REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 1, Fascicola 1, 1972, pp. 97–107

# ASUPRA UNOR FORMULE DE MEDIE*

de

TIBERIU POPOVICIU

(Cluj)

**1.** Formula clasică a creşterilor finite

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi) \tag{1}$$

are loc dacă $f$ este o funcţie continuă pe intervalul mărginit şi închis $[x_1, x_2]$ $(x_1 < x_2)$, derivabilă pe intervalul deschis $(x_1, x_2)$ şi $\xi$ este un punct convenabil al acestui din urmă interval. Punctul $\xi$ depinde de funcţia $f$ dar singura indicaţie care se poate da asupra lui, în general, este că aparţine intervalului $(x_1, x_2)$. De altfel, oricare ar fi $c \in (x_1, x_2)$, putem construi uşor o funcţie $f$ care îndeplineşte condiţiile impuse mai sus pentru valabilitatea formulei (1) şi pentru care $c$ este singura valoare posibilă a lui $\xi$. În cazul însă cînd funcţia $f$ aparţine unei mulţimi particulare de funcţii, poziţia punctului $\xi$ se poate, în anumite cazuri, preciza mai mult prin existenţa unui astfel de punct într-o anumită submulţime particulară a lui $(x_1, x_2)$. În cele ce urmează vom examina asemenea probleme pentru formule de medie care generalizează formula (1) a creşterilor finite.

**2.** Să considerăm o funcţională liniară (deci aditivă şi omogenă) reală $R(f)$, definită pe o mulţime liniară $S$ formată din funcţii reale şi *continue* $f$, definite pe un interval dat $\mathbf{I}$ (de lungime nenulă) a axei reale. Vom presupune totdeauna că $S$ conţine toate polinoamele. Mulţimea $S$ poate să coincidă cu mulţimea tuturor funcţiilor continue $f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}$, dar poate să fie şi mai restrînsă. În cele ce urmează, cînd va fi necesar, vom preciza mulţimea $S$ şi natura elementelor sale.

*Gradul de exactitate* al lui $R(f)$ este un întreg $m \geqq -1$ astfel că $R(f)$ se anulează pe orice polinom de gradul $m$ dar este diferit de zero pe cel

---

* Aceasta lucrare este o versiune puţin modificată a unei lucrări apărute în limba franceză în Spisy prirodov. fak.Univ. J. E. Purkyne v. Brne, 5, 147–156 (1969).

puţin un polinom de gradul $m+1$. Gradul de exactitate poate să nu existe, dar dacă există el este bine determinat şi este caracterizat de proprietatea următoare:

$$R(1) \neq 0 \text{ dacă } m = -1,$$

$$R(1) = R(x) = \ldots = R(x^m) = 0, \quad R(x^{m+1}) \neq 0 \text{ dacă } m \geqq 0.$$

Cînd va fi necesar vom preciza încă natura funcţionalei liniare $R(f)$.

Reamintim definiţia *simplicităţii* funcţionalei liniare $R(f)$:

*Funcţionala liniară $R(f)$ se zice de forma simplă dacă există un număr întreg $m \geqq -1$, independent de funcţia $f$, astfel ca pentru orice $f \in S$ să avem*

$$R(f) = K[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+2}; f], \tag{2}$$

*unde $K$ este o constantă diferită de zero independentă de funcţia $f$ şi $\xi_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, m+2$ sînt $m+2$ puncte distincte ale intervalului $\mathbf{I}$, depinzînd în general de funcţia $f$.*

Numărul $m$ este determinat complet şi este tocmai gradul de exactitate al lui $R(f)$. Avem $K = R(x^{m+1})$.

În formula (2) se notează cu $[y_1, y_2, \ldots, y_r; f]$ diferenţa divizată, de ordinul $r-1$, a funcţiei $f$ pe punctele, sau nodurile (distincte sau nu) $y_1, y_2, \ldots, y_r$.

**3**. Teoria funcţiilor convexe de ordin superior permite să se găsească diferite criterii de simplicitate ale funcţionalei liniare $R(f)$. Un astfel de criteriu se poate enunţa sub forma următoare:

TEOREMA 1. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca funcţionala liniară $R(f)$, de grad de exactitate $m$, să fie de forma simplă este ca să avem $R(f) \neq 0$ pentru orice funcţie $f \in S$ convexă de ordinul $m$.*

O funcţie $f$ se zice *convexă de ordinul* $m$ pe $\mathbf{I}$ dacă toate diferenţele sale divizate $[x_1, x_2, \ldots, x_{m+2}; f]$, de ordinul $m+1$, pe noduri distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{m+2} \in \mathbf{I}$, sînt pozitive. Dacă toate aceste diferenţe divizate sînt nenegative funcţia se zice *neconcavă de ordinul* $m$ (pe $\mathbf{I}$). În fine, dacă diferenţele divizate de ordinul $m+1$ ale funcţiei $f$ sînt toate negative respectiv toate nepozitive, această funcţie se zice concavă respectiv neconvexă de ordinul $m$ (pe $\mathbf{I}$). Trecînd de la funcţia $f$ la funcţia $-f$, proprietăţile funcţiilor concave respectiv neconvexe de ordinul $m$ se deduc, în general, din proprietăţile corespunzătoare ale funcţiilor convexe respectiv neconcave de ordinul $m$. O funcţie convexă (concavă) de ordinul $m$ este un caz particular de funcţie neconcavă (neconvexă) de ordinul $m$. Pentru ca o funcţie să fie în acelaşi timp neconcavă şi neconvexă de ordinul $m$ este necesar şi suficient ca toate diferenţele sale divizate de ordinul $m+1$, pe noduri distincte, să fie egale cu zero. O astfel de funcţie se numeşte polinomială de ordinul $m$ (pe $\mathbf{I}$) şi se reduce la un polinom de gradul $m$, mai exact la restrîngerea pe $\mathbf{I}$ a unui polinom de gradul $m$.



Să trecem la o schiţare a demonstraţiei teoremei 1.

Să arătăm întîi că condiţia din enunţ este necesară. Să presupunem că funcţionala liniară $R(f)$, de grad de exactitate $m$, este de formă simplă. Fie $f \in S$ o funcţie convexă de ordinul $m$. Avem atunci formula (2). unde $K \neq 0$. Dar, diferenţa divizată din membrul al doilea este pozitivă. Avem deci $R(f) \neq 0$.

Să arătăm acum că condiţia din enunţ este şi suficientă. Să presupunem că $R(f)$ este de grad de exactitate $m$ şi este diferit de zero pentru $f \in S$ convex de ordinul $m$. Funcţia

$$\varphi = R(x^{m+1}) f - R(f) x^{m+1} \tag{3}$$

aparţine lui $S$ şi un calcul simplu ne arată că avem $R(\varphi) = 0$. Rezultă că $\varphi$ nu este convex de ordinul $m$. Dacă ţinem seamă de faptul că şi $-\varphi$ aparţine lui $S$ şi că avem $R(-\varphi) = -R(\varphi) = 0$, rezultă că $\varphi$ nu este nici concav de ordinul $m$. Există atunci $m+2$ puncte distincte $\xi_\nu \in \mathbf{I}$, $\nu = 1, 2, \ldots, m+2$ astfel ca să avem

$$[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+2}; \varphi] = 0.$$

Ţinînd seamă de liniaritatea diferenţei divizate se deduce dormula (2), unde $K = R(x^{m+1}) \neq 0$.

Cu aceasta teorema 1 este demonstrată.

Dacă $R(f)$ este de gradul de exactitate $m$ şi este de forma simplă, avem

$$R(x^{m+1})R(f) > 0, \tag{4}$$

pentru orice funcţie $f \in S$ convexă de ordinul $m$. Într-adevăr, $x^{m+1}$ este o funcţie convexă de ordinul $m$, deci dacă $f$ este convex de ordinul $m$ produsul $R(x^{m+1})R(f)$ este diferit de zero. Să presupunem că $R(x^{m+1})R(f) < 0$. Atunci funcţia $R(x^{m+1})\varphi = [R(x^{m+1})]^2 f - R(x^{m+1})\, R(f) x^{m+1}$ este (ca sumă a două funcţii convexe) o funcţie convexă de ordinul $m$. Însă $R(R(x^{m+1})\varphi) = R(x_{m+1}) R(\varphi) = 0$, ceea ce, pe baza teoremei 1, este imposibil. Cu aceasta inegalitatea (4) este demonstrată.

În aceleaşi condiţiuni dacă $f$ este o funcţie neconcavă de ordinul $m$ avem

$$R(x^{m+1})\; R(f) \geqq 0. \tag{5}$$

Într-adevăr, pentru orice $\varepsilon > 0$, funcţia $f + \varepsilon x^{m+1}$ este convexă de ordinul $m$ şi avem deci $R(x^{m+1})\; R(f + \varepsilon x^{m+1}) = R(x^{m+1}) R(f) + \varepsilon [R(x^{m+1})]^2 > 0$, de unde, făcînd pe $\varepsilon$ să tindă către 0, se deduce inegalitatea (5).

Pentru proprietățile funcțiilor convexe de ordin superior, pentru noțiunea de simplicitate a unei funcționale liniare et pentru diverse alte proprietăți utilizate în această lucrare se pot consulta lucrările mele anterioare. De exemplu, lucrarea mea din „Studii și Cercetări", Cluj [4].

Dacă $m \geqq 0$ se poate chiar afirma că punctele $\xi$, $\nu = 1, 2, \ldots, m+2$ din formula (2) sînt în interiorul intervalului **I**,

Dacă $m \geqq 0$, dacă $R(f)$ este de gradul de exactitate $m$ de formă simplă și dacă $f$ are o derivată $f^{(m+1)}$ de ordinul $m+1$ pe interiorul lui **I**, avem

$$R(f) = R(x^{m+1}) \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}, \tag{6}$$

unde $\xi$ este în interiorul lui **I**.

Formulele (2) și (6) permit, în cazul simplicității, să delimităm funcționala $R(f)$ dacă se cunosc delimitări ale diferenței divizate de ordinul $m+1$ a funcției $f$, sau ale derivatei sale de ordinul $m+1$, presupusă existentă.

**4.** Să presupunem că funcționala liniară $R(f)$ este definită pe mulțimea $S$ a funcțiilor continue pe **I** și avînd o derivată $f^{(m+1)}$ de ordinul $m+1$ pe interiorul lui **I**. Presupunem că $m \geqq 0$ și că $R(f)$ este de gradul de exactitate $m$ și de formă simplă. Atunci dacă $\xi$ este un punct dat în interiorul lui **I**, funcționala

$$R(f) - R(x^{m+1}) \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \tag{7}$$

este liniară și se anulează pe orice polinom de gradul $m+1$. Punînd $f = x^{m+2}$ și ținînd seamă de (6), se vede că există o valoare bine determinată $c$ (din interiorul lui **I**) a lui $\xi$ pentru care funcționala (7) se anulează pe orice polinom de graul $m+2$. Numărul $c$ este dat de ecuația

$$R(x^{m+2}) - (m+2) R(x^{m+1})\, c = 0. \tag{8}$$

Avem următoarea

L e m a 1. *Pe lîngă ipotezele precedente, funcționala liniară*

$$R_1(f) = R(f) - R(x^{m+1}) \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} \tag{9}$$

*este definită pe $S$ și este de grad de exactitate $m+2$.*

Este destul să arătăm că $R_1(x^{m+3})$ nu este egal cu 0.



Ținînd seamă de (8), avem

$$R(x^{m+1}) R_1(x^{m+3}) = \frac{1}{2(m+2)} [2(m+2) R(x^{m+1}) R(x^{m+3}) - (m+3) R^2(x^{m+2})]. \tag{10}$$

Dacă punem

$$P(x) = x^{m+3} + (m+3) z x^{m+2} + \frac{(m+2)(m+3)}{2} z^2 x^{m+1}, \tag{11}$$

unde $z$ este un parametru independent de $x$, avem

$$P^{(m+1)}(x) = \frac{(m+3)!}{2} (x+z)^2.$$

Avem deci $P^{(m+1)}(x) > 0$ pentru $x \neq -z$. Rezultă că polinomul (11) este convex de ordinul $m$ (peste tot). Pe baza inegalității (4), avem

$$R(x^{m+1}) R(P) =$$

$$= R(x^{m+1}) \left[ R(x^{m+3}) + (m+3) R(x^{m+2}) z + \frac{(m+2)(m+3)}{2} R(x^{m+1}) z^2 \right] > 0,$$

oricare ar fi $z$. Rezultă că discriminantul acestui trinom de gradul al doilea în $z$ este negativ, deci că avem

$$(m+3)[(m+3) R^2(x^{m+2}) - 2(m+2) R(x^{m+1}) R(x^{m+3})] < 0$$

și egalitatea (10) ne arată că

$$R(x^{m+1}) R_1(x^{m+3}) > 0. \tag{12}$$

Lema 1 rezultă de aici.

Vom vedea mai jos că funcționala liniară (9) este de forma simplă.

**5.** Vom presupune acum că intervalul **I** se reduce la intervalul mărginit și închis $[a, b]$ $(a < b)$ și că elementele $f$ ale lui $S$ au o derivată continuă de ordinul $m+1$ pe $[a, b]$.

Continuăm să presupunem că $m \geqq 0$.

Fie atunci $R(f)$ o funcțională liniară definită pe $S$, de grad de exactitate $m$ și de formă simplă. Să considerăm funcționala liniară (9), numărul $c$ fiind determinat de ecuația (8). Avem atunci $a < c < b$.

Avem următoarea

L e m a 2. *Pe lîngă ipotezele precedente, dacă există un întreg* $k$, $0 \leqq k \leqq$ $\leqq m+1$ *astfel ca funcţionala liniară* $R(f)$ *să fie mărginită faţă de norma*

$$(13) \qquad \sum_{\nu=0}^{k} \max_{x \in [a,\, b]} |f^{(\nu)}(x)|,$$

*atunci avem*

$$(14) \qquad R(x^{m+1})R_1(f) \geqq 0$$

*pentru orice funcţie* $f \in S$ *neconcavă de ordinul* $m+2$.

Fie funcţiile

$$\varphi_{m+3,\lambda} = \left(\frac{x - \lambda + |x - \lambda|}{2}\right)^{m+2},$$

unde $\lambda$ este un parametru independent de $x$ şi cuprins între $a$, şi $b$.

Funcţia $\varphi_{m+3,\lambda}$ aparţine lui $S$ şi este neconcavă de ordinul $m+2$ pentru orice $\lambda$. Avem

$$\varphi^{(m+1)}_{m+3,\lambda} = (m+2)!\left(\frac{x - \lambda + |x - \lambda|}{2}\right) = (m+2)!\ \varphi_{2,\lambda}$$

Vom demonstra că inegalitatea (14) este verificată pentru această funcţie, deci dacă punem $f = \varphi_{m+3,\lambda}$. Într-adevăr

$$R_1(\varphi_{m+3,\lambda}) = R(\varphi_{m+3,\lambda}) - (m+2)R(x^{m+1})\varphi_{2,\lambda}(c)$$

şi dacă ţinem seamă de (8), avem

$$R_1(\varphi_{m+3,\lambda}) = \begin{cases} R(\varphi_{m+3,\lambda} - x^{m+2} + (m+2)\lambda x^{m+1}) & \text{dacă } \lambda \leqq c, \\ R(\varphi_{m+3,\lambda}) & \text{dacă } \lambda \geqq c. \end{cases}$$

Dar funcţiile

$$\varphi_{m+3,\lambda}, \quad \varphi_{m+3,\lambda} - x^{m+2} + (m+2)\lambda x^{m+1}$$

sînt neconcave de ordinul $m$ deoarece derivatele lor de ordinul $m+1$ sînt respectiv

$$(m+2)!\left(\frac{x - \lambda + |x - \lambda|}{2}\right), \quad (m+2)!\left(\frac{|x - \lambda| - x + \lambda}{2}\right)$$

şi sînt ambele $\geqq 0$.



Avem deci $R(x^{m+1})R_1(\varphi_{m+3,\lambda}) \geqq 0$, şi, ţinînd seamă de (12), $R_1(x^{m+3})$ $R_1(\varphi_{m+3,\lambda}) \geqq 0$ pentru orice $\lambda$ cuprins între $a$ şi $b$.

Din teorema 15 a lucrării noastre citate [4] rezultă că funcţionala liniară $R_1(f)$ este de forma simplă, deci inegalitatea (14) este adevărată pentru orice funcţie $f \in S$ neconcavă de ordinul $m+2$ (şi chiar fără egalitate posibilă dacă $f$ este *convex* de ordinul $m+2$).

Lema 2 este demonstrată.

**6**. Putem acum demonstra următoarea

TEOREMA 2. *Dacă următoarele ipoteze sînt verificate:*

1. $m$ *este un întreg nenegativ.*

2. $S$ *este mulţimea funcţiilor* $f$ *avînd o derivată continuă de ordinul* $m+1$ *pe intervalul mărginit şi închis* $[a, b]$, $(a < b)$.

3. $R(f)$ *este o funcţională liniară definită pe* $S$, *de grad de exactitate* $m$, *de forma simplă şi mărginită faţă de norma* (13) *pentru un anumit întreg* $k$ *astfel ca* $0 \leqq k \leqq m+1$.

4. $c$ *este punctul determinat de ecuaţia* (8) (Avem atunci $a < c < b$).

5. *Funcţia* $f$ *verifică una din următoarele* 4 *proprietăţi:*

A. *este neconcavă de ordinul* $m+1$ *şi neconcavă de ordinul* $m+2$,

B. *este neconvexă de ordinul* $m+1$ *şi neconcavă de ordinul* $m+2$,

C. *este neconcavă de ordinul* $m+1$ *şi neconvexă de ordinul* $m+2$.

D. *este neconvexă de ordinul* $m+1$ *şi neconvexă de ordinul* $m+2$,

*atunci formula mediei* (6) *este verificată, în cazurile* A *şi* D, *de cel puţin un punct* $\xi$ *al intervalului* $[c, b]$ *şi, în cazurile* B *şi* C, *de cel puţin un punct* $\xi$ *al intervalului* $[a, c]$.

Este suficient să facem demonstraţia în cazul A. În acest caz funcţia

$$(15) \qquad g(x) = R(x^{m+1})\left[R(f) - R(x^{m+1})\ \frac{f^{m+1}(x)}{(m+1)!}\right]$$

este necrescătoare pe $[a, b]$ şi se anulează pe cel puţin un punct din interiorul intervalului $[a, b]$. Avem deci $g(a) \geqq 0$, $g(b) \leqq 0$, iar din lema 2 rezultă că avem şi $g(c) \geqq 0$. Proprietatea din enunţul teoremei rezultă. Putem observa că punctele $\xi$ care verifică (6) formează un interval şi proprietatea obţinută înseamnează că acest interval are cel puţin un punct comun cu $[c, b]$. Dacă, în particular, funcţia $f$ este *convexă* de ordinul $m+1$, punctul $\xi$ din formula (6) este unic şi aparţine intervalului $[c, b]$.

La fel se demonstrează teorema 2 în cazurile B, C şi D. De altfel cazurile D, C se deduc respectiv din cazurile A, B trecînd de la funcţia $f$ la funcţia $-f$.

**7.** Ca o primă aplicaţie avem

C o n s e c i n ţ a 1. *Dacă $R(f)$ este restul formulei de cuadratură de tip Gauss,*

$$\int_a^b f(x)dV(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(x_\nu) + R(f), \tag{16}$$

*unde $n$ este un număr natural, $V$ o funcţie nedescrescătoare, avînd cel puţin $n+1$ puncte de creştere şi $f$ o funcţie care admite o derivată continuă de ordinul $2n$ pe intervalul mărginit şi închis $[a, b]$, formula de medie*

$$R(f) = R(x^{2n}) \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}$$

*este verificată, în cazurile* A, D *ale teoremei 2, pentru cel puţin un punct $\xi$ din intervalul $[c, b]$ şi în cazurile* B, C *ale teoremei 2, pentru cel puţin un punct $\xi$ al intervalului $[a, c]$.*

Aici s-a pus $m = 2n - 1$ şi $c$ este dat de ecuaţia (8) corespunzătoare.

În formula (16), $x_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ sînt rădăcinile (distincte şi situate în interiorul intervalului $[a, b]$) ale polinomului ortogonal de gradul $n$ relativ la distribuţia $dV(x)$. Numerile $\lambda_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ sînt coeficienţii (toţi $> 0$) lui Cristoffel corespunzători.

Se poate generaliza această proprietate pentru formule de tip Gauss mai generale, înlocuind membrul întîi al formulei (16) cu o funcţională liniară şi nenegativă convenabilă. Printre acestea sînt şi acelea studiate de noi într-o lucrare anterioară [3].

**8.** Ca o altă aplicaţie a teoremei 2, avem următoarea

C o n s e c i n ţ a 2. *Dacă funcţia $f$ este continuă şi are o derivată de ordinul $m+1$ continuă pe un interval care conţine cele $m+2$ puncte date $x_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, m+2$, nu toate confundate şi unde $m \geqq 0$, atunci formula de medie a lui Cauchy,*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{m+2}; f] = \frac{fm+1(\xi)}{(m+1)!}$$

*este verificată, în cazurile* A, D *ale teoremei 2, pentru cel puţin un punct $\xi \geqq \frac{1}{m+2} \sum_{\nu=1}^{m+2} x_\nu$, şi în cazurile* B, C *ale teoremei 2, pentru cel puţin un punct $\xi \leqq \frac{1}{m+2} \sum_{\nu=1}^{m+2} x_\nu$.*



Diferenţa divizată $[x_1, x_2, \ldots, x_{m+2}; f]$ unde nodurile $x_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, m+2$ sînt *distincte sau nu*, este definită ca de obicei.

Se vede că funcţionala liniară $R(f) = [x_1, x_2, \ldots, x_{m+2}; f]$ verifică toate ipotezele din teorema 2 (cu condiţia ca punctele $x_\nu$ să nu fie toate confundate), $[a, b]$ fiind un interval care conţine toate nodurile $x_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, m+2$. În acest caz punctul $c$ este tocmai media aritmetică $\frac{1}{m+2} \sum_{\nu=1}^{m+2} x_\nu$ a nodurilor.

Pentru $m = 0$ se obţine proprietăţile corespunzătoare relative la formula creşterilor finite (1). Este inutil să enunţăm aici aceste proprietăţi.

**9.** Proprietatea exprimată de consecinţa 2 se poate demonstra şi direct în felul următor. Pentru fixarea ideilor să presupunem că sîntem în cazul A, deci că funcţia $f$ este neconcavă de ordinul $m+1$ şi neconcavă de ordinul $m+2$. Raţionînd aşa cum s-a făcut asupra funcţiei (15) pentru demonstrarea teoremei 2 şi utilizînd cîteva formule bine cunoscute asupra difererenţelor divizate, avem întîi, presupunînd $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{m+2}$,

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{m+2}; f] - \frac{f^{(m+1)}(x_1)}{(m+1)!} =$$

$$= \sum_{\nu=2}^{m+2} [\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{m+4-\nu}, x_2, x_3, \ldots, x_\nu; f](x_\nu - x_1) \geqq 0,$$

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{m+2}; f] - \frac{f^{(m+1)}(x_{m+2})}{(m+1)!} =$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{m+1} [x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_{m+1}, \underbrace{x_{m+2}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+2}}_{\nu+1}; f](x_{m+2} - x_\nu) \leqq 0.$$

Aici termenii în care figurează în membrul al doilea diferenţe divizate luate pe noduri toate confundate, se suprimă.

Dacă acum funcţia $f$ este neconcavă de ordinul $m+2$, avem

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{m+2}; f] \geqq \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{m+2}}{m+2}\right)$$

aşa cum am demonstrat într-o altă lucrare [2].

Consecinţa 2 rezultă acum imediat.

**10.** Proprietatea exprimată de consecința 1 rezultă din aceea exprimată de consecința 2. Într-adevăr, din niște formule pe care le-am stabilit altă dată [1], rezultă că restul $R(f)$ al formulei lui Gauss (16) diferă numai printr-un factor constant pozitiv de diferența divizată de ordinul $2n$ a funcției $f$ cu nodurile în rădăcinile polinoamelor ortogonale de gradul $n$ și $n+1$.

În unele cazuri se poate proceda și altfel. Fie, în particular, $V = x$. Atunci $x_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ sînt rădăcinile polinomului

$$P_n = \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu),$$

al lui Legendre de gradul $n$ (cu cel mai înalt coeficient egal cu 1) relativ la intervalul $[a, b]$. Atunci dacă $F$ este o primitivă a funcției $f$, avem

$$R(f) = F(b) - F(a) - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu F'(x_\nu) = R^*(F).$$

Deoarece $R(f)$ este o funcțională liniară de grad de exactitate $2n-1$, $R^*(F)$ este o funcțională liniară de grad de exactitate $2n$, deci nu diferă decît prin un factor constant (pozitiv) de diferența divizată a funcției $F$ pe nodurile $a$, $b$, $x_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ ultimele $n$ fiind luate fiecare de două ori. Se vede ușor că

$$R(f) = R^*(F) = (b-a)P_n^2(b)[a, b, x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n, x_n; F].$$

Proprietatea cerută rezultă.

## SUR CERTAINES FORMULES DE LA MOYENNE

### RÉSUMÉ

$R(f)$ est une fonctionnelle linéaire définie sur l'ensemble des fonctions $f$ ayant une dérivée continue d'ordre $m+1$ ($m \geq 0$) sur l'intervalle borné et fermé $[a, b]$ ($a < b$). Si $R(f)$ est de degré d'exactitude $m$, de la forme simple et est bornée par rapport à une norme de la forme (13), alors la formule de la moyenne (6) est vérifiée pour au moins un point $\xi$ de $[c, b]$ respectivement de $[a, c]$, où $c$ est le point de $(a, b)$ donné par (8) et suivant que la fonction $f$ vérifie en même temps, dans un ordre déterminé par le théorème 2, des propriétés de non-concavité et de non-convexité d'ordre $m+1$ et d'ordre $m+2$.



BIBLIOGRAFIE

[1] Popoviciu, T., *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (IV). Disquisitiones Math. et Physicae, **I**, 163–171 (1940).

[2] — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (V). Bulletin de l'Acad. Roumaine, **XXII**, 351–356 (1940).

[3] — *Asupra unei generalizări a formulei de intergrare numerică a lui Gauss*. Studii și Cerc. Științifice, Iași, **VI**, 29–57 (1955).

[4] — *Asupra restului în unele formule liniare de aproximare ale analizei*. Studii și Cerc. de Matematică (Cluj) **X**, 337–389 (1959).

Primit la 2. XII. 1971.