REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 1, Fascicola 2, 1972, pp. 215–226

ASUPRA UNEI PROBLEME DE PROGRAMARE NELINIARĂ FRACŢIONARĂ

de

ŞTEFAN ŢIGAN
(Cluj)

1. Introducere

Fie S o mulţime arbitrară şi Z_1 şi Z_2 două funcţionale reale definite pe S cu proprietatea că $Z_2(X) > 0$, pentru orice $X \in S$.

Vom considera următoarea problemă:

(1.1) $$\min \{Z(X) \mid X \in S\},$$

unde

$$Z(X) = \frac{Z_1(X)}{Z_2(X)}.$$

Mai multe tipuri de probleme de programare fracţionară, studiate în literatură sînt cazuri particulare ale problemei (1.1), sau rezolvarea lor se poate reduce la soluţionarea unei probleme de forma (1.1).

Astfel, de exemplu, în [3] M. FLORIAN şi P. ROBILLARD studiază o problemă de programare fracţionară în variabile bivalente, pentru care:

$$Z(X) = \frac{a_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i}{b_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i},$$

$bi > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ şi

$$S = \{X \mid X \in \{0, 1\}^n, \ H_j(X) \leqslant d_j, \ \ j = 1, 2, \ldots, m\},$$

unde H_i $(j = 1, 2, \ldots, m)$ sînt funcţii pseudobooleene.

De asemenea, rezolvarea unei probleme de programare fracţionară cu variabile reale (vezi [1], [4], [5]), care constă în minimizarea funcţiei:

$$f(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0}{\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_0}$$

în condiţiile:

$$AX \leqslant C$$
$$X \geqslant 0,$$

unde A este o matrice $m \times n$ dimensională dată, $X = (x_1, \ldots\ldots, x_n) \in R^n$, $C = (C_1, \ldots, C_m)$ este un vector dat din R^m,

$$\sum_{i=}^{n} b_i x_i + b_0 > 0,$$

iar mulţimea $P = \{X | X \in R^n,\ A \leqslant C,\ X \geqslant 0\}$ este mărginită, se poate reduce la rezolvarea unei probleme de tipul (1.1), unde S este mulţimea vîrfurilor poliedrului P, şi $Z(X) = f(X)$.

În continuare, vom prezenta, în cazul cînd S, este finită, un procedeu de rezolvare pentru problema (1.1), care generalizează metoda lui M. FLORIAN şi P. ROBILLARD [3] pentru programarea fracţionară bivalentă. Acest procedeu este similar cu cel dat de DINKELBACH W. în [7] pentru programarea neliniară fracţionară continuă.

Se arată de asemenea că o soluţie optimală a problemei (1.1) se poate obţine prin determinarea unui şir finit de soluţii pentru un număr finit de inecuaţii definite pe mulţimea S.

Ca aplicaţie a acestui procedeu, se va da o metodă pentru soluţionarea unei probleme de atribuire neliniară fracţionară.

2. Procedeu pentru problema (1.1)

Vom enunţa mai întîi o teoremă din care rezultă imediat procedeul de rezolvare.

TEOREMA 1. *Fie* $X' \in S$.

(i) *Pentru un element* $X \in S$, *are loc următoarea inegalitate*

$$g(X, X') = Z_1(X) \cdot Z_2(X') - Z_1(X') Z_2 \cdot (X) < 0, \tag{2.1}$$

dacă şi numai dacă

$$Z(X) < Z(X'). \tag{2.2}$$

(ii) *Avem egalitatea:*

$$\min \{g(X,X') | X \in S\} = 0, \tag{2.3}$$

dacă şi numai dacă

$$Z(X') = \min \{Z(X) \mid X \in S\}. \tag{2.4}$$

Într-adevăr, (i) rezultă din faptul că relaţia (2.2) se obţine din (2.1) dacă se ţine seamă că $Z_2(X) > 0$.

Acum dacă este adevărată egalitatea (2.3), atunci are loc inegalitatea:

$$g(X,\ X') \geqslant 0 \tag{2.5}$$

pentru orice $X \in S$. Dar din (2.5) se obţine imediat că:

$$Z(X) \geqslant Z(X'),$$

pentru orice $X \in S$, inegalitate care este echivalentă cu formula (2.4). Se poate arăta de asemenea fără dificultate că relaţia (2.4) implică (2.3). Prin urmare (ii) are loc.

Pornind de la teorema de mai sus, în ipoteza că mulţimea S este finită şi nevidă, se poate da pentru problema (1.1) următorul procedeu de rezolvare.

1°. Se determină o soluţie iniţială $X_1 \in S$.

Presupunem că s-a ajuns la o iteraţie k, avînd un şir $X_1, \ldots\ldots, X_k$ de elemente din S, cu proprietatea că

$$Z(X_1) > Z(X_2) > \ldots. > Z(X_k).$$

2°. Dacă are loc egalitatea:

$$\min \{g(X,\ X_k) | X \in S\} = 0, \tag{2.6}$$

atunci X_k este soluţie optimală pentru problema (1.1) şi algoritmul se opreşte.

În caz contrar se continuă la 3°.

3°. Se determină $X_{k+1} \in S$, astfel încît:

$$g(X_{k+1},\ X_k) < 0, \tag{2.7}$$

şi se revine la 2°, cu X_{k+1} în locul lui X_k.

Prin procedeul descris se obţine un şir de elemente distincte $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ astfel încît:

$$X_k \in S \text{ şi } Z(X_k) > Z(X_{k+1}), \ k = 1, 2, \ldots$$

Deoarece S conţine un număr finit de elemente, şirul (X_k) conduce la o soluţie optimală, care este ultimul element al şirului.

O b s e r v a ţ i a 1. În procedeul expus, se poate lua, de exemplu, orice funcţie $g(X, X')$, care satisface condiţiile:

(i) $g(X, X') < 0$ dacă şi numai dacă $Z(X) < Z(X')(X, X' \in S)$,

(ii) $g(X', X') = 0$, pentru orice $X' \in S$.

Eficacitatea procedeului depinde, evident, de alegerea funcţiei $g(X, X')$ precum şi de eficacitatea metodei pentru determinarea unei soluţii pentru inecuaţia (2.7) sau pentru verificarea condiţiei (2.6).

3. Aplicaţie în cazul unei probleme de atribuire neliniară

Particularizînd procedeul prezentat în paragraful 2, în acest paragraf se va da o metodă pentru soluţionarea următoarei probleme de atribuire neliniară.

Să se minimizeze funcţia:

$$Z(X) = \frac{\max\limits_{(i,j)\in N\times N} \{a_{ij}\, X_{ij}\}}{\max\limits_{(i,j)\in N\times N} \{b_{ij}\, X_{ij}\}}, \tag{3.1}$$

în condiţiile:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1, \quad j \in N \\ &\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1, \quad i \in N \\ &X_{ij} = 0 \text{ sau } 1, \end{aligned} \tag{3.2}$$

unde a_{ij} şi $b_{ij}((i, j) \in N \times N)$ sînt numere reale nenegative date, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $X = [X_{ij}]$ este o matrice pătratică de dimensiune n.

În continuare vom spune că o matrice pătratică de ordin n, $X = [X_{ij}]$, este soluţie adminisibilă pentru problema (3.1), (3.2) dacă elementele X_{ij} ale matricii X satisfac condiţiile (3.2).

Se va nota prin S mulţimea soluţiilor admisibile pentru problema (3.1), (3.2).

O soluţie optimală pentru problema (3.1), (3.2) este o soluţie admisibilă pentru care funcţia $Z(X)$ îşi atinge minimul pe mulţimea S.

Asupra problemei (3.1), (3.2) mai facem ipoteza că:

$$\max_{(i,j)\in N\times N} \{b_{ij}X_{ij}\} > 0$$

pentru orice $X = [X_{ij}] \in S$. De exemplu, dacă $b_{ij} > 0$, pentru orice $(i, j) \in N \times N$, condiţia de mai sus este satisfăcută.

Problema (3.1), (3.2) este evident, un caz particular al problemei (1.1), în care spre deosebire de exemplele din paragraful 1, funcţiile:

$$Z_1(X) = \max\, \{a_{ij}X_{ij}|\ (i, j) \in N \times N\}$$

şi

$$Z_2(X) = \max\, \{b_{ij}X_{ij}|\ (i, j) \in N \times N\}$$

sînt neliniare.

Menţionăm de asemenea, că problema (3.1), (3.2) este o generalizare a problemei de atribuire „în timp", care constă în minimizarea funcţiei:

$$Z'(X) = \max_{(i,j)\in N\times N} \{a_{ij}X_{ij}\} \tag{3.1'}$$

în condiţiile (3.2), problemă studiată în [2] (sau [6] într-o formă echivalentă). Astfel din (3.1) se obţine (3.1') dacă în (3.1) se ia $b_{ij} = 1$ pentru orice $(i, j) \in N \times N$.

Fie acum X' un element dat din S. Ca mai înainte, vom nota prin $g(X, X')$ funcţia:

$$\begin{aligned} g(X, X') &= Z_1(X)\,Z_2(X') - Z_1(X')\,Z_2(X) = \\ &= Z_2(X') \max_{(i,j)\in N\times N} \{a_{ij}X_{ij}\} - Z_1(X') \max_{(i,j)\in N\times N} \{b_{ij}X_{ij}\}, \end{aligned}$$

sau

$$g(X, X') = \max_{(i,j)\in N\times N} \{a_{ij}(X')\,X_{ij}\} - \max_{(i,j)\in N\times N} \{b_{ij}(X')\,X_{ij}\}, \tag{3.3}$$

unde

$$a_{ij}(X') = a_{ij} \cdot Z_2(X') \quad ((i, j) \in N \times N)$$

$$b_{ij}(X') = b_{ij} \cdot (Z_1') \quad ((i, j) \in N \times N).$$

Evident, pentru un element X' fixat, $[a_{ij}(X')]$ şi $[b_{ij}(X')]$ vor fi matrici numerice.

Algoritmul pentru problema de atribuire (3.1), (3.2), care va fi prezentat în continuare, urmează în principiu schema procedeului expus în secţiunea precedentă.

1°. Se determină o soluţie iniţială X_1 pentru problema (3.1), (3.2). De exemplu, matricea $X = [X_{ij}^1]$, unde

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j, \\ 0, & \text{dacă } i \neq j, \end{cases}$$

este o soluţie admisibilă şi poate fi luată ca soluţie iniţială.

Să presupunem că după k iteraţii am obţinut un şir de soluţii admisibile $X_1, X_2, \ldots, X_k$ cu proprietatea că:

$$Z(X_1) > Z(X_2) > \ldots > Z(X_k).$$

2°. Se ia $D = D_k$, unde

$$D_k = \{(i, j) | a_{ij}(X_k) - b_{ij}(X_k) < 0\}.$$

şi se trece la etapa următoare.

3°a) Dacă $D = \emptyset$ ($\emptyset$ reprezintă mulţimea vidă), atunci X_k este o soluţie optimală pentru problema (3.1), (3.2) şi algoritmul se opreşte.

b) Dacă $D \neq \emptyset$, atunci se rezolvă următoarea problemă de atribuire liniară:

$$P(D) : \min \{C(X ; D) / X \in S\},$$

unde

$$C(X ; D) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} C_{ij}(D)\, X_{ij},$$

$$C_{ij}(D) = \begin{cases} -M, & \text{dacă } (i, j) \in D, \\ 0, & \text{dacă } (i, j) \in D', \\ L, & \text{dacă } (i, j) \in D'', \end{cases}$$

M şi L sînt numere reale pozitive astfel încît:

(3.4) $$L < nM,$$

iar mulţimile D şi D' se definesc prin formulele:

(3.5) $$D' = \{(i, j) \cdot a_{ij}(X_k) < b\},$$

(3.6) $$D'' = N \times N - (D \cup D'),$$

(3.7) $$b = \min \{b_{ij}(X_k) \mid (i, j) \in D\}.$$

4°. Fie

$$V(D) = \min \{C(X ; D) | X \in S\}.$$

(i) Dacă $V(D) < 0$, atunci o soluţie optimală X_{k+1} pentru problema $P(D)$, verifică condiţia (2.7) cu $g(X, X')$ dat de formula (3.3). În acest caz, algoritmul se reia de la 2° cu X_{k+1} în locul lui X_k.

(ii) Dacă $V(D) \geqslant 0$, algoritmul se continuă la 2°, luînd în locul mulţimii D mulţimea $D - \{(i, j) | b_{ij}(X_x) = b\}$ unde b se obţine prin formula (3.7).

O b s e r v a ţ i a 2. La etapa 1°, o soluţie iniţială X_1 se poate obţine rezolvînd problema de atribuire „în timp" (vezi [1] sau [6]) următoare:

$$\min \{\max \{a_{ij} X_{ij} | (i, j) \in N \times N\} | X \in S\}.$$

De asemenea, se poate lua ca soluţie iniţială, o soluţie admisibilă X_1 care verifică condiţia:

$$Z_2(X_1) = \max_{(i,j) \in N \times N} \{b_{ij}\}.$$

O b s e r v a ţ i a 3. Un alt mod de realizare a etapelor 3° şi 4° ale algoritmului precedent poate fi următorul:

2'a) Dacă $D = \emptyset$, atunci X_k este soluţie optimală pentru problema (3.1), (3.2) şi algoritmul se opreşte.

b) Dacă $D \neq \emptyset$, atunci se determină o soluţie optimală pentru următoarea problemă liniară de atribuire:

$$\bar{P}(D) : \min \{\bar{C}(X ; D) \mid X \in S\},$$

unde

$$\bar{C}(X ; D) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \bar{C}_{ij}(D) \cdot X_{ij},$$

$$\bar{C}_{ij}(D) = \begin{cases} -M, & \text{dacă } (i, j) \in \bar{D} \\ 0, & \text{dacă } (i, j) \in \bar{D}' \\ L, & \text{dacă } (i, j) \in \bar{D}'', \end{cases}$$

M şi L sînt numere reale pozitive, care verifică condiţia (3.4), iar mulţimile $\bar{D}$, $\bar{D}'$ şi $\bar{D}''$ se definesc cu ajutorul următoarelor formule:

$$\bar{D} = \{(i, j) \in D_k \mid b_{ij}(X_k) = \bar{b}\},$$

$$\bar{D}' = \{(i, j) \mid a_{ij}(X_k) < \bar{b}\}, \tag{3.5'}$$

$$\bar{D}'' = (N \times N - (\bar{D} \cup \bar{D}'), \tag{3.6'}$$

$$\bar{b} = \max \{b_{ij}(X_k) \mid (i, j) \in D\}. \tag{3.7'}$$

3'. Fie

$$\bar{V}(D) = \min \{\bar{C}(X ; D) \mid X \in S\}.$$

(i) Dacă $\bar{V}(D) < 0$, atunci o soluţie optimală X_{k+1} pentru problema $\bar{P}(D)$, verifică condiţia $g(X_{k+1}, X_k) < 0$. Şi se trece la etapa 2 cu X_{k+1} în locul lui X_k.

(ii) Dacă $\bar{V}(D) = 0$, atunci algoritmul se continuă la 3° luînd în locul mulţimii D, mulţimea $D - \bar{D}$.

(iii) Dacă $\bar{V}(D) > 0$, atunci X_k este soluţie optimală şi algoritmul se opreşte.

Teoremele care urmează vor da o justificare pentru algoritmii prezentaţi în această secţiune.

TEOREMA 2. *Fie $X_k \in S$ şi fie $D \subset N \times N$, astfel încît:*

$$D \subseteq D_k, \tag{3.8}$$

$$D \neq \emptyset, \tag{3.9}$$

(3.10) $b_{ij}(X_k) \geqslant b$ *şi* $(i, j) \in D_k$ *implică* $(i, j) \in D$ *(b este dat de formula* (3.7)).

Atunci, dacă $X_{k+1} = [X_{ij}^{k+1}]$ este soluţie optimală pentru problema $P(D)$ şi dacă are loc inegalitatea:

$$C(X_{k+1} ; D) < 0, \tag{3.11}$$

avem:

$$g(X_{k+1} ; X_k) < 0 \tag{3.11'}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă inegalitatea (3.11) are loc atunci avem:

$$Q(X_{k+1}) \subseteq D \cup D', \tag{3.12}$$

unde pentru orice $X \in S$ se notează prin $Q(X)$ mulţimea:

$$\{(i, j) \mid (i, j) \in N \times N,\ X_{ij} = 1\}.$$

Să presupunem că ar exista un element $(p, q) \in Q(X_{k+1})$, încît $(p, q) \in D''$. Atunci avem:

$$C(X_{k+1} ; D) = L + \sum_{\substack{i \neq p \\ i \in N}} \sum_{\substack{j \neq q \\ j \in N}} C_{ij}(D)\, X_{ij}^{k+1}$$

şi pentru că:

$$\sum_{\substack{i \neq p \\ i \in N}} \sum_{\substack{j \neq q \\ j \in N}} C_{ij}(D)\, X_{ij}^{k+1} \geqslant -(n-1) M,$$

rezultă că:

$$C(X_{k+1} ; D) \geqslant L - (n-1) M > 0,$$

inegalitate care contrazice (3.11). Deci (3.12) are loc.

Avem, de asemenea, următoarea relaţie:

$$Q(X_{k+1}) \cap D \neq \emptyset,$$

pentru că, în caz contrar, din (3.12) ar rezulta că $C(X_{k+1} ; D) = 0$.

Există, prin urmare, un element $(t, s) \in Q(X_{k+1})$ încît:

$$b_{ts}(X_k) = \max \{b_{ij}(X_k) \mid (i, j) \in Q(X_{k+1}) \cap D\}. \tag{3.13}$$

Acum din (3.13), (3.7) şi (3.8) rezultă că inegalitatea:

$$b_{ts}(X_k) > a_{ij}(X_k), \tag{3.14}$$

are loc pentru orice $(i, j) \in Q(X_{k+1})$.

Dar din (3.13) şi (3.14) se obţine că:

$$\max \{b_{ij}(X_k) \mid (i, j) \in Q(X_{k+1})\} = b_{ts}(X_k) > \tag{3.15}$$
$$> \max \{a_{ij}(X_k) \mid (i, j) \in Q(X_{k+1})\},$$

şi pentru că:

$$\max\{b_{ij}(X_k) \mid (i,j) \in Q(X_{k+1})\} = \max\{b_{ij}(X_k)\, X_{ij}^{k+1} \mid (i,j) \in N \times N\}$$

şi

$$\max\{a_{ij}(X_k) \mid (i,j) \in Q(X_{k+1})\} = \max\{a_{ij}(X_k)\, X_{ij}^{k+1} \mid (i,j) \in N \times N\}$$

rezultă din (3,15) că inegalitatea (3.11′) este îndeplinită.

TEOREMA 3. *Fie $X_k \in S$ şi fie G familia tuturor submulţimilor D din $N \times N$, care verifică condiţiile (3.8)—(3.10).*

Dacă pentru orice $D \in G$ are loc inegalitatea $V(D) \geqslant 0$, atunci $g(X, X_k) \geqslant 0$, pentru orice $X \in S$.

Demonstraţie. Să presupunem că există un element $X_0 \in S$ astfel încît $g(X_0, X_k) < 0$. Rezultă atunci că

$$\max\{a_{ij}(X_k) \mid (i,j) \in Q(X_0)\} < \max\{b_{ij}(X_k) \mid (i,j) \in Q(X_0)\}. \tag{3.16}$$

Fie acum

$$D = D^{\circ} \equiv \{(i,j) \in D_k \mid b_{ij}(X_k) \geqslant \max\{b_{ij}(X_k) \mid (i,j) \in Q(X_0)\}\}. \tag{3.17}$$

Evident mulţimea D° este nevidă şi verifică condiţiile (3.8) şi (3.10). Atunci din (3.5), (3.16) şi (3.17) rezultă că:

$$V(D^0) \leqslant C(X_0, D^0) < 0,$$

inegalitate care contrazice ipoteza făcută în teoremă că $V(D) \geqslant 0$ pentru orice $D \in G$.

Prin urmare inegalitatea $g(X, X_k) \geqslant 0$, are loc pentru orice $X \in S$.

În legătură cu modificarea din observaţia 3, a algoritmului sînt adevărate următoarele două teoreme, care sînt similare cu teoremele 2 şi 3.

TEOREMA 2′. *Fie $X \in S$ şi fie $D \subseteq N \times N$, astfel încît D verifică condiţiile (3.8), (3.9) şi (3.10′) $b_{ij}(X) \leqslant \bar{b}$ şi $(i,j) \in D_k$ implică $(i,j) \in D$ ($\bar{b}$ este dat de formula (3.7′)).*

Atunci, dacă X_{k+1} este o soluţie optimală pentru problema $\bar{P}(D)$ şi are loc inegalitatea:

$$\bar{C}(X_{k+1}; D) < 0,$$

avem:

$$g(X_{k+1}, X) < 0.$$

Demonstraţia teoremei 2′ este asemănătoare cu cea a teoremei 2.

TEOREMA 3′. *Fie $X_k \in S$ şi fie $\bar{G}$ familia tuturor submulţimilor D din $N \times N$, care verifică condiţiile (3.8), (3.9) şi (3.10′). Dacă există un element $D^0 \in \bar{G}$, astfel încît sînt îndeplinite următoarele condiţii*

(i) $V(D^0) > 0$,

(ii) *$D \in \bar{G}$ şi $D^0 \subseteq D$ implică $\bar{V}(D) \geqslant 0$, atunci*

$$g(X, X_k) \geqslant 0$$

pentru orice $X \in S$.

Demonstraţie. Mai întîi vom arăta că din condiţia (i) rezultă că

$$\bar{V}(D) > 0$$

pentru orice $D \in \bar{G}$ astfel încît $D \subseteq D^0$.

Să presupunem că există un element $D^1 \in \bar{G}$ cu proprietatea că $D^1 \subseteq D_0$ şi astfel încît $\bar{V}(D^1) \leqslant 0$. Fie atunci X' un element din S cu proprietatea că:

$$\bar{V}(D^1) = \bar{C}(X'; D^1).$$

Dar deoarece:

$$Q(X') \subseteq \bar{D} \cup \bar{D}' \subseteq \bar{D}^0 \cup \bar{D}^{0\prime},$$

rezultă că:

$$\bar{V}(D^0) \leqslant \bar{C}(X'; D^1) \leqslant 0,$$

inegalitate ce contrazice (i).

Deci $\bar{V}(D) > 0$ pentru orice $D \in \bar{G}$ care verifică relaţia $D \subseteq D^0$ şi ţinînd seamă de (ii) rezultă că $\bar{V}(D) \geqslant 0$ pentru orice $D \in \bar{G}$.

Să presupunem acum că există un element $X'' \in S$ astfel încît are loc inegalitatea:

$$g(X'', X_k) < 0.$$

Dar atunci avem următoarea inegalitate:

$$\max\{a_{ij}(X_k) \mid (i,j) \in Q(X'')\} < \max\{b_{ij}(X_k) \mid (i,j) \in Q(X'')\}. \tag{3.18}$$

Fie

$$D^2 = \{(i,j) \in D_k \mid b_{ij}(X_k) \leqslant \max\{b_{ij}(X_k) \mid (i,j) \in Q(X'')\}\}. \tag{3.19}$$

Mulţimea D^2 este nevidă şi verifică condiţiile (3.8) şi (3.10'). Atunci, din (3.5'), (3.18) şi (3.19) rezultă că avem:

$$\bar{V}(D^2) \leqslant \bar{C}(X''; D^2) < 0,$$

inegalitate ce contrazice faptul că $\bar{V}(D) \geqslant 0$ pentru orice $D \in G$.

Prin urmare, inegalitatea $g(X, X_k) \geqslant 0$ are loc pentru orice $X \in S$.

SUR UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION NON-LINÉAIRE FRACTIONNAIRE

RÉSUMÉ

Dans ce travail on considère le problème suivant.

Déterminer

(P) $$\min\left\{\frac{Z_1(X)}{Z_2(X)} \middle| X \in S\right\},$$

où Z_1 et Z_2 sont des fonctionnelles réelles définies sur un ensemble S et $Z_2(X) < 0$ pour tout $X \in S$.

Pour le cas où l'ensemble S est fini, on présente un procédé pour la résolution du problème (P).

Comme application, on donne un algorithme pour la résolution d'un problème d'affectation non-linéaire fractionnaire.

BIBLIOGRAFIE

[1] Charnes, A., W. W. Cooper, *Programming with Linear Fractional Functionals.* Naval Research Logistics Quarterly, **9**, *4*, 181–186 (1962).
[2] Ducamp, A., *Un problème d'affectation.* Cahiers du Centre d'Etudes de Recherches Opérationnelle, **8**, *1*, 69–72 (1966).
[3] Florian, M., P. Robillard, *Programmation hyperbolique en variables bivalentes.* RIRO, No V–1, 3–9 (1971).
[4] Munteanu, E., F. Rado, *Calculul şarjelor celor mai economice la cuptoarele de topit fontă.* Studii şi cercetări de matematică (Cluj), XI, fascicola anexă, 149–158 (1960).
[5] Swarup, K., *Linear Fractional Functionals Programming.* Opns. Res. 13, 1029–1036 (1965).
[6] Ţigan, Ş., *Sur un problème d'affectation.* Mathematica (Cluj), 11 (34), 1, 163–166 (1969).
[7] Dinkelbach W., *On nonlinear Fractional Programming:* Manag. Sc., Vol. **34**, 492–498 (1967).

Primit la 15. IV. 1972.

Academia Republicii Socialiste România
Filiala din Cluj
Institutul de calcul