REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 2, Fascicola 1, 1973, pp. 45–50

ASUPRA UNOR SPAŢII VECTORIALE TOPOLOGICE ORDONATE CARE INTERVIN ÎN TEORIA OPTIMIZĂRII

de

WOLFGANG W. BRECKNER

(Cluj)

1. În afară de problemele obişnuite de optimizare care din punct de vedere matematic revin la determinarea minimului sau maximului unei singure funcţii reale, numită funcţie de scop, intervin în practică numeroase probleme a căror formulare matematică conduce la mai multe funcţii de scop. Pentru a studia şi rezolva astfel de probleme de optimizare se poate proceda în două moduri: fie că se înlocuiesc funcţiile de scop cu o singură funcţie reală care caracterizează efectul tuturor, fie că ele se privesc ca componentele unei aplicaţii cu valori într-o mulţime ordonată.

Numărul lucrărilor consacrate studiului optimizării unor aplicaţii cu valori într-o mulţime ordonată este mare. Deosebit de intens a fost cercetat cazul cînd aplicaţia respectivă este definită pe o submulţime convexă a unui spaţiu vectorial real sau complex şi ia valori într-un spaţiu vectorial topologic ordonat, încercîndu-se printre altele să se elaboreze pentru asemenea probleme de optimizare o teorie a dualităţii care să generalizeze teoria dualităţii din programarea liniară în spaţiile vectoriale de dimensiune finită. BRECKNER W. W. [1] a arătat că pentru anumite spaţii vectoriale topologice ordonate, pe care le-a numit fundamentale, acest lucru este posibil. Scopul lucrării de faţă este de a stabili cîteva proprietăţi ale spaţiilor vectoriale topologice ordonate fundamentale şi de a studia legătura lor cu spaţiile vectoriale topologice ordonate arhimediene.

2. Pentru a fixa terminologia şi notaţiile prezentăm în această secţiune unele noţiuni din teoria spaţiilor vectoriale ordonate.

Se numeşte spaţiu vectorial ordonat un spaţiu vectorial real F în care este definită o relaţie binară reflexivă, tranzitivă şi antisimetrică (numită relaţie *de ordine) notată cu $\leqq$ şi care, oricare ar fi elementele f, g din F cu $f \leqq g$, satisface următoarele condiţii :*

(O_1) *Are loc relaţia $f + h \leqq g + h$ pentru orice element h din F.*

(O_2) *Are loc relaţia $\lambda f \leqq \lambda g$ pentru orice număr real $\lambda > 0$*[1].

Dacă pentru două elemente f, g ale unui spaţiu vectorial ordonat au loc relaţiile $f \leqq g$ şi $f \neq g$, atunci se scrie pentru prescurtare $f < g$.

Dacă θ_F este elementul nul al unui spaţiu vectorial ordonat F, atunci mulţimile

$$K_F = \{f \in F : \theta_F \leqq f\}, \quad K_F^{+} = \{f \in F : \theta_F < f\}$$

sînt conuri convexe, care se mai numesc conul elementelor pozitive respectiv conul elementelor strict pozitive din F.

Un spaţiu vectorial ordonat F se numeşte dirijat, dacă pentru fiecare element f din F există un element $h \in K_F$ astfel încît să aibă loc relaţia $f \leqq h$.

Un spaţiu vectorial ordonat F se numeşte spaţiu vectorial topologic ordonat, dacă în F s-a introdus o topologie separată în aşa fel încît aplicaţia $(f, g) \to f + g$ a lui $F \times F$ în F şi aplicaţia $(\lambda, f) \to \lambda f$ a lui $R \times F$ în F să fie continue.

Dacă F este un spaţiu vectorial topologic real, atunci mulţimea F^* a funcţionalelor liniare şi continue definite pe F şi cu valori în R, se numeşte dualul algebric-topologic al lui F.

Dacă pentru orice f^*, g^* din F^* şi orice λ din R se definesc operaţiile $f^* + g^*$ şi λf^* prin

$$(f^* + g^*)(f) = f^*(f) + g^*(f), \quad (\lambda f^*)(f) = \lambda f^*(f)$$

pentru orice $f \in F$, atunci F^* devine faţă de aceste operaţii un spaţiu vectorial real. Dacă F este un spaţiu vectorial topologic ordonat dirijat, atunci F^* se poate organiza ca spaţiu vectorial ordonat, dacă se mai defineşte relaţia $f^* \leqq g^*$ prin $f^*(f) \leqq g^*(f)$ pentru orice $f \in K_F$. Conul elementelor pozitive, respectiv cel al elementelor strict pozitive din F^* va fi atunci

$$K_{F^*} = \{f^* \in F^* : f^*(f) \geqq 0 \text{ pentru orice } f \in K_F\},$$

$$K_F^{+} = \{f^* \in K_{F^*} : \quad \exists f \in K_F^{+} \text{ cu } f^*(f) > 0\}.$$

În afară de aceste două conuri se poate forma în F^* şi conul

$$K_{F^*}^{++} = \{f^* \in F^* : f^*(f) > 0 \text{ pentru orice } f \in K_F^{+}\}.$$

Evident că avem $K_{F^*}^{++} \subseteq K_{F^*}^{+} \subset K_{F^*}$. În timp ce totdeauna $K_{F^*} \neq \emptyset$, conurile $K_{F^*}^{+}$ şi $K_{F^*}^{++}$ pot fi vide.

1) Pentru simplificarea scrierii notăm toate relaţiile de ordine care intervin în această ucrare (inclusiv cea din mulţimea R a numerelor reale) cu acelaşi semn $\leqq$.

3. Definiţia 1. *Un spaţiu vectorial topologic ordonat $F \neq \{\theta_F\}$ se numeşte fundamental, dacă satisface următoarele condiţii :*

(F_1) *F este dirijat.*

(F_2) *Are loc egalitatea $K_{F^*}^{+} = K_{F^*}^{++}$.*

Pentru a arăta că condiţiile (F_1) şi (F_2) sînt independente, considerăm drept F spaţiul vectorial R^2 în care s-a introdus topologia cu ajutorul normei lui Euclid. Dacă definim pentru elementele $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ din acest spaţiu relaţia $f \leqq g$ prin $f_i \leqq g_i$ pentru $i = 1, 2$, atunci F devine un spaţiu vectorial topologic ordonat dirijat. Intrucît $f^* = (1,0) \in K_{F^*}^{+}$, dar nu aparţine şi lui $K_{F^*}^{++}$, rezultă că acest spaţiu nu verifică condiţia (F_2). — Dacă definim însă relaţia $f \leqq g$ prin $f_1 = g_1$ şi $f_2 \leqq g_2$ atunci F devine un spaţiu vectorial topologic ordonat care satisface condiţia (F_2) căci avem

$$K_{F^*}^{+} = K_{F^*}^{++} = \{(f_1^*, f_2^*) \in R^2 : f_2^* > 0\}.$$

În schimb el nu este dirijat, deoarece pentru elementul $f = (1, 0)$ nu există nici un element h în K_F în aşa fel încît să aibă loc relaţia $f \leqq h$.

Definiţia 2. *Un spaţiu vectorial topologic ordonat F se numeşte arhimedian, dacă $K_F^{+} \neq \emptyset$ şi dacă pentru orice pereche $(f, g) \in F \times K_F^{+}$ există un număr natural n în aşa fel încît să aibă loc relaţia $f < ng$*[2].

TEOREMA 1. *Orice spaţiu vectorial topologic ordonat arhimedian F este fundamental.*

Demonstraţie. Fie f un element arbitrar al lui F. Alegem un element f_0 din K_F^{+}. Atunci există un număr natural n în aşa fel ca $f < nf_0$. Deoarece $nf_0 \in K_F$, rezultă prin urmare că F este dirijat.

Fie acum f^* o funcţională din $K_{F^*}^{+}$. Atunci există un element $f_0 \in K_F^{+}$ pentru care $f^*(f_0) > 0$. Fie f un element arbitrar din K_F^{+}. Atunci există un număr natural n în aşa fel ca $f_0 < nf$. Ţinînd seamă de faptul că $f^* \in K_{F^*}$, avem atunci $n^{-1} f^*(f_0) \leqq f^*(f)$, de unde rezultă că $f^*(f) > 0$. Prin urmare $f^* \in K_{F^*}^{++}$. Deci spaţiul F verifică şi condiţia (F_2).

O condiţie suficientă pentru ca un spaţiu vectorial topologic ordonat să fie arhimedian este dată de teorema următoare.

TEOREMA 2. *Dacă conul K_F^{+} al unui spaţiu vectorial topologic ordonat F este o mulţime deschisă nevidă, atunci F este arhimedian.*

2) Atragem atenţia că termenul de spaţiu vectorial arhimedian este folosit în literatură şi în alt sens (a se vedea PERESSINI A. L. [4, pag. 4]).

Demonstrație. Fie dată o pereche $(f, g) \in F \times K_F^+$. Deoarece g este un punct interior al conului K_F^+ există o vecinătate V a lui θ_F, astfel ca $g + V \subseteq K_F^+$. Vecinătatea V fiind o mulțime absorbantă se poate determina un număr natural n în așa fel încît să avem $-f \in nV$. Dar atunci $ng - f \in ng + nV \subseteq K_F^+$; deci $f < ng$.

Din teorema 1 și teorema 2 se deduce

Consecința 1. *Dacă conul K_F^+ al unui spațiu vectorial topologic ordonat F este o mulțime deschisă nevidă, atunci F este fundamental.*

Remarcăm că reciproca acestei proprietăți nu este adevărată. Există spații vectoriale topologice ordonate fundamentale pentru care conul elementelor strict pozitive nu este o mulțime deschisă nevidă. Într-adevăr, fie F spațiul vectorial al funcțiilor reale definite pe intervalul $[0, 1]$. În acest spațiu definim relația $f \leq g$ prin $f(t) = g(t)$ pentru orice $t \in [0, 1]$ sau $f(t) < g(t)$ pentru orice $t \in [0, 1]$. Față de topologia convergenței punctuale F este atunci un spațiu vectorial topologic ordonat arhimedian (deci fundamental), dar conul K_F^+ nu conține nici un punct interior.

TEOREMA 3. *Dacă F este un spațiu vectorial topologic ordonat fundamental, atunci mulțimea* Int (K_F^+) *a punctelor interioare ale conului K_F^+ sau este vidă sau coincide cu K_F^+.*

Demonstrație. Presupunem că Int $(K_F^+) \neq \emptyset$ și că există un element f_0 din K_F^+ care nu este punct interior al conului K_F^+. Atunci mulțimea

$$M = \{\lambda f_0 : \lambda > 0\}$$

nu conține nici un punct interior al conului K_F.

Într-adevăr, dacă $\lambda_0 f_0$ cu $\lambda_0 > 0$ ar fi un punct interior al lui K_F, atunci ar exista o vecinătate V_0 a lui θ_F, astfel ca $\lambda_0 f_0 + V_0 \subseteq K_F$. De aici se deduce că

$$f_0 + \lambda_0^{-1} V_0 \subseteq K_F. \tag{1}$$

Deoarece $f_0 \neq \theta_F$ și spațiul F este separat, există o vecinătate V_1 a lui θ_F, astfel ca $-f_0 \notin V_1$. Punînd $V = (\lambda_0^{-1} V_0) \cap V_1$, se obține atunci în baza relației (1) incluziunea $f_0 + V \subseteq K_F^+$. Or, aceasta înseamnă că f_0 este un punct interior al lui K_F^+, ceea ce contrazice ipoteza.

Ținînd seamă de faptul că M și K_F sînt mulțimi convexe, rezultă în baza teoremei de separare a mulțimilor convexe (a se vedea KÖTHE G. [3, pag. 191]) că există o funcțională $f^* \in F^*$ și un număr real α astfel încît să avem

$$\sup \{f^*(f) : f \in M\} \leq \alpha \leq \inf \{f^*(f) : f \in K_F\} \tag{2}$$

și

$$\alpha < f^*(f) \quad \text{pentru orice } f \in \text{Int } (K_F). \tag{3}$$

Deoarece $f_0 \in M \cap K_F$ și mulțimile M, K_F sînt conuri, se deduce din (2) relația

$$f^*(f_0) = \alpha = 0. \tag{4}$$

Din (3) rezultă atunci că funcționala f^* aparține conului $K_{F^*}^+$. Spațiul F fiind fundamental avem prin urmare $f^* \in K_{F^*}^{++}$ ceea ce contrazice relația (4).

În concluzie, dacă Int $(K_F^+) \neq \emptyset$, atunci are loc egalitatea

$$\text{Int } (K_F^+) = K_F^+.$$

Ținînd seamă de această teoremă se obține

Consecința 2. *Dacă F este un spațiu vectorial topologic ordonat fundamental cu* Int $(K_F^+) \neq \emptyset$, *atunci el este arhimedian.*

TEOREMA 4. *Fie F un spațiu vectorial topologic ordonat de dimensiune finită cu $K_F \neq \{\theta_F\}$. Atunci următoarele afirmații sînt echivalente:*

1° *Au loc egalitățile*

$$\{f^* \in F^* : f^*(f) = 0 \ \textit{pentru orice} \ f \in K_F\} = \{\theta_{F^*}\},$$

$$K_{F^*}^+ = K_{F^*}^{++}.$$

2° *K_F^+ este o mulțime deschisă nevidă.*

3° *F este arhimedian.*

4° *F este fundamental.*

Demonstrație. Presupunem că are loc afirmația 1° și să demonstrăm că conul K_F^+ este o mulțime deschisă nevidă. Fie f_0 un element al mulțimii $K_F^+ \setminus \text{Int } (K_F^+)$. Rezultă că f_0 este un punct frontieră al lui K_F^+ și prin urmare există (a se vedea EGGLESTON H. G. [2, pag. 20]) o funcțională $f^* \in F^* \setminus \{\theta_{F^*}\}$, astfel ca

$$f^*(f) \geqq f^*(f_0) \quad \text{pentru orice } f \in K_F^+.$$

Ținînd seamă că K_F^+ este un con se deduce din această inegalitate relația

$$f^*(f) \geqq 0 = f^*(f_0) \quad \text{pentru orice } f \in K_F. \tag{5}$$

Dacă am avea $f^*(f) = 0$ pentru orice f din K_F, atunci ar rezulta conform ipotezei $f^* = \theta_{F^*}$, ceea ce nu se poate. Prin urmare există cel puțin un element $f_1 \in K_F^+$ cu $f^*(f_1) > 0$, adică $f^* \in K_{F^*}^+$. Dar atunci f^* aparţine datorită ipotezei conului $K_{F^*}^{++}$ ceea ce contrazice relaţia (5). În consecinţă K_F^+ este o mulţime deschisă nevidă.

Afirmaţia 3° rezultă din 2° în baza teoremei 2, iar afirmaţia 4° din 3° în baza teoremei 1.

Afirmaţia 1° se deduce din 4° ţinînd seamă că proprietatea (F_1) din definiţia 1 este echivalentă cu faptul că are loc egalitatea $F = K_F - K_F$.

ÜBER EINE KLASSE VON HALBGEORDNETEN TOPOLOGISCHEN VEKTORRÄUMEN DER OPTIMIERUNGSTHEORIE

ZUSAMMENFASSUNG

BRECKNER W. W. [1] hat gezeigt, dass man für Optimierungsaufgaben deren Zielfunktion eine konvexe Abbildung ist, die auf einer konvexen Teilmenge eines reellen oder komplexen Vektorraumes erklärt ist und Werte in bestimmten halbgeordneten topologischen Vektorräumen annimmt, eine allgemeine Dualitätstheorie entwickeln kann, die die Dualitätstheorie aus der linearen Optimierung in endlichdimensionalen Vektorräumen verallgemeinert. In der vorliegenden Arbeit werden diese halbgeordneten topologischen Vektorräume, die wir Fundamentalräume nennen, näher untersucht. Es wird gezeigt, dass jeder archimedische halbgeordnete topologische Vektorraum ein Fundamentalraum ist und dass das Innere des Kegels K_F^+ der strikt positiven Elemente eines Fundamentalraumes F entweder leer oder gleich K_F^+ ist. Weiterhin wird festgestellt, dass jeder Fundamentalraum F dessen Kegel K_F^+ innere Punkte besitzt ein archimedischer halbgeordneter topologischer Vektorraum ist.

BIBLIOGRAFIE

[1] Breckner W. W., *Dualität bei Optimierungsaufgaben in halbgeordneten topologischen Vektorräumen* (I). Revue d'analyse numérique et de la théorie de l'approximation **1**, 5–35 (1972).

[2] Eggleston H. G., *Convexity*. Cambridge: Cambridge University Press 1958.

[3] Köthe G., *Topologische lineare Räume*. I. 2. Aufl. Berlin — Heidelberg — New York: Springer-Verlag, 1966.

[4] Peressini A. L., *Ordered topological vector spaces*. New York — Evanston — London: Harper & Row Publishers, 1967.

Universitatea „Babeş-Bolyai" Cluj,
Facultatea de Matematică-Mecanică,
Catedra de Analiză.

Primit la 6. XII. 1972.