REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 1, Fascicola 2, 1972, pp. 199—209

CERCETĂRI PRIVIND PROBLEMA TRANSPORTULUI, I

de

PAUL NEY
(Cluj)

Lucrarea de faţă încearcă să grupeze unele probleme legate de teoria problemei de transport, în jurul noţiunii de *nul-matrice*, folosindu-se o formulare matricială. Lucrarea se bazează pe ideea că nul-matricile au un caracter invariant faţă de restricţiile problemei de transport.

§ 1. Preliminarii

1.1. *Notaţii.*

Se va nota cu $\mathcal{M}(m,n)$ mulţimea matricilor cu m linii şi n coloane, cu $\mathcal{M}(\overset{+}{m},n)$ mulţimea matricilor de tipul (m,n) cu elemente pozitive, cu $\mathcal{M}(\overset{-}{m},n)$ mulţimea matricilor de tipul (m,n) cu elemnte negative, cu $\mathcal{M}(\overset{+,0}{m},n)$ mulţimea matricilor de tipul (m,n) cu elemente nenegative, cu $\mathcal{M}(\overset{-,0}{m},n)$ mulţimea matricilor de tipul (m,n) cu elemente nepozitive, cu $\mathcal{M}^0$ mulţimea tuturor matricilor cu toate elemente 0 (indiferent de tipul matricei). Evident, mulţimile $\mathcal{M}(\overset{+}{m},n)$, $\mathcal{M}(\overset{-}{m},n)$, $\mathcal{M}(\overset{+,0}{m},n)$ şi $\mathcal{M}(\overset{-,0}{m},n)$ sînt incluse în $\mathcal{M}(m,n)$.

Fie $A = ||a_{ij}||_{m,n}$ şi $B = ||b_{ij}||_{m,n}$ două matrici din $\mathcal{M}(m,n)$. Se va nota cu $A * B$ produsul pe componente al lui A cu B:

$$A * B = ||a_{ij} \cdot b_{ij}||_{m,n}$$

Se va nota cu $(A|B)$ produsul scalar al matricilor A şi B.

$$(A|B) = \sum_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} a_{ij}b_{ij}.$$

Matricea a cărei componente sînt toate egale cu x se va nota: $\mathbf{x}$. Astfel $\mathbf{1}$ este matricea $||1||_{m,n}$, iar $\mathbf{0}$ este matricea $||0||_{m,n}$.

Semnul ■ va simboliza sfîrşitul unei demonstraţii.

1. 2. *Doi operatori de comprimare.*

Definiţia 1.2.1. *Se numeşte „coloană de A" matricea*

$$\mathcal{C}(A) = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\|_{m,1}$$

Se numeşte „linie de A" matricea $\mathcal{L}(A) = \left\| \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right\|_{1,n}$, $(A = ||a_{ij}||_{m,n})$.

Propoziţia 1.2.1. *Au loc egalităţile:*

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}(A)) = \mathcal{C}(\mathcal{L}(A)) = ||(A|\mathbf{1})||_{11}$$

Propoziţia 1.2.2. *Operatorii $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{C}$ sînt liniari.*

În cele ce urmează vom introduce o relaţie de echivalenţă în mulţimea matricilor de acelaşi tip (m, n).

Definiţia 1.2.2. *Fie A, $B \in \mathcal{M}(m, n)$. A este echivalent cu B dacă şi numai dacă* $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$ şi $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$.

Notăm în acest caz $A \sim B$.

Propoziţia 1.2.3. *Relaţia „$\sim$" definită prin definiţia* 1.2.2. *este o relaţie de echivalenţă.*

Demonstraţia este imediată. ■

Clasa de echivalenţă a matricei A se va nota cu $\tilde{A}$.

Propoziţia 1.2.4. *Fie* $A = ||a_{ij}||_{m,n}$ *şi* $B = ||b_{ij}||_{m,n}$. *Are loc formula*

$$(A|B) = (A_1|B_1) + b(A_1|\mathbf{1}) + a(B_1 \mid \mathbf{1}) + a \cdot b \cdot m \cdot n,$$

unde

$$a = \min_{i,j} a_{ij}, \quad b = \min_{i,j} b_{ij}, \quad A_1 = A - \mathbf{a}, \quad B_1 = B - \mathbf{b}.$$

Demonstraţia se scrie

$$(A|B) = (A_1 + \mathbf{a}|B_1 + \mathbf{b}) = (A_1|B_1) + (\mathbf{b}|A_1) + (\mathbf{a}|B_1) + (\mathbf{a}|\mathbf{b}) = \\ = (A_1|B_1) + b(A_1|\mathbf{1}) + a(B_1|\mathbf{1}) + abmn. \ ■$$

1.3. *Nul-matrice*

Definiţia 1.3.1. *Fie $A \in \mathcal{M}(m,n)$. A se numeşte nul-matrice dacă au loc relaţiile:*

$$\mathcal{L}(A) \in \mathcal{M}^0, \ \mathcal{C}(A) \in \mathcal{M}^0$$

Vom nota $\Theta(m,n) = \{\theta | \theta \in \mathcal{M}(m,n),\ \mathcal{C}(\theta) \in \mathcal{M}^0, \mathcal{L}(\theta) \in \mathcal{M}^0\}$

Propoziţia 1.3.1. *Dacă θ este o nul-matrice, atunci* $(\theta|\mathbf{1}) = 0$.

Demonstraţia se reduce la aplicarea propoziţiei 1.2.1. ■

Propoziţia 1.3.2. *Fie A, $B \in \tilde{M}$. Atunci $A - B$ şi $B - A$ sînt nul-matrici.*

Demonstraţia $\mathcal{C}(A - B) = \mathcal{C}(A) - \mathcal{C}(B) \in \mathcal{M}^0$ şi $\mathcal{L}(A - B) = \mathcal{L}(A) - \mathcal{L}(B) \in \mathcal{M}^0$.

Propoziţia 1.3.3. *Fie A, $B \in \tilde{M}$. Atunci există θ_A, θ_B două nul-matrici astfel ca $A + \theta_A = B$ şi $B + \theta_B = A$.*

Propoziţia 1.3.4. *$\Theta(m, n)$ este un spaţiu vectorial peste corpul* $\mathbf{R}$ *al numerelor reale.*

Demonstraţie. Se pot verifica axiomele spaţiului vectorial $\Theta(m, n)$ este închis în raport cu operaţia de înmulţire cu scalari din $\mathbf{R}$ şi astfel orice combinaţie liniară din $\Theta(m,n)$ aparţine lui $\Theta(m,n)$.

Elementul nul al lui $\Theta(m,n)$ este 0 iar inversa nul-matricei θ este $-1 \cdot \theta$. ■

Vom construi un şir particular de nul-matrici $(M_k)_{k=\overline{1,r}}$ unde $r = (m-1)(n-1)$, k se va scrie sub forma $k = (p-1)(n-1) + q$ unde $p = \overline{1, m-1}$ şi $q = \overline{1, n-1}$. Definim astfel matricea M_k:

$$M_k = M_{(p-1)(k-1)+q} = ||\delta_i^p \delta_j^q - \delta_i^p \delta_j^{q+1} - \delta_i^{p+1} \delta_j^q + \delta_i^{p+1} \delta_j^{q+1}||_{m,n} \tag{1}$$

unde δ_u^v este simbolul lui Kronecker $\delta_u^v = \begin{cases} 1 & u = v \\ 0 & u \neq v. \end{cases}$

Propoziţia 1.3.5. *Matricile* (1), *pentru $k = \overline{1, r}$ formează o bază pentru spaţiul $\Theta(m,n)$.*

Demonstrație. Vom arăta că o combinație liniară

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k M_k \tag{2}$$

este egală cu 0 dacă și numai dacă avem $\alpha_k = 0$ pentru $k = \overline{1, r}$. Termenul general al matricei (2) este dat de

$$t_{ij} = \sum_{\substack{p=\overline{1,m-1}\\ q=\overline{1,n-1}}} \alpha_{(p-1)(n-1)+q}(\delta_i^p\delta_j^q - \delta_i^p\delta_i^{q+1} - \delta_i^{p+1}\delta_j^q + \delta_i^{q+1}\delta_j^{q+1}) \tag{3}$$

Vom avea termeni diferiți de 0 în însumarea (3) numai în cazurile:

$$p = i,\ q = j;\quad p = i,\ q = j - 1;\quad p = i - 1,\ q = j;$$

$$p = i - 1,\quad q = j - 1,$$

deci obținem:

$$t_{ij} = \alpha_{(i-1)(n-1)+j} - \alpha_{(i-1)(n-1)+j-1} - \alpha_{(i-2)(n-2)+j} + \alpha_{(i-2)(n-1)+j-1} \tag{4}$$

unde $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Acolo unde apare $p < 0$ sau $q = 0$ se consideră

$$\alpha_{(p-1)(n-1)+q} = 0.$$

Dacă $\alpha_k = 0$ pentru $k = \overline{1, r}$ atunci evident (2) este egală cu 0. Invers, vom arăta prin inducție că $t_{ij} = 0\ \forall i,j$ implică $\alpha_k = 0\ \forall k$.

Are loc $\alpha_1 = \alpha_{0(n-1)+1} = t_{11} = 0.$

Presupunem că toți α_k pînă la α_l sînt egali cu 0; vom arăta că și $\alpha_{l+1} = 0$. Fie $l = (u - 1)(n - 1) + v$

$$l + 1 = \begin{cases} (u-1)(n-1) + v + 1 & \text{dacă } 1 \leqslant v < n - 1 \\ u(n-1) + 1 & \text{dacă } v = n - 1. \end{cases}$$

$t_{u,\, v+1} = 0$ implică

$$\alpha_{(u-1)(n-1)+v+1} - \alpha_{(u-1)(n-1)+v} - \alpha_{(u-1)(n-1)+v} + \alpha_{(u-2)(n-1)+v-1} = 0. \tag{5}$$

Ultimii 3 termeni din egalitatea de mai sus sînt 0, căci fac parte din șirul (α_k) $k = \overline{1, l}$, deci $\alpha_{l+1} = 0$ pentru $1 \leqslant v < n - 1$.

$t_{u+1,\, v} = 0$ implică

$$\alpha_{u(n-1)+1} - \alpha_{u(n-1)+0} - \alpha_{u(n-1)+0} + \alpha_{(u-1)(n-1)-1} = 0. \tag{6}$$

Ultimii 3 termeni din (6) fiind nuli, rezultă $\alpha_{l+1} = 0$ pentru $v = n - 1$.

Fie $\theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \dots & \theta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \theta_{m1} & \dots & \theta_{mn} \end{bmatrix}$ o nul-matrice. Coeficienții α_k ai dezvoltării lui θ după $M_1, \dots, M_r$ se obțin în felul următor: Dacă notăm $(M)|_{(p,q)}$ elementul de pe linia p și coloana q a matricei M, atunci

$$\alpha_k = \alpha_{(p-1)(n-1)+q} = \left(\theta - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i M_i\right)\Big|_{(p,q)} \tag{7}$$

Această dezvoltare este unică.

O b s e r v a ț i a 1.3.1. Menționăm (fără demonstrație) faptul că $A, B \in \Theta(m,n)$ implică $A \cdot B \in \Theta(m, n)$.

1.4. *Probleme de calcul*

a) *Fiind dată o matrice* $M \in \overset{+,0}{\mathcal{M}}(m,n)$, *să se determine o nul-matrice* θ *astfel ca* $M + \theta \in \overset{+,0}{\mathcal{M}}(m,n)$

(8) Notăm $\Sigma(M) = \{\theta | \theta \in \Theta(m, n),\ M + \theta \in \overset{+,0}{\mathcal{M}}(m,n)\}$

b) *Fiind dată o matrice* $M \in \overset{+}{\mathcal{M}}(m, n)$, *să se determine o nul-matrice astfel ca să se realizeze una din relațiile*

$$(\theta|M) > 0,\quad (\theta|M) = 0,\quad (\theta|M) < 0.$$

Introducem notațiile

$$\begin{aligned} \Sigma^+(M) &= \{\theta|\theta \in \Theta(m,n),\ (\theta|M) > 0\} \\ \Sigma^\circ(M) &= \{\theta|\theta \in \Theta(m,n),\ (\theta|M) = 0\} \\ \Sigma^-(M) &= \{\theta|\theta \in \Theta(m,n),\ (\theta|M) < 0\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Evident $\Sigma^+(M) \cup \Sigma^\circ(M) \cup \Sigma^-(M) = \Theta(m,n)$.

P r o p o z i ţ i a 1.4.1. *$\Sigma^\circ(M)$ este un subspaţiu vectorial al lui $\Theta(m,n)$.*

Demonstraţie. Este evident, căci $\Sigma^\circ(M)$ este mulţimea zerourilor funcţionalei liniare $f(x) = (X|M)$ unde $X \in \Theta(m,n)$ ■.

P r o p o z i ţ i a 1.4.2. *Au loc afirmaţiile:*

1. *$\Sigma^+(M)$ şi $\Sigma^-(M)$ sînt închise faţă de operaţia de adunare şi înmulţire cu scalari pozitivi.*

2. *dacă $\theta \in \Sigma^+(M)$ atunci $(-\theta) \in \Sigma^-(M)$.*

2.1. *F u n c ţ i o n a l a „T"*

Se consideră produsul cartezian

$$\overset{+}{\mathcal{M}}(m,n) \times \overset{+}{\mathcal{M}}(m,n) \times \overset{+}{\mathcal{M}}(m,n) \tag{10}$$

Fiecărui triplet (M_1, M_2, M_3) din (10), astfel că $\mathcal{L}(M_2) = \mathcal{L}(M_3)$ îi corespunde o problemă de transport şi invers. M_1 corespunde matricii costurilor — o, vom nota cu C, M_2 corespunde matricii necesarului — o vom nota cu N, iar M_3 corespunde matricii disponibilului — o vom nota cu D. X este o soluţie oarecare a problemei de transport dacă $\mathcal{L}(X) = D$, $\mathcal{C}(X) = N$.

Vom nota cu $\mathcal{T}(m,n)$ mulţimea tripletelor (M_1, M_2, M_3) din (10) pentru care $\mathcal{L}(M_2) = \mathcal{C}(M_3)$.

Fie $(C, N, D) \in \mathcal{T}(m, n)$. Ataşat acestui triplet vom defini o funcţie notată $T(C, N, D; X)$. Domeniul de definiţie al acestei funcţii va fi mulţimea $\{X | X \in \overset{+}{\mathcal{M}}(m,n),\ \mathcal{C}(X) = N,\ \mathcal{L}(X) = D\}$ iar domeniul valorilor va fi mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale. Valoarea funcţiei pentru X din domeniul de definiţie va fi $T(C, N, D; X) = (C|X)$. Această funcţie este tocmai funcţia de scop a problemei de transport reprezentate prin tripletul (C, N, D).

Fie α, β, γ şi δ numere nenegative.

P r o p o z i ţ i a 2.1.1. *Dacă (C_1, N_1, D_1), $(C_2, N_2, D_2) \in \mathcal{T}(m,n)$ atunci tripletul*

$$(\alpha C_1 + \beta C_2,\ \gamma N_1 + \delta N_2,\ \gamma D_1 + \delta D_2) \text{ aparţine lui } \mathcal{T}(m,n). \tag{11}$$

Dacă X_1, X_2 sînt soluţii ale problemelor de transport (C_1, N_1, D_1) respectiv (C_2, N_2, D_2) atunci $\gamma X_1 + \delta X_2$ va fi soluţie pentru problema (11).

Demonstraţie. Vom arăta că $\mathcal{L}(\gamma N_1 + \delta N_2) = \mathcal{C}(\gamma D_1 + \delta D_2)$

$$\mathcal{L}(\gamma N_1 + \delta N_2) = \gamma \mathcal{L}(N_1) + \delta \mathcal{L}(N_2) = \gamma \mathcal{C}(D_1) + \delta \mathcal{C}(D_2) =$$
$$= \mathcal{C}(\gamma D_1 + \delta D_2)$$

Privitor la $\gamma X_1 + \delta X_2$ are loc

$$\mathcal{L}(\gamma X_1 + \delta X_2) = \gamma D_1 + \delta D_2 \quad \mathcal{C}(\gamma X_1 + \delta X_2) = \gamma N_1 + \delta N_2.$$

D e f i n i ţ i a 2.1.1. *Un cuadruplu (C, N, D, X) se va numi cuadruplu compatibil dacă $(C, N, D) \in \mathcal{T}(m, n)$ şi $\mathcal{L}(X) = N$, $\mathcal{C}(X) = D$.*

D e f i n i ţ i a 2.1.2. *Fie (C, N, D, X) un cuadruplu compatibil. Se numeşte soluţie optimală a problemei (C, N, D), un element $S \in \tilde{X}$ astfel încît să aibă loc*

$$T(C, N, D; S) = \min_{X \in \tilde{X}} T(C, N, D; X). \tag{12}$$

Dacă $(C|X) > (C|Y)$, spunem că Y este o soluţie mai bună decît X.

2.2. P r o b l e m e d e t r a n s p o r t î n r u d i t e.

D e f i n i ţ i a 2.2.1. *Cuadruplul (C, N, D, X) este înrudit cu (C_1, N_1, D_1, X_1) dacă*

$$C = \lambda C_1 \quad N = \mu N_1 \quad D = \mu D_1 \quad (\lambda > 0;\ \mu > 0)$$

Mulţimea cuadruplelor înrudite se notează cu $[C, N, D]$.

P r o p o z i ţ i a 2.2.1. *Au loc relaţiile*

$$T\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i,\ N,\ D;\ X\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i T(C_i, N, D; X)$$

$$T\left(C, \sum_{i=1}^{q} \mu_i N_i, \sum_{i=1}^{q} \mu_i D_i; \sum_{i=1}^{q} \mu_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{q} \mu_i T(C, N_i, D_i; X_i)$$

unde $(C_i, N, D, X) \in [C_i, N, D]$ $i = \overline{1, p}$ *şi* $(C, N_i, D_i, X_i) \in$
$\in [C, N_i, D_i]$ $i = \overline{1, q}$.

Fie acum (C, N, D, X) şi (C, N', D', X') două cuadruple compatibile

$$N = \|n_{i1}\|_{m,1}, \quad N' = \|n'_{i1}\|_{m,1}, \quad D = \|d_{1j}\|_{1,n}, \quad D' = \|d'_{1j}\|_{1,n},$$
$$X = \|x_{ij}\|_{mn}, \quad X' = \|x'_{ij}\|_{m,n}.$$

Notăm

$$\alpha = \min\left(\min_i \frac{n'_{i1}}{n_{i1}},\ \min_j \frac{d'_{1j}}{d_{1j}},\ \min_{i,j} \frac{x'_{ij}}{x_{ij}}\right) \text{ și}$$

$$N_1 = \alpha N,\ D'_1 = \alpha D,\ X'_1 = \alpha X,\ N'_2 = N' - N'_1,\ D'_2 = D' - D'_1,$$
$$X'_2 = X' - X'_1.$$

Cu aceste notații, se poate enunța

P r o p o z i ț i a 2.2.2. *Are loc relația*

$$T(C,\ N + N',\ D + D';\ X + X') = (1 + \alpha)\ T(C,\ N,\ D,\ X) +$$
$$+\ T(C,\ N'_2,\ D'_2;\ X'_2).$$

Demonstrație.

$T(C, N + N', D + D';\ X + X') = T(C, N + \alpha N + N'_2,\ D + \alpha D + D'_2,$ $X + \alpha X + X'_2) = T(C, (1 + \alpha)N + N'_2, (1 + \alpha)\ D + D'_2,\ (1 + \alpha)\ X + X'_2)$ tot așa $\mathscr{L}(X'_2) = D'_2$ și $\mathscr{C}(X'_2) = N'_2$. ■

Asemănător celor de mai sus, considerăm (C, N, D, X) și (C', N, D, X) cuadruple compatibile $C = ||c_{ij}||_{mn}$, $C' = ||c'_{ij}||_{m,n}$.

Notăm $$\alpha = \min_{i,j} \frac{s'_{ij}}{c_{ji}},\ C'_1 = \alpha C,\ C'_2 = C' - C'_1.$$

Cu aceste notații se poate enunța

P r o p o z i ț i a 2.2.3. *Are loc*

$$T(C + C',\ N,\ D;\ X) = T((1 + \alpha)\ C,\ N,\ D;\ X) + T(C'_2,\ N,\ D;\ X).$$

Demonstrație.

$$T(C + C',\ N,\ D,\ X) = T(C + \alpha C + C'_2,\ N,\ D;\ X) =$$
$$= T((1 + \alpha)\ C,\ N,\ D;\ X) + T(C'_2,\ N,\ D;\ X)\ ■$$

§ 3. Nul-matrici și soluțiile optimale

3.1. P r o p o z i ț i i d e e x i s t e n ț ă.

Fie $(C,\ N,\ D) \in \mathcal{T}(m,n)$ și X astfel că $\mathscr{L}(X) = D$, $\mathscr{C}(X) = N$. Se vor folosi mulțimile (8) și (9).

P r o p o z i ț i a 3.1.1. *Dacă* $\theta \in \Sigma^-(C) \cap \Sigma(X)$ *atunci* $Y = X + \theta$ *este o soluție îmbunătățită.*

Demonstrație. $\theta \in \Sigma(X)$ deci $X + \theta \in X$, $\theta \in \Sigma(C)$ implică $(X + \theta|C) = (X|C) + (\theta|C) < X|C)$ ■

P r o p o z i ț i a 3.1.2. *În* $\Sigma^-(C) \cap \Sigma(X)$ *există cel puțin o nul-matrice* θ *astfel ca* $S = X + \theta$ *să fie o soluție optimală.*

Demonstrație. $\theta = S - X \in \Sigma(X)$ și întrucît $(S|C) < (X|C)$ rezultă că $S - X \in \Sigma^-(C)$ ■

P r o p o z i ț i a 3.1.3. *Fie* S *o soluție optimală; fiecărei nul-matrici din* $\Sigma(S) \cup \Sigma^\circ(C)$ *îi corespunde o soluție optimală și invers.*

Demonstrație. Fie $\theta \in \Sigma(S) \cap \Sigma^\circ(C)$ atunci $S + \theta$ este o soluție optimală, căci $(C|S + \theta) = (C|S) + (C|\theta) = (C|S)$. S își corespunde prin matricea 0, $S + 0 = S$. ■

P r o p o z i ț i a 3.1.4. *Fie* S *o soluție optimală și* $\alpha > 0$, *atunci*

$$T(\alpha C,\ N,\ D;\ S) = \alpha T(C,\ N,\ D,\ S),$$

adică S *este soluție optimală atît pentru* $(C,\ N,\ D)$ *cît și pentru* $(\alpha C,\ N,\ D)$.

Demonstrație. Egalitatea $(\alpha C|X) = \alpha(C|X)$ implică rezultatul de mai sus. ■

3.2. O r e f o r m u l a r e a p r o b l e m e i d e t r a n s p o r t

Fie $(C,\ N,\ D) \in \mathcal{T}(m,\ n)$ și X astfel că $\mathscr{L}(X) = D$, $\mathscr{C}(X) = N$. Nul-matricea θ astfel că $X + \theta = S$ este o soluție optimală se exprimă astfel:

$$\theta = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i M_i \tag{13}$$

θ fiind încă o necunoscută, λ_i se vor considera necunoscute.

P r o p o z i ț i a 3.2.1. *Are loc egalitatea*

$$\min_{X \in \tilde{X}} T(C,\ N,\ D;\ X) = \min_{\theta \in \Sigma(X)} T(C,\ N,\ D;\ X + \theta).$$

Demonstrația este o consecință a propoziției 3.1.2. În baza acestei propoziții putem enunța astfel problema de transport:

Dîndu-se $(C,\ N,\ D) \in \mathcal{T}(m,\ n)$ *și* X *astfel că* $\mathscr{L}(X) = D$ și $\mathscr{C}(N) = N$ *să se determine* θ^* *astfel ca:*

$$(C|\theta^*) = \min_{\theta \in \Sigma(X)} (C|\theta) \tag{14}$$

Fie $\theta = ||\theta_{ij}||_{mn}$, $X = ||x_{ij}||_{m,n}$; $\theta + X \in \mathcal{M}^{+,0}_{(m,n)}$

înseamnă analitic

$$x_{ij} + \theta_{ij} \geqslant 0 \quad (\forall i, j). \tag{15}$$

Înlocuind pe θ în (14) cu exprimarea (13) se obține

$$(C|\theta) = \left(C \,\middle|\, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i M_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (C|M_i). \tag{16}$$

Considerînd λ_i variabile oarecare se va cere minimizarea expresiei

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \xi_i \quad (\text{unde } \xi_i = (C/M_i))$$

ținînd cont de restricțiile (15).

În restricțiile (15) se poate înlocui θ_{ij} prin

$$\theta_{ij} = \lambda_{(i-2)(n-1)+j-1} - \lambda_{(i-2)(n-1)+j} + \lambda_{(i-1)(n-1)+j-1} - \lambda_{(i-1)(n-1)+j} \tag{17}$$

în baza considerentelor din paragraful 1 și astfel restricțiile se transcriu asupra lui λ_k $k = \overline{1, r}$:

$$x_{ij} + \lambda_{(i-2)(n-1)+j-1} - \lambda_{(i-2)(n-1)+j} + \lambda_{(i-1)(n-1)+j-1} - \lambda_{(i-1)(n-i)+j} \geqslant 0 \quad (\forall i, j). \tag{18}$$

(18) este un sistem cu $m \cdot n$ în ecuații cu $(m-1)(n-1)$ necunoscute care pot lua valori de orice semn. Coeficienții necunoscutelor sînt numai 1 sau -1. Într-o inecuație din sistemul (18) apar cel mult 4 necunoscute.

În partea a doua a lucrării se vor generaliza unele rezultate, pentru problemele de transport multidimensionale.

RECHERCHES SUR LE PROBLÈME DE TRANSPORT, I

RÉSUMÉ

Dans ce travail on a essayé d'étudier le problème de transport à l'aide de la notion de „nule-matrice", en utilisant un langage matriciel.

Une nule-matrice est définie comme une matrice dont la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne est 0; ça assure pour ces

matrices une caractère de neutralité vis-à-vis des restrictions du problème de transport.

Dans la deuxième partie on généralise ces considérations au problème de transport multidimensionnel.

BIBLIOGRAFIE

[1] Berge, C., *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod. 1959.

[2] Ionescu, H., Mirescu, P., Nădejde, I., *Programarea liniară*. Ed. Ști. București 1964.

[3] Simonnard, M., *Programmation linéaire*. Dunod. Paris, 1962.

Primit la 3. III. 1972.

Academia Republicii Socialiste România
Filiala din Cluj
Institutul de calcul