REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 1, Fascicola 2, 1972, pp. 125–131

RELAŢII ÎNTRE DIAMETRUL UNUI GRAF ŞI GRADELE NODURILOR GRAFULUI

de

FLORICA KRAMER
(Cluj)

În lucrare ne vom ocupa cu grafe $G = (X, U)$ finite, conexe, neorientate, fără bucle şi muchii multiple, X reprezentînd mulţimea nodurilor, iar U mulţimea muchiilor.

Notăm cu $g(x)$ gradul unui nod $x \in X$, cu $D(G)$ diametrul grafului $G = (X, U)$, iar cu $|X|$ cardinalul mulţimii X.

În 1965 J. W. MOON [3] stabileşte cîteva margini superioare pentru diametrul unui graf, impunînd condiţii asupra gradelor nodurilor grafului. În lucrarea [2] am determinat o margine superioară pentru diametrul unui graf impunînd condiţii asupra gradelor generalizate ale unui graf. Unul din rezultatele lui J. W. MOON este conţinut ca şi caz particular în [2] şi se enunţă sub forma următoare:

TEOREMA 1. *Dacă $G = (X, U)$ este un graf finit, conex, neorientat, fără bucle şi muchii multiple, astfel ca pentru oricare nod $x \in X$ să fie îndeplinită condiţia*

$$g(x) \geqslant \left[\frac{|X|}{h}\right], \tag{1}$$

unde h este un număr natural, $2 \leqslant h \leqslant \frac{|X| + 3}{3}$, atunci diametrul grafului satisface inegalitatea

$$D(G) \leqslant 3h - 4. \tag{2}$$

($[r]$ reprezintă partea întreagă a lui r).

Acest rezultat se poate extinde, impunînd condiții asupra sumei gra
delor a cîte două sau mai multe noduri distincte ale grafului. Rezultatu
obținut va conține ca și caz particular teorema 1 și caracterizează o clas
mai cuprinzătoare de grafe.

TEOREMA 2. *Fie $G = (X, U)$ un graf finit, conex, neorientat, fără bucl
și muchii multiple. Dacă pentru oricare k noduri distincte $x_1, x_2, \ldots x_k$,
din X este îndeplinită condiția*

(3)
$$\sum_{i=1}^{k} g(x_i) \geqslant k\left[\frac{|X|}{h}\right],$$

*unde h este un număr natural, $2 \leqslant h \leqslant \frac{|X|+3}{3}$, atunci diametrul grafulu
satisface inegalitatea*

(4)
$$D(G) \leqslant 3h - 4.$$

Demonstrație. Presupunem $D(G) > 3h - 4$. Atunci există în X două
noduri x_1 și x_{3h-2}, în așa fel încît distanța dintre aceste noduri să fie
$d(x_1, x_{3h-2}) = 3h - 3$.

Fie $W = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{3h-3}, x_{3h-2})\}$ unul dintre cele mai
scurte drumuri între nodurile x_1 și x_{3h-2}. Considerăm următoarele mulțimi
de noduri:

$$C_i = \{x | x \in X,\ d(x, x_{3i-2}) \leqslant 1\} \quad i = 1, 2, \ldots, h.$$

Se poate arăta ușor că aceste mulțimi sînt două cîte două disjuncte.
Presupunem contrariul și anume fie i și j, $1 \leqslant i < j \leqslant h$, doi indici pentru
care $C_i \cap C_j \neq \varnothing$. Atunci există un nod x care aparține intersecției și
de aici rezultă $d(x_{3i-2}, x_{3j-2}) \leqslant 2$. Pe de altă parte în W, care era unul
dintre cele mai scurte drumuri între x_1 și x_{3h-2}, avem $d(x_{3i-2}, x_{3j-2}) \geqslant 3$.
Am ajuns prin urmare la o contradicție, ceea ce demonstrează că pentru
$i \neq j$ are loc relația

(5)
$$C_i \cap C_j = \varnothing.$$

Fie $C_{i_1} \cup C_{i_2} \cup \ldots \cup C_{i_k}$ reunirea a oricăror k mulțimi de tip C_i. Bazîndu-ne pe relația (5) și ținînd cont că pe baza ipotezei avem relația

$$\sum_{j=1}^{k} g(x_{3i_j-2}) \geqslant k\left[\frac{|X|}{h}\right],$$

în care $x_{3i_j-2} \in C_{i_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, rezultă că

(6)
$$|C_{i_1} \cup C_{i_2} \cup \ldots \cup C_{i_k}| \geqslant k\left[\frac{|X|}{h}\right] + k.$$

Dacă considerăm toate reuniunile posibile de k mulțimi, numărul acestor reuniuni este $\binom{h}{k}$ și fiecare mulțime C_i, $i = 1, 2, \ldots, h$, apare de $\binom{h-1}{k-1}$ ori. Evaluînd acum numărul nodurilor grafului obținem

$$|X| \geqslant \frac{\binom{h}{k}}{\binom{h-1}{k-1}}\left(k\left[\frac{|X|}{h}\right] + k\right) = \frac{h!}{k!(h-k)!} \cdot \frac{(k-1)!\,(h-k)!}{(h-1)!} \cdot k\left(\left[\frac{|X|}{h}\right] + 1\right) =$$

$$= h\left(\left[\frac{|X|}{h}\right] + 1\right) > |X|,$$

ceea ce este deasemenea o contradicție, din care rezultă veridicitatea teoremei.

Se poate arăta pe exemple, că în ipotezele făcute, delimitarea dată pentru diametru este cea mai bună, adică există grafe al căror diametru este egal cu marginea superioară.

Exemplu. Graful din figura 1 ilustrează observația de mai sus pentru cazul cînd $k = 2$. Pentru acest graf $|X| = 13$, $g(x_1) = 3$, $g(x_i) \geqslant 5$ pentru $i = 2, 3, \ldots, 13$.

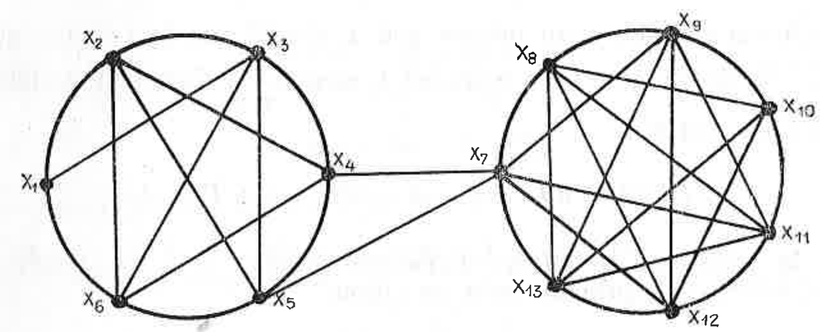

Fig. 1.

Se observă ușor că oricare ar fi x_i și x_j distincte, are loc relația $g(x_i) + g(x_j) \geqslant 8$. Prin urmare dacă luăm $h = 3$ sînt îndeplinite ipotezele teoremei și se constată că diametrul este chiar $D(G) = 5$, adică $D(G) = 3h - 4$ pentru $h = 3$.

Teorema următoare caracterizează grafele pentru care marginea superioară a diametrului, mai sus găsită poate fi îmbunătățită.

TEOREMA 3. *Fie $G = (X, U)$ un graf finit, conex, neorientat, fără bucle sau muchii multiple, astfel ca pentru oricare două noduri distincte x și y din X să fie îndeplinită condiția*

(7)
$$g(x) + g(y) \geqslant 2 \cdot \left[\frac{|X|}{h}\right],$$

unde h este un număr natural, $2 < h \leqslant \left[\frac{|X|+3}{3}\right]$. *Dacă există un nod* x_0 *di[n]* X *pentru care* $g(x_0) = 1$, *atunci diametrul grafului satisface inegalitate[a]*

(8) $$D(G) \leqslant 3(h - s - 1) \quad \text{cu condiția}$$

(9) $$s < \frac{hq - h + 2}{2q} \quad \text{și} \quad q = \left[\frac{|X|}{h}\right].$$

Demonstrație. Dacă există un nod $x_0 \in X$ cu $g(x_0) = 1$ rezultă c[ă] pentru oricare nod $x \in X$ și $x \neq x_0$ avem $g(x) \geqslant 2\left[\frac{|X|}{h}\right] - 1$. Formăm graful $G^* = G - x_0$. Graful astfel obținut are $(|X| - 1)$ noduri și fiecar[e] nod x al său are gradul $g(x) \geqslant 2\left[\frac{|X|}{h}\right] - 1$. Dacă reușim să arătăm inega[-]litatea

(10) $$2\left[\frac{|X|}{h}\right] - 1 \geqslant \left[\frac{|X| - 1}{h - s}\right],$$

atunci înseamnă că pentru oricare nod x din G^* are loc relația $g(x) \geqslant \left[\frac{|X| - 1}{h-s}\right]$, de unde pe baza teoremei 1, rezultă că diametrul grafului G^* satisface inegalitatea

$$D(G^*) \leqslant 3(h - s) - 4 = 3(h - s - 1) - 1.$$

Avînd în vedere relația dintre diametrele grafelor G și G^* și anume că $D(G) \leqslant D(G^*) + 1$, prin înlocuire se obține

$$D(G) \leqslant 3(h - s - 1).$$

Rămîne să demonstrăm acum inegalitatea (10). Fie

(11) $$|X| = q \cdot h + r_0, \quad 0 \leqslant r_0 < h.$$

Primul membru al inegalității (10) devine $2q - 1$. Să evaluăm membrul al doilea. Din egalitățile

$$|X| - 1 = q \cdot h + r_0 - 1 = q(h - s) + qs + r_0 - 1, \text{ rezultă}$$

$$\frac{|X| - 1}{h - s} = q + \frac{q \cdot s + r_0 - 1}{h - s} \quad \text{și} \quad \left[\frac{|X| - 1}{h - s}\right] = q + \left[\frac{qs + r_0 - 1}{h - s}\right].$$

Prin urmare a demonstra inegalitatea (10) revine la a demonstra inegalitatea:

(12) $$q - 1 \geqslant \left[\frac{qs + r_0 - 1}{h - s}\right].$$

Această inegalitate este echivalentă cu inegalitatea

$$q - 1 > \left[\frac{qs + r_0 - 1}{h - s}\right] - 1, \text{ care rezultă din}$$

$$q - 1 > \frac{qs + r_0 - 1}{h - s} - 1 \quad \text{sau} \quad q - 1 > \frac{qs + r_0 - 1 - h + s}{h - s}$$

care la rîndul lor rezultă din

(13) $$q - 1 > \frac{sq + s - 2}{h - s},$$

datorită faptului că $r_0 - h + 1 \leqslant 0$ din (11). Deoarece din condiția (9) rezultă $h - s > 0$, inegalitatea (13) este echivalentă cu inegalitățile

$$(q - 1)(h - s) > sq + s - 2,$$
$$hq - sq - h + s > sq + s - 2,$$
$$2sq < hq - h + 2,$$

care se obțin imediat din condiția (9).

C o r o l a r 1. *În ipotezele teoremei* 3, *diametrul grafului* $G = (X, U)$ *satisface totdeauna inegalitatea*

$$D(G) \leqslant 3h - 6.$$

Demonstrația este imediată, deoarece pentru $s = 1$ condiția (9) este totdeauna adevărată avînd în vedere că din ipoteze rezultă $q > 1$ și $h > 2$.

TEOREMA 4. *Dacă* $G = (X, U)$ *este un graf finit conex, neorientat fără bucle și muchii multiple, și*

(12) $$h = \min_{x \in X_{\mathfrak{A}}} g(x)$$

atunci diametrul său satisface inegalitatea

$$D(G) \leqslant 3\left[\frac{|X|}{h + 1}\right] - 1.$$

Demonstrație. Există totdeauna un cel mai mic număr natural astfel ca

(13) $$\left[\frac{|X|}{h}\right] \leqslant k.$$

Atunci avem indeplinită inegalitatea $g(x) \geqslant \left[\frac{|X|}{h}\right]$ care implică

(14) $$D(G) \leqslant 3h - 4$$

Explicităm pe h din (13) în felul următor

$$\left[\frac{|X|}{h}\right] - 1 < k \Rightarrow \frac{|X|}{h} - 1 < k \Rightarrow$$

$$\frac{|X|}{h} < k + 1 \text{ de unde}$$

$$h > \frac{|X|}{k+1}.$$

Pentru că ne interesează cel mai mic h, luăm

$$h = \left[\frac{|X|}{k+1}\right] + 1.$$

Înlocuind pe h în (14) obținem concluzia teoremei 4.

BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEM DIAMETER EINES GRAPHEN UND DEN GRADEN DER KNOTENPUNKTE DES GRAPHEN

ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit werden obere Schranken für den Diameter eines Graphen in Abhängigkeit von den Graden seiner Knotenpunkte erhalten. Es sei $G = (X, U)$ ein ungerichteter, endlicher, zusammenhängender, schlingenloser Graph ohne Mehrfachkanten, derart dass für je k voneinander verschiedene Knotenpunkte $x_1, x_2, \ldots, x_k$ aus X die Ungleichung $\sum_{i=1}^{k} g(x_i) \geqslant k\left[\frac{|X|}{h}\right]$ gilt, wobei h eine natürliche Zahl ist, $2 \leqslant h \leqslant \frac{|X| + 3}{3}$. Dann gilt

für den Diameter $D(G)$ des Graphen G die Ungleichung $D(G) \leqslant 3h - 4$. Anhand eines Beispieles wird gezeigt, dass die so erhaltene obere Schranke für den Diameter eines Graphen genau ist. Es werden auch andere Fälle untersucht, in welchen unter zusätzlichen Voraussetzungen die obere Schranke verbessert werden kann.

BIBLIOGRAFIE

1. Berge, C., *Graphes et Hypergraphes*. Dunod, Paris, 1970.
2. Kramer, F., Kramer, H., *Schranken für den Diameter eines Graphen*. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **5**, *3–4*, 283–288 (1970).
3. Moon, J. W., *On the diameter of a graph*. The Michigan Mathematical Journal, **12**, *3*, 349–351 (1965).

Primit la 8. III. 1972.

Academia Republicii Socialiste România
Filiala din Cluj
Institutul de calcul