REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 2, Fascicola 1, 1973, pp. 31–44

ASUPRA REZOLVĂRII UNUI SISTEM DE ECUAŢII BOOLEENE

de

ŞTEFAN N. BERŢI

(Cluj)

În această lucrare ne referim la rezolvarea sistemului de ecuaţii cu mulţimi

$$X + Y = A, \quad XY = B, \quad X + Z = C, \quad XZ = D \tag{1}$$

unde $X + Y = X \cap Y$, $XY = X \cap Y$.

Dacă T este mulţimea totală, 0 este mulţimea vidă şi $\bar{A} = T - A$ (complementara mulţimii A), atunci din (1) rezultă pentru mulţimile coeficienţi A, B, C, D relaţiile

$$\bar{A}B = \bar{X}\bar{Y}XY = 0, \bar{C}D = XZ\bar{X}\bar{Z} = 0, B\bar{C} = XY\bar{X}\bar{Z} = 0, \bar{A}D = XZ\bar{X}\bar{Y} = 0.$$

Aceste relaţii sînt evident echivalente cu condiţia

$$\bar{A}B + \bar{C}D + B\bar{C} + \bar{A}D = 0$$

deci cu condiţia

$$B + D \subseteq AC. \tag{2}$$

Se arată că condiţia necesară (2) este şi condiţia suficientă de compatibilitate a sistemului de ecuaţii (1).

Folosind metoda descompunerii pe componente [2] pentru sistemul de ecuaţii (1), se obţine următorul tabel

Expresie \ Componentă	$\bar{A}\bar{C}$	$A\bar{C}$	$A\bar{B}C\bar{D}$	$B\bar{D}$	BD	$\bar{B}D$	$\bar{A}C$
$X+Y$	0	1	1	1	1	1	0
XY	0	0	0	1	1	0	0
$X+Z$	0	0	1	1	1	1	1
XZ	0	0	0	0	1	1	0

Deci soluţia pe componente va fi dată de tabelul:

Soluţie \ Componentă	$\bar{A}\bar{C}$	$A\bar{C}$	$A\bar{B}C\bar{D}$	$B\bar{D}$	BD	$\bar{B}D$	$\bar{A}C$
X	0	0	U	1	1	1	0
Y	0	1	$\bar{\mathrm{U}}$	1	1	0	0
Z	0	0	$\bar{\mathrm{U}}$	0	1	1	1

unde U este o mulţime arbitrară.

Prin urmare avem următorul rezultat: sistemul de ecuaţii (1) este compatibil atunci şi numai atunci cînd are loc relaţia (2), caz în care soluţia sistemului (1) este

(3) $$(X, Y, Z) = (A\bar{B}C\bar{D}U + B + \bar{B}D,\ A\bar{C} + A\bar{B}C\bar{D}\bar{U} + B,\ A\bar{B}C\bar{D}\bar{U} + D + \bar{A}C)$$

Mulţimea U este arbitrară.

Metoda descompunerii pe componente se reduce la următoarele. Se stabileşte condiţia necesară şi suficientă de compatibilitate pentru un sistem de ecuaţii

(4) $$f_j(A_1 \ldots, A_m, X_1, \ldots, X_n) = g_j(A_1, \ldots, A_m, X_1, \ldots, X_n)\ j = 1, 2, \ldots, k$$

şi se scrie această condiţie sub formă normală disjunctivă

(5) $$\sum_{j=1}^{r} L_j = T$$

unde

$$L_j = L_j(A_1, \ldots, A_m) \neq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

sînt funcţii booleene de forma

$$\overset{\varepsilon_{j,1}}{A_1} + \overset{\varepsilon_{j,2}}{A_2} + \ldots + \overset{\varepsilon_{j,m}}{A_m}$$

unde

$$\varepsilon_{j,i} \in \{0,1\} \text{ şi}$$

$$\overset{1}{A} = A,\ \overset{0}{A} = \bar{A}.$$

Condiţia de compatibilitate (5) se poate pune deci sub forma

$$\sum_{j=1}^{r} (\overset{\varepsilon_{j,1}}{A_1} + \overset{\varepsilon_{j,2}}{A_2} + \ldots + \overset{\varepsilon_{j,m}}{A_m}) = T$$

respectiv sub forma

(6) $$\sum_{j=1}^{r} \overset{1-\varepsilon_{j,1}}{A_1} \ldots \overset{1-\varepsilon_{j,m}}{A_m} = T.$$

Fie $C_1, \ldots, C_r$ cele r componente ale reuniunii (6).

Pe fiecare din aceste r componente se consideră cele k ecuaţii ale sistemului (4) şi conform unei scheme generale ([2]) se rezolvă sistemul (4) pentru fiecare component.

Studiul general al rezolvării unui sistem de ecuaţii de forma (4) se poate aborda şi cu ajutorul metodei eliminărilor succesive, care este pusă în unele lucrări a lui Schröder, indicaţii asupra metodei fiind prezentate în monografia lui BIRKHOFF ([1]). Vom folosi următorul rezultat.

L e m ă. *Condiţia necesară şi suficientă de compatibilitate a ecuaţiei*

(7) $$AX + B\bar{X} + C = 0$$

este dată de

(8) $$AB + C = 0$$

caz în care soluţia generală a ecuaţiei (7) *este*

$$X = \bar{A}\bar{B}U + B$$

unde U este o mulţime arbitrară.

Demonstraţie. Ecuaţia (7) este echivalentă cu sistemul

$$AX = B\bar{X} = C = 0$$

deci avem condiţia

$$C = 0$$

şi ecuaţia

$$AX + B\bar{X} = 0,$$

care se poate scrie sub forma

$$AB + A\bar{B}X + \bar{A}B\bar{X} = 0$$

de unde rezultă condiţia

$$AB = 0.$$

Astfel $AB = C = 0$, deci condiţia (8) este condiţie necesară de compatibilitate. Avem astfel ecuaţia

$$\bar{A}BX + \bar{A}B\bar{X} = 0$$

unde $A\bar{B}$ şi $\bar{A}B$ sînt mulţimi disjuncte, prin urmare soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$X = \bar{A}\bar{B}U + B,$$

U fiind o mulţime arbitrară. Lema este demonstrată.

Folosind această lemă, vom prezenta următorul algoritm privind rezolvarea sistemului de ecuaţii (4). Sistemul (4) este echivalent cu sistemul

$$f_1 \Delta g_1 = f_2 \Delta g_2 = \ldots = f_k \Delta g_k = 0$$

deci cu ecuaţia

$$\sum_{j=1}^{k} f_j \Delta g_j = 0$$

ceea ce se poate scrie sub forma ecuaţiei

$$F(A_1, \ldots, A_m, X_1, \ldots, X_n) = 0. \tag{9}$$

Ecuaţia (9) se poate pune sub forma

$$\alpha_1 X_1 + \beta_1 \bar{X}_1 + \gamma_1 = 0$$

unde α_1, β_1, γ_1 sînt funcţii booleene de $A_1, \ldots, A_m, X_2, \ldots, X_n$. Pe baza lemei de mai sus, avem sistemul

$$\begin{cases} F_1(A_1, \ldots, A_m, X_2 \ldots, X_n) = 0 \\ X_1 = G_{1,1}(A_1, \ldots, A_m, X_2 \ldots, X_n) \end{cases}$$

echivalent cu sistemul (4). Aici $F_1 = \alpha_1\beta_1 + \gamma_1$ şi $G_{1,1} = u_1\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_1 + \beta_1$. Aplicînd algoritmul descris mai sus sistemului $F_1 = 0$, $X_1 = G_1$ vom avea un sistem de forma

$$\begin{cases} F_2(A_1, \ldots, A_m, X_3, \ldots, X_n) = 0 \\ X_1 = G_{2,1}(A_1, \ldots, A_m, X_3 \ldots, X_n) \\ X_2 = G_{2,2}(A_1, \ldots, A_m, X_3, \ldots, X_n). \end{cases}$$

Aplicînd în total de n ori algoritmul descris, avem

$$\begin{cases} F_n(A_1, \ldots, A_m) = 0 \\ X_1 = G_{n,1}(A_1, \ldots, A_m) \\ X_2 = G_{n,2}(A_1, \ldots, A_m) \\ \vdots \\ X_m = G_{n,m}(A_1, \ldots, A_m) \end{cases} \tag{10}$$

care este chiar soluţia sistemului (4). $F_n = 0$ este condiţia necesară şi suficientă de compatibilitate a sistemului (4). Din procedeul de rezolvare descris, rezultă că soluția sistemului (4) poate depinde de cel mult n mulțimi arbitrare $U_1, U_2, \ldots, U_n$.

În cazul concret al sistemului de ecuații (1) avem:

$$F(A,B,C,D,X,Y,Z) = A\bar{X}\bar{Y} + \bar{A}X + \bar{A}Y + B\bar{X} + B\bar{Y} + \bar{B}XY + C\bar{X}\bar{Z} + \bar{C}X + \bar{C}Z + D\bar{X} + D\bar{Z} + \bar{D}XZ$$

și ecuația $F = 0$ (echivalentă cu sistemul (1)) ne dă pe rînd sistemele

$$\begin{cases} (\bar{C} + \bar{D}X)(C\bar{X} + D) + A\bar{X}\bar{Y} + \bar{A}X + \bar{A}Y + B\bar{X} + B\bar{Y} + \bar{B}XY + \\ + \bar{C}X + D\bar{X} = 0 \\ Z = \overline{(\bar{C} + \bar{D}X)(C\bar{X} + D)}\, U_1 + C\bar{X} + D \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\bar{A} + \bar{B}X)Y + (A\bar{X}+B)\bar{Y} + \bar{A}X + B\bar{X} + \bar{C}X + D\bar{X} + \bar{C}D = 0 \\ Z = C\bar{X} + D. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\bar{A} + \bar{B}X)(A\bar{X} + B) + \bar{A}X + B\bar{X} + \bar{C}X + D\bar{X} + \bar{C}D = 0 \\ Y = \overline{(\bar{A} + \bar{B}X)(A\bar{X} + B)}\, U_2 + A\bar{X} + B \\ Z = C\bar{X} + D \end{cases}$$

$$(\bar{A} + \bar{C})(B + D) + CD + \bar{A}B = 0$$

$$X = \overline{(\bar{A} + \bar{C})(B + D)}\, U_3 + B + D$$

$$Y = A\bar{X} + B$$

$$Z = C\bar{X} + D$$

și astfel

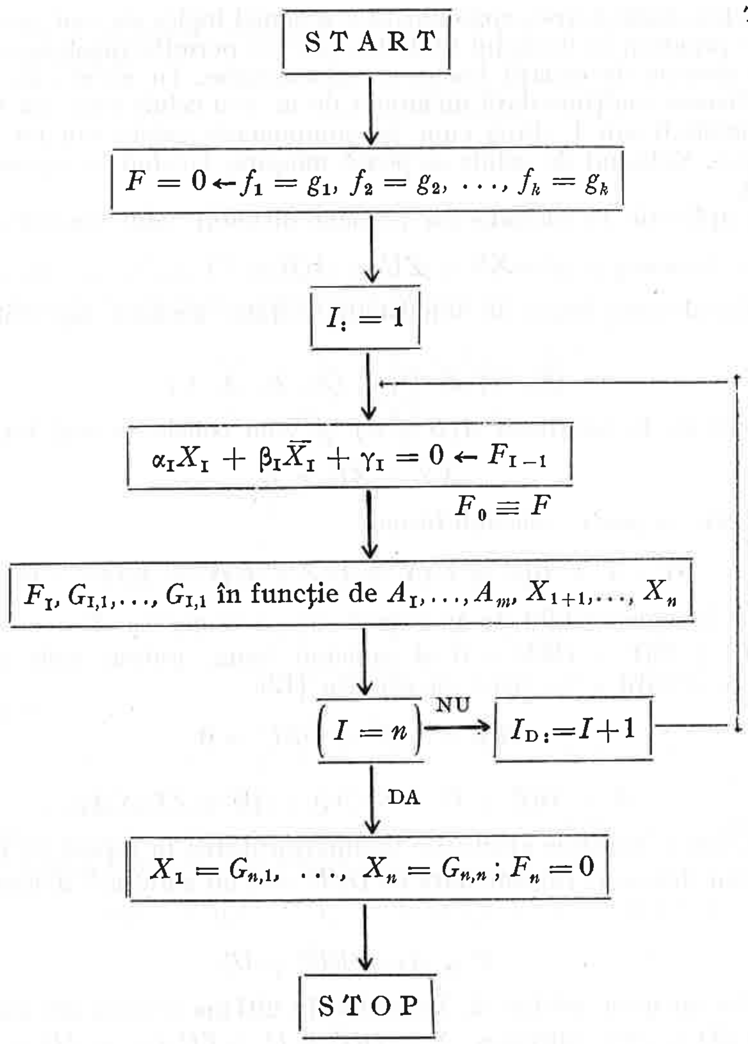
$$F_4 = \bar{A}B + \bar{A}D + B\bar{C} + \bar{C}D$$

iar $F_4 = 0$ este condiția necesară și suficientă de compatibilitate (2).

Efectuînd înlocuirile în mod consecutiv în sistemul de mai sus avem soluția (3) a sistemului (4).

Schema logică a algoritmului de mai sus, numit în continuare algoritmul Schröder Birkhoff se poate prezenta în felul următor:

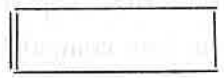
TABEL 1.



În această schemă

$$\boxed{S \leftarrow R}$$

înseamnă că se trece de la forma R la forma S iar



înseamnă tipărirea conținutului blocului respectiv.

Pentru desfăşurarea amănunţită a schemei logice de mai sus, se poate scrie un program în limbajul COBOL, care ne permite rezolvarea concretă a unor sisteme de ecuaţii booleene voluminoase. În acest caz, rezervăm pentru fiecare mulţime dată un număr de m + n celule care vor fi ocupate de numerele 0 sau 1, după cum pe componente există sau nu mulţimile respective. Volumul de celule se poate micşora, trecînd la reprezentare în baza 8.

Ca aplicaţie la metoda lui Scröder-Birkhoff vom considera ecuaţia

$$XY + ZU = A(B + C) \tag{11}$$

care generalizează legea de subdistributivitate, această lege obţinîndu-se prin

$$(X, Y, Z, U) = (A, B, A, C).$$

Vom nota cu D mulţimea $A(B + C)$ şi vom considera mai întîi ecuaţia

$$XY + ZU = D \tag{12}$$

ecuaţie care se poate scrie sub forma

$$\bar{D}Y \cdot X + D(\bar{Z} + \bar{U})\bar{X} + D(\bar{Z} + \bar{U})\bar{Y} + \bar{D}ZU = 0. \tag{13}$$

Condiţia de compatibilitate în raport cu necunoscuta X a ecuaţiei (13) este $D(\bar{Z} + \bar{U})\bar{Y} + \bar{D}ZU = 0$ şi aplicînd lema, putem scrie următorul sistem de ecuaţii echivalent cu ecuaţia (12)

$$\begin{aligned} &D(\bar{Z} + \bar{U})\bar{Y} + \bar{D}ZU = 0 \\ &X = D(\bar{Z} + \bar{U} + ZUA_1) + (\bar{D} + ZU)\bar{Y}A_1 \end{aligned} \tag{14}$$

unde A_1 este o mulţime arbitrară. Compatibilitatea în raport cu Y a primei ecuaţii din sistemul (14) este dată de $\bar{D}ZU = 0$ iar soluţia Y a acestei ecuaţii este

$$Y = A_2 + D(\bar{Z} + \bar{U})$$

A_2 fiind o mulţime arbitrară. Înlocuind în ultima ecuaţie din sistemul (14 Y cu $\bar{A}_2(\bar{D} + ZU)$ obţinem $X = D(\bar{Z} + \bar{U} + ZUA_1) + (\bar{D} + ZU)A_1\bar{A}_2$ şi ecuaţia (12) este echivalentă cu sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} &\bar{D}ZU = 0 \\ &Y = A_2 + D(\bar{Z} + \bar{U}) \\ &X = D(\bar{Z} + \bar{U} + ZUA_1) + (\bar{D} + ZU)A_1\bar{A}_2. \end{aligned} \tag{15}$$

Prima ecuaţie din acest sistem este compatibil şi se obţine

$$U = (D + \bar{Z})A_3$$

unde A_3 este o mulţime arbitrară. Astfel ecuaţia (12) este echivalentă cu sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} &U = (D + \bar{Z})A_3 \\ &Y = A_2 + D(\bar{Z} + \bar{A}_3) \\ &X = D(\bar{Z} + \bar{A}_3 + ZA_1A_3) + \bar{D}A_1\bar{A}_2 \end{aligned} \tag{16}$$

în care mulţimea Z este arbitrară. Prin urmare soluţia generală a ecuaţiei (12) depinde de 4 mulţimi arbitrare şi are forma

$$\begin{aligned} &X = D(\bar{A}_3 + \bar{A}_4 + A_1A_3A_4) + \bar{D}A_1\bar{A}_2 \\ &Y = A_2 + D(\bar{A}_3 + \bar{A}_4) \\ &Z = A_4 \\ &U = (D + \bar{A}_4)A_3 \end{aligned} \tag{17}$$

Pentru a verifica soluţia (17) se calculează

$$XY = D(\bar{A}_3 + \bar{A}_4 + A_1A_2A_3A_4)$$
$$ZU = DA_3A_4$$

şi se obţine

$$XY + ZU = D(A_3A_4 + \bar{A}_3 + \bar{A}_4) = DT = D$$

deci (17) verifică ecuaţia (12).

Rezultatul obţinut (soluţia generală a ecuaţiei (12) este (17)) permite găsirea soluţiei generale a ecuaţiei (11):

$$\begin{aligned} &X = A(B + C)(\bar{A}_3 + \bar{A}_4 + A_1A_3A_4) + (\bar{A} + \bar{B}\bar{C})A_1\bar{A}_2 \\ &Y = A_2 + A(B + C)(\bar{A}_3 + \bar{A}_4) \\ &Z = A_4 \\ &U = (A(B + C) + \bar{A}_4)A_3. \end{aligned} \tag{18}$$

Pentru a găsi acele mulţimi A_1, A_2, A_3, A_4 pentru care (18) ne conduce la legea de subdistributivitate, trebuie să considerăm sistemul de ecuaţii în necunoscutele A_1, A_2, A_3, A_4;

$$\begin{aligned} &A(B + C)(\bar{A}_3 + \bar{A}_4 + A_1A_3A_4) + (\bar{A} + \bar{B}\bar{C})A_1\bar{A}_2 = A \\ &A_2 + A(B + C)(\bar{A}_3 + \bar{A}_4) = B \\ &A_4 = A \\ &(A(B + C) + \bar{A}_4)A_3 = C. \end{aligned} \tag{19}$$

Sistemul (19) se poate scrie sub forma

$$A(B + C)(\bar{A}_3 + A_1A_3) + (\bar{A} + \bar{B}\bar{C})A_1\bar{A}_2 = A$$

$$(20) \quad \begin{aligned} A_2 + A(B + C)\bar{A}_3 &= B \\ (A(B + C) + \bar{A})A_3 &= C \\ A_4 &= A \end{aligned}$$

Acest sistem se poate rezolva, folosindu-se metoda Schröder-Birkhoff, obţinînd parametri arbitrari. Sistemul (20) se poate pune sub forma

$$(21) \quad \begin{aligned} \bar{A}_2\bar{A} \cdot A_1 + A(A_3 + \bar{B}\bar{C}) \cdot \bar{A}_1 + A\bar{B}\bar{C}A_2 &= 0 \\ \bar{B} \cdot A_2 + (\bar{A} + A_3)B \cdot \bar{A}_2 + A\bar{B}C\bar{A}_3 &= 0 \\ (AB + \bar{A})\bar{C} \cdot A_3 + C\bar{A}_3 &= 0 \\ A_4 &= A \end{aligned}$$

A treia ecuaţie din sistemul (21) este compatibilă necondiţionat şi are soluţia

$$A_3 = C + A\bar{B}\bar{C}B_1$$

şi sistemul (21) este echivalent cu

$$(22) \quad \begin{aligned} \bar{A}_2\bar{A} \cdot A_1 + A(C + \bar{B}\bar{C}) \cdot \bar{A}_1 + A\bar{B}\bar{C}A_2 &= 0 \\ \bar{B}A_2 + B(\bar{A} + C)\bar{A}_2 &= 0 \\ A_3 &= C + A\bar{B}\bar{C}B_1 \\ A_4 &= A \end{aligned}$$

unde B_1 este o mulţime arbitrară. Din

$$\bar{B} \cdot B(\bar{A} + C) = 0$$

rezultă că a 2-a ecuaţie din sistemul (22) este compatibilă şi soluţia acestei ecuaţii este

$$A_2 = (A\bar{C}B_2 + \bar{A} + C)B$$

şi sistemul (22) este echivalent cu sistemul

$$(23) \quad \begin{aligned} \bar{A}\bar{B} \cdot A_1 + A(C + \bar{B}\bar{C}) \cdot \bar{A}_1 &= 0 \\ A_2 &= (A\bar{C}B_2 + \bar{A} + C)B \\ A_3 &= C + A\bar{B}\bar{C}B_1 \\ A_4 &= A. \end{aligned}$$

Prima ecuaţie din sistemul (23) este compatibilă deoarece $A_2\bar{A}A(C + \bar{B}\bar{C}) = 0$ şi soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$A_1 = BB_3 + A(C + \bar{B}\bar{C}).$$

Deci soluţia sistemului de ecuaţii (19) este

$$(24) \quad \begin{aligned} A_1 &= BB_3 + A(C + \bar{B}\bar{C}) \\ A_2 &= (A\bar{C}B_2 + \bar{A} + C)B \\ A_3 &= C + A\bar{B}\bar{C}B_1 \\ A_4 &= A \end{aligned}$$

soluţie care depinde de 3 mulţimi arbitrare B_1, B_2, B.

Deoarece se obţin anumite identităţi interesante prin verificarea faptului că (24) este soluţia sistemului (19) vom da această verificare.

$$\bar{A}_3 + \bar{A}_4 + A_1A_3A_4 = \bar{A} + \bar{B}\bar{C} + \bar{B}_1\bar{C} + AC + A\bar{B}\bar{C}B_1$$

$$A(B + C)\ (\bar{A}_3 + \bar{A}_4 + A_1A_3A_4) = A(B + C + B\bar{B}_1C)$$

$$A_1\bar{A}_2 = A(\bar{B} + B\bar{C}\bar{B}_2B_3)$$

$$(\bar{A} + \bar{B}\bar{C})A_1\bar{A}_2 = A\bar{B}\bar{C}$$

şi

$$A(B + C)\ (\bar{A}_3 + \bar{A}_4 + A_1A_3A_4) + (\bar{A} + \bar{B}\bar{C})\ A_1\bar{A}_2 =$$

$$= A(B + C + \bar{B}\bar{C} + B\bar{B}_1\bar{C}) = A$$

deci prima ecuaţie din (19) este verificată.

TABEL 2.

	(step) pas	(concrete data) date concrete	(general data) date generale
Inceput (Start)	1	$XY + ZU = D$	$f_1 = g_1 \quad n = 4$
	2	X	X_1
	3	$\bar{D}YX + D(\bar{Z}+\bar{U})\bar{X} + D(\bar{Z}+\bar{U})\bar{Y} + \bar{D}ZU = 0$	$F = 0$
	4	$\bar{D}Y,\ D(\bar{Z} + \bar{U}),\ D(\bar{U} + \bar{Z})\bar{Y} + \bar{D}ZU$	$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1$ $I = 1\ (I < n)$
	5		X_2
	6	Y	$F_1 = 0$
	7	$D(\bar{Z} + \bar{U})\bar{Y} + \bar{D}ZU = 0$	$X_1 = G_{1,1}$
	8	$X = D(\bar{Z} + \bar{U} + ZU + A_1) + (\bar{D} + ZU)\bar{Y}A_1$	
	9	$0,\ D(\bar{Z} + \bar{U}),\ \bar{D}ZU$	$\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2$ $I = 2\ (I < n)$
	10		X_3
	11	U	$F_2 = 0$
	12	$\bar{D}ZU = 0$	$X_2 = G_{2,2}$
	13	$Y = A_2 + D(\bar{Z} + \bar{U})$	$X_1 = G_{1,2}$
	14	$X = D(\bar{Z} + \bar{U} + ZUA_1) + (\bar{D} + ZU)A_1\bar{A}_2$	
	15	$\bar{D}Z,\ 0,\ 0$	$\alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3$ $I = 3\ (I < n)$
	16		X_4
	17	Z	$F_3 = 0$
	18	$O = O$	$X_3 = G_{3,3}$
	19	$U = (D + \bar{Z})A_3$	$X_2 = G_{2,3}$
	20	$Y = A_2 + D(\bar{Z} + \bar{A}_3)$	$X_1 = G_{1,3}$
	21	$X = D(\bar{Z} + \bar{A}_3 + ZA_1A_3) + \bar{D}A_1\bar{A}_2$	$\alpha_4,\ \beta_4,\ \gamma_4$
	22	$0\ 0\ 0$	$I = 4\ (I = n)$
	23		$X_4 = G_{4,4}$
	24	$Z = A_4$	$X_3 = G_{3,4}$
	25	$U =]D + \bar{A}_4)A_3$	$X_2 = G_{2,4}$
tipărit (printed)	26	$Y = A_2 + D(\bar{A}_4 + \bar{A}_3)$	$X_1 = G_{1,4}$
	27	$X = D(\bar{A}_4 + \bar{A}_3 + A_1A_3A_4) + \bar{D}A_1\bar{A}_2$	

Sfîrșit (Stop)

Avem

$$\bar{A}_3 + \bar{A}_4 = \bar{A} + \bar{B}\bar{C} + \bar{C}\bar{B}_1$$

$$A(B + C)(\bar{A}_3 + \bar{A}_4) = ABC$$

și

$$A_2 + A(B + C)\bar{A}_3 + \bar{A}_4) \quad = \quad B(A\bar{C} + \bar{A} + C) = B$$

deci și a 2-a ecuație din sistemul (19) este verificată. A 3-a ecuație din sistemul (19) se verifică evident. A 4-a ecuație din (19) se verifică în felul următor:

$$(A(B + C) + \bar{A}_4)A_3 = (AB + AC + \bar{A})(C + A\overline{\bar{B}\bar{C}}B_1) =$$

$$= ABC + \bar{A}C + AC = ABC + C = C.$$

În tabelul 2. se dă schema de desfășurare a rezolvării sistemului.

ON THE RESOLUTION OF A SYSTEM OF BOOLEAN EQUATIONS

SUMMARY

In the present paper is given a general algorithm for the resolution of the system of equations

(4) $$f_1 = g_1, \ldots, f_k = g_k$$

where f_j and g_j $(j = 1, \ldots, k)$ are boolean functions of the given sets $A_1, \ldots, A_m$ and of the unknown sets $X_1, \ldots, X_n$. The system (4) is equivalent with the boolean equation (9) $F = 0$, where

$$F = \sum_{j=1}^{k} f_j \,\Delta\, g_j.$$

We denote $A + B = A \cup B$, $AB = A \cap B$, $A \,\Delta\, \bar{B} = AB + AB$, $A = T - \bar{A}$ (T is the total set)

The lemma

$$AX + B\bar{X} + C = 0 \Leftrightarrow (AB + C = 0 \ \&\ X = A\bar{B}\bar{M} + B)$$

(where M is an arbitrary set) is the ground-work of the so-called Schröder-Birkhoff algoritmh (S. B. a.) for the resolution of equation (9). The logical schema of S. B. a. is given in the Roumanian text. (Tabel 1)

For the system (1) is given the resolution by an algorithm studied in [2]. The system (1) is compatible if and only if (2). In the assumption (2) the general solution of (1) is (3). The S. B. a. presented in this paper is more simple; it is applied for the resolution of system (1), of the equation (11) and for the system (19) with the unknown sets : A_1, A_2, A_3 and A_4. The solution of (11) and (19) is given respectively by (17) and (24).

In the following table (tabel 2) is given the $S.B.$ a. for the effective resolution of the equation (11).

BIBLIOGRAFIE

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, 1952.
[2] A. Ioanovici, St. Berţi, *Rezolvarea ecuaţiilor cu mulţimi.* Buletinul Pedagogic din Baia Mare, I, 1969.

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România

Primit la 23. XI. 1972.