k1} g_1^{(n)} + a_{k2} g_2^{(n)} + \ldots + a_{kk-1} g_{k-1}^{(n)} + a_{kk} g_k^{(n-1)} + \ldots + a_{km} g_m^{(n)}$$

$$n \in \mathbf{N}; \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Deci $g_k^{(n)}$ verifică inegalităţile recurente (3). În virtutea lemelor 1) şi 2) într-un mod cu totul analog ca în demonstraţia punctului A) rezultă:

$$g_k^{(n)} \leqq c p^{n-1} z_{m-k+2} \cdot \ldots \cdot z_m$$

unde c, z_k; $h = 1, 2, \ldots, m$ şi p au aceeaşi semnificaţie ca în demonstraţia A).

Din faptul că $p < 1$ rezultă existența unui $N = N(\varepsilon)$

$$||x_k^{(n)} - x_k'^{(n)}|| < \varepsilon \qquad \text{pentru } n < N,$$

prin urmare șirurile $(x_k'^{(n)})_{n\in N}$ și $(x_k^{(n)})_{n\in N}$ au aceeași limită.

Pentru demonstrarea unicității soluției sistemului (1) vom proceda prin reducere la absurd. Fie $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \ldots, \bar{\bar{x}}_m)$ o soluție a sistemului (1) diferită de $\bar{x}$. Evident, conform celor de mai sus nu există nici un punct inițial astfel încît metoda iterativă (2) să conveargă către x. Fie $\{x_k^{(n)}\}_{n\in N}$ $k = 1, 2, \ldots, m$ șirurile corespunzătoare unei metode iterative de tipul (2). Datorită condiției b) avem:

$$||\bar{\bar{x}}_k - x_k^{(n)}|| = ||\varphi_k(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \ldots, \bar{\bar{x}}_m) - \varphi\,(x_1^{(n)}, \ldots, x_{k-1}^{(n)}, x_k^{n-1}, \ldots, x_m^{n-1})|| \leqq$$
$$\leqq a_{k1}||\bar{\bar{x}} - x_k^{(n)}|| + \ldots + a_{k\,k-1}||\bar{\bar{x}} - x_{k-1}^{(n)}|| + a_{kk}||\bar{\bar{x}}_k - x_k^{(n-1)}|| +$$
$$+ \ldots + a_{km}||\bar{\bar{x}}_m - x_m^{(n-1)}||.$$

Cu totul analog ca mai sus rezultă că:

$$\bar{\bar{x}}_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$$

Dar conform celor de mai sus orice metodă iterativă de tipul (2) conduce la aceeași soluție, prin urmare $\bar{\bar{x}}_k = \bar{x}_k$; $k = 1, 2, \ldots, m$ deci $\bar{\bar{x}} = \bar{x}$ ceea ce demonstrează unicitatea soluției sistemului (1).

Observații. Ecuația (5) are forma:

$$f(p) = p^m + A_1 p^{m-1} + A_2 p^{m-2} + \ldots + A_{m-1} p + A_m = 0, \tag{6}$$

unde A_k; $k = 1, 2, \ldots, m$ sînt funcții de a_{ij}; $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, m$. Ne propunem să găsim condițiile ce trebuie să le verifice A_k; $k = 1, 2, \ldots, m$ pentru ca ecuația $f(p) = 0$ să aibă toate rădăcinile în intervalul $]0, 1[$. Avem:

$$f(p) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(p-1) + \frac{f''(1)}{2!}(p-1)^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(1)}{m!}(p-1)^m. \tag{7}$$

Se știe că dacă toți coeficienții unei ecuații sînt de același semn ecuația respectivă nu admite nici o rădăcină pozitivă. De asemenea ecuația $f(p) = 0$ nu admite nici o rădăcină negativă dacă ecuația $f(-p) = 0$ nu admite nici o rădăcină pozitivă. Ecuația $f(p) = 0$ nu admite nici o rădăcină mai mare ca 1 dacă ecuația $f(1 + p) = 0$ nu admite nici o rădăcină pozitivă. Datorită acestor considerații și calculînd derivatele obținem

următoarele condiții pentru ca ecuația să admită toate rădăcinile reale în intervalul $]0, 1[$.

$$(-1)^k A_k > 0; \quad m^{[k]} + (m-1)^{[k]} A_1 + \ldots + k^{[k]} A_{m-k} > 0, \tag{8}$$
$$k = 0, 1, \ldots, m; \qquad A_0 = 1,$$

unde prin $x^{[l]}$ am notat produsul $x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-l+1)$.

În cazul cînd m este impar, deoarece o ecuație de grad impar trebuie să aibă cel puțin o rădăcină reală, ipotezele a), b), c) împreună cu condițiile (8) pot înlocui ipotezele teoremei.

Exemple. Cazul $m = 2$. În acest caz avem un sistem de două ecuații operaționale cu două elemente necunoscute:

$$\begin{cases} x = \varphi(x, y), \\ y = \psi(x, y). \end{cases} \tag{9}$$

Presupunem că operatorii $\varphi: X \times Y \to X$ și $\psi: X \times Y \to Y$ spații Banach verifică condițiile a), b), c) corespunzătoare cazului $m = 2$. Ecuația (6) este în acest caz:

$$p^2 - (a_{11} + a_{22} + a_{12}a_{21})p + a_{11}a_{22} = 0, \tag{10}$$

ecuație ce admite rădăcini reale și distincte.

Condițiile (8) revin la:

$$(1 - a_{11})(1 - a_{22}) < a_{12}a_{21}, \quad a_{11} + a_{22} + a_{12}a_{21} < 2, \tag{11}$$

regăsind rezultatul lui I. PĂVĂLOIU [3], [4].

Dacă se notează: $S_1 = a_{11} + a_{22} + a_{12}a_{21}$ și $S_2 = a_{11}a_{22}$ condițiile (11) se scriu sub forma:

$$S_1 < 2; \qquad 1 + S_2 < S_1. \tag{12}$$

Cazul $m = 3$. În acest caz avem un sistem de trei ecuații operaționale cu trei elemente necunoscute.

$$\begin{cases} x = \varphi(x, y, z) \\ y = \psi(x, y, z) \\ z = \chi(x, y, z), \end{cases} \tag{13}$$

unde operatorii:
$\varphi: X \times Y \times Z \to X$, $\psi: X \times Y \times Z \to Y$ şi $\chi: X \times Y \times Z \to Z$; X, Y, Z spaţii Banach verifică condiţiile a), b), c) corespunzătoare cazului $m = 3$. Ecuaţia (6) în acest caz devine:

$$p^3 - S_1 p^2 + S_2 p - S_3 = 0, \tag{14}$$

unde:

$$S_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32},$$
$$S_2 = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{33}a_{12}a_{21} + a_{22}a_{13}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{31},$$
$$S_3 = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Condiţiile (8) revin la:

$$\begin{aligned} &S_1 < 3, \\ &S_2 > 0, \\ &1 + S_2 > S_1 + S_3, \\ &3 + S_2 > 2S_1. \end{aligned} \tag{15}$$

Am găsit astfel condiţii simple care asigură convergenţa metodei iterative (2) corespunzător cazului sistemelor de trei ecuaţii operaţionale cu trei elemente necunoscute.

OBSERVATIONS SUR LA RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES À L'AIDE D'UN PROCÉDÉ ITÉRATIF DU TYPE GAUSS-SEIDEL

RÉSUMÉ

Dans ce travail nous nous sommes proposé de généraliser un résultat de I. PĂVĂLOIU [3], [4] sur la convergence d'une méthode itérative du type Gauss-Seidel appliqué à la résolution d'un système de deux équations opérationnelles. Nous considérons le système: $x_k = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, où $\varphi_k: \mathop{\times}\limits_{j=1}^{m} X_j \to X_k$, $i = 1, \ldots, m$, X_k étant des espaces de Banach $k = 1, \ldots, m$. Pour la résolution de ce système on considère la méthode itérative suivante:

$$x_{k+1}^{(n+1)} = \varphi_k(x_1^{(n+1)}, \ldots, x_{k-1}^{(n+1)}, x_k^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) \quad k = 1, \ldots, m$$

Dans l'hypothèse que les opérateurs φ_k vérifient des conditions du type Lipschitz, désignant par $(a_{ik})_{i,k=1,m}$ la matrice des constantes de Lipschitz $a_{ii} \neq 0$; $i = 1, \ldots, m$ une condition suffisante pour que la méthode présentée ci-dessus soit convergente vers la solution unique du système considéré est que l'équation algébrique de degré m

$$\det\,(a_{i1}\,p \ldots a_{i\,i+1}\,p \;\; a_{ii} - p \;\; a_{j+1} \ldots a_{i\,m})_{i=\overline{1,m}} = 0$$

ait une racine réelle, et que toutes les racines réelles appartiennent à l'intervalle $]0, 1[$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Marinescu, G., *Tratat de analiză funcţională*. Editura Academiei Republicii Socialiste România, 1970.

[2] Ostrovskii, A. N., *Reşenie uravnenii i sistem uravnenii*. Izd. inostr. lit. Moskva, 1963, 83–94.

[3] Păvăloiu, I., *Observaţii asupra rezolvării sistemelor de ecuaţii cu ajutorul procedeelor iterative*. Studii şi cercetări matematice, **19**, *9*, 1289–1298 (1967).

[4] — *La résolution des systèmes d'équations opérationnelles à l'aide des méthodes itératives*, Mathematica Cluj **11**(34), *1*, 137–141 (1969).

Primit la 15.II.1972.

Academia Republicii Socialiste România
Filiala din Cluj
Institutul de calcul