REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 1, Fascicola 1, 1972, pp. 21–39

ARITMETICA ŞI ANALIZA INTERVALELOR

de

ŞTEFAN N. BERŢI
(Cluj)

Preocupările de analiză numerică şi în special cele privitoare la erorile de calcul au adus în prim plan cercetările asupra intervalelor.

Să notăm cu **R** mulţimea numerelor reale cu **I** mulţimea intervalelor reale închise $A = [a_1, a_2]$, $a_1 \leqslant a_2$. Considerînd $a_1 = [a_1, a_1]$ pentru orice număr $a_1 \in \mathbf{R}$, avem $\mathbf{R} \subset \mathbf{I}$ şi astfel intervalele sînt generalizări ale numerelor reale. Intervalele se pot considera ca perechi ordonate de numere reale (a_1, a_2) unde $a_1 \leqslant a_2$. Pentru scopurile urmărite de noi vom privi intervalele ca mulţimi de numere reale: $A = [a_1, a_2] = \{u | a_1 \leqslant u \leqslant a_2\}$.

Primul studiu al cantităţilor multivalorice (o generalizare a intervalelor definite mai sus) a fost făcut de C. YOUNG [19], stabilind legea de subdistributivitate. Legea de subdistributivitate este valabilă într-un cadru şi mai general al aşa numitelor sisteme distributive (o generalizare a noţiunii de inel) [3].

În vederea inversării unor matrici de ordin mare, în lucrarea lui J. von NEUMANN şi H. GOLDSTINE [10] s-a studiat problema determinării valorilor elementelor matricei M^{-1}, ştiind că elementele matricei M sînt afectate de erori, deci aparţin unor intervale. Aceste cercetări au contribuit la dezvoltarea aritmeticii intervalelor.

Dintre lucrările de sinteză asupra intervalelor menţionăm [9] şi [18]. Lucrări cu caracter aplicativ în teoria ecuaţiilor diferenţiale, a cumulării erorilor în formule recurente precum şi în probleme de aproximaţie ale algebrei sînt de exemplu [2] şi [20].

Oamenii de ştiinţă români au contribuit de asemenea în mod esenţial la dezvoltarea aritmeticii intervalelor. În 1937 apare lucrarea [11] a lui T. POPOVICIU în care se studiază evaluarea valorilor unui determinant ale cărui elemente aparţin unor intervale pozitive. Cercetările asupra teoriei toleranţelor (mărimi corespunzătoare intervalelor triplex folosite în problemele de programare) au fost efectuate de I. LĂZĂRESCU [7]. Aceste cerce-

țări tehnice sînt continuate în mai multe lucrări, dintre care menționă
[8], [12], [13].

În această scurtă expunere asupra preocupărilor în domeniul aritm
ticii intervalelor, dorim să mai menționăm existența pe plan mondial
unor școli matematice care se preocupă de dezvoltarea cercetărilor de ari
metica intervalelor. Astfel în R. F. Germania K. NICKEL în S.U.A
R. MOORE în U.R.S.S, N. N. IANENCO, în Cehoslovacia I. BABUSCA, în Greci
N. APOSTOLATOS ș. a. conduc colective care cercetează aritmetica inte
valelor. Introducerea intervalelor în noțiunea generală de spațiu semio
donat [1] sau de semigrup [14], sînt preocupări teoretice actuale în aritm
tica intervalelor.

În cercetările privind aritmetica intervalelor menționăm lucrări
[14], [4] în care se pune problema rezolvării unor ecuații în care parametri
și necunoscutele sînt intervale. Este de asemenea actual studiul legii d
subdistributivitate, problema determinării sistemelor de intervale A, B, (
pentru $A(B + C) = AB + AC$ fiind pusă în [9] și tratată de mai mulț
autori ([15], [17]). Unele cercetări privind studiul ecuațiilor în aritmetica
intervalelor, a legii de subdistributivitate și anumite elemente de analiza
intervalelor (studiul progresiei geometrice generalizate la intervale) vor f
expuse în prezenta lucrare.

§ 1. Funcții de interval

Fie **H** o mulțime de sisteme ordonate de intervale $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.
Aplicația

$$f : \mathbf{H} \to \mathbf{I}$$

se numește funcție de interval, dacă

$$f(\mathbf{H} \cap \mathbf{R}^n) \subset \mathbf{R}.$$

Pentru $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ vom considera funcțiile de interval

$$f_w : \mathbf{I} \to \mathbf{R}+,\ f_w : A \mapsto \bar{A} = a_2 - a_1,$$

$$f_p : \mathbf{I} \to \mathbf{I},\ f_p : A \mapsto A^2 = \{uv | (u, v) \in A \times A\},$$

$$f_{sq} : \mathbf{I} \to \mathbf{I},\ f_{sq} : A \mapsto sqA = \{u^2 | u \in A\}.$$

Pentru $\mathbf{H} = \mathbf{I}^2$ vom considera funcțiile de interval (a se vede de exemplu [9]):

$$f_+ : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{I},\ f_+ : (A, B) \mapsto A + B = \{u + v | (u, v) \in A \times B\},$$

$$f_- : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{I},\ f_- : (A, B) \mapsto A - B = \{u - v | (u, v) \in A \times B\},$$

$$f_\bullet : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{I},\ f_\bullet : (A, B) \mapsto AB = \{uv | (u,v) \in A \times B\}.$$

Dacă $\mathbf{H} = \{(A, B) \mid 0 \notin B\}$, avem funcția de interval

$$f_/ : \mathbf{H} \to \mathbf{I},\ f_/ : (A, B) \mapsto \{u/v \mid (u, v) \in A \times B\} = A/B.$$

§ 2. Relații binare în I

Vom considera în **I** relațiile binare

$$r_\subset,\ r_<,\ r_\dashv,\ r_\supset,\ r_>,\ r_\vdash,\ \subset \mathbf{I}^2$$

definite prin

$$r_\subset = \{(A, B) \mid b_1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2\},$$
$$r_< = \{(A, B) \mid a_2 \leqslant b_1\},$$
$$r_\dashv = \{(A, B) \mid a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2\},$$
$$r_\supset = \{(A, B) \mid (B, A) \in r_\subset\},$$
$$r_> = \{(A, B) \mid (B, A) \in r_<\},$$
$$r_\vdash = \{(A, B) \mid (B, A) \in r_\dashv\}.$$

Dacă considerăm intervalul A fixat, atunci relațiile de mai sus se pot reprezenta prin domeniile

$$D_r = \{(b_1, b_2) \mid [a_1, a_2 \mid r[b_1, b_2]\}$$
$$(r \in \{r_\subset, r_<, r_\dashv, r_\subset, r_>, r_\vdash\}).$$

În figura 1 se dau reprezentările domeniilor D_r.

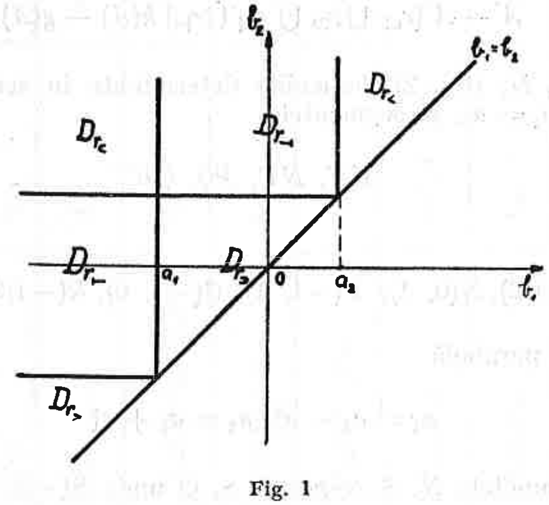

Fig. 1

Definind în mod obișnuit produsul relațiilor binare [6], [5]:

$$rr' = \{(A, B) \mid \{C \mid (A, C) \in r \;\&\; (C, B) \in r'\} \neq \emptyset\},$$

putem stabili tabelul 1 de înmulțire a relațiilor definite mai sus.

Se știe că relația binară r este tranzitivă dacă și numai dacă

$$r^2 \subset r$$

([6]). Din tabelul 1 rezultă că

$$r_\subset^2 = r_\subset,\ r_<^2 = r_<,\ r_\supset^2 = r_\supset,\ r_>^2 = r_>$$

deci relațiile $r_\subset$, $r_\supset$, $r_<$ și $r_>$ sînt tranzitive. Pe de altă parte relațiile $r_\dashv$ și $r_\vdash$ nu sînt tranzitive, avînd loc implicațiile:

$$Ar_\dashv B \;\&\; Br_\dashv C \Rightarrow A(r_< \cup r_\dashv)C$$

și

$$Ar_\vdash B \;\&\; Br_\vdash C \Rightarrow A(r_> \cup r_\vdash)C.$$

Privitor la relațiile de mai sus menționăm următoarele proprietăți

TEOREMA 1. *Dacă* $A \in \mathbf{I}$ *și* h, g $\in \{f_p, f_{sq}\}$, *atunci*

(1) $$A - A\,(r_\subset \cup r_\supset \cup r_\dashv \cup r_\vdash)\, h(A) - g(A).$$

Fie D_1, D_2 D_3 (fig. 2) domeniile determinate în semiplanul $a_2 \geq a_1$ de bisectoarea $a_1 = a_2$, de segmentele

$$MN,\ NP,\ PQ,\ QR$$

unde

$$M(1/2,\ 1/2), N(0,\ 1),\ P(-1,\ 1),\ Q(-1,\ 0),\ R(-1/2,\ -1/2)$$

și de arcele de parabolă

$$a_1 = a_2 - a_2^2,\ a_2 = a_1 + a_1^2$$

delimitate de punctele N, S respectiv S, Q unde S(−2, 2).

TABELUL 1

$r\cdot$	$r_\subset$	$r_\supset$	$r_<$	$r_>$	$r_\dashv$	$r_\vdash$
$r_\subset$	$r_\subset$	$\mathbf{I}^2$	$r_<$	$r_>$	$r_\subset \cup r_< \cup r_\vdash$	$r_\subset \cup r_> \cup r_\vdash$
$r_\supset$	$r_\subset \cup r_\supset \cup r_\dashv \cup r_\vdash$	$r_\supset$	$r_\supset \cup r_< \cup r_\dashv$	$r_\subset \cup r_> \cup r_\vdash$	$r_\supset \cup r_\dashv$	$r_\supset \cup r_\vdash$
$r_<$	$r_\subset \cup r_< \cup r_\dashv$	$r_<$	$r_<$	$\mathbf{I}^2$	$r_<$	$r_\subset \cup r_< \cup r_\dashv$
$r_>$	$r_\subset \cup r_> \cup r_\vdash$	$r_>$	$\mathbf{I}^2$	$r_>$	$r_\subset \cup r_> \cup r_\vdash$	$r_>$
$r_\dashv$	$r_\subset \cup r_\dashv$	$r_\supset \cup r_< \cup r_\dashv$	$r_<$	$r_\subset \cup r_> \cup r_\vdash$	$r_< \cup r_\dashv$	$r_\subset \cup r_\supset \cup r_\dashv \cup r_\vdash$
$r_\vdash$	$r_\subset \cup r_\vdash$	$r_\supset \cup r_> \cup r_\vdash$	$r_\supset \cup r_< \cup r_\dashv$	$r_>$	$r_\subset \cup r_\supset \cup r_\dashv \cup r_\vdash$	$r_> \cup r_\vdash$

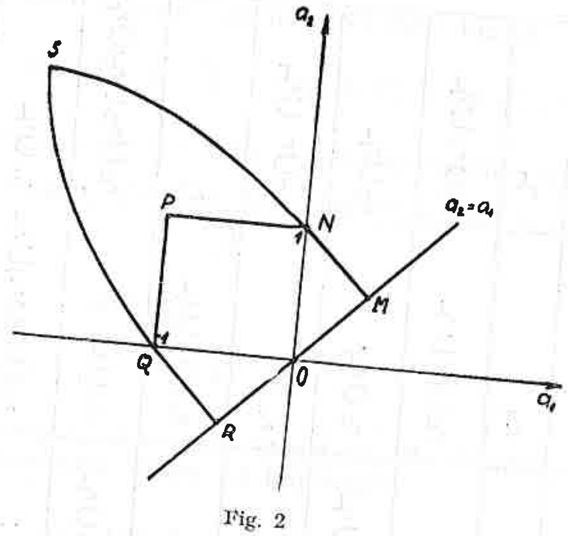

Fig. 2

Cu aceste notaţii putem aduce următoarea precizare formulei (1)

TABELUL 2

		$A^2 - A^2$	$A^2 - sqA$	$sqA - A^2$	$sqA - sqA$
$A - A$	$\subset$	$D_2 \cup D_3$	D_3	D_3	D_3
	$\supset$	D_1	D_1	D_1	$D_1 \cup D_2$
	$\dashv$	$\emptyset$	$\emptyset$	D_2	$\emptyset$
	$\vdash$	$\emptyset$	D_2	$\emptyset$	$\emptyset$

Prin urmare au loc relaţiile

(1.1) $$A - A (r_{\subset} \cup r_{\supset}) A^2 - A^2,$$

(1.2) $$A - A (r_{\subset} \cup r_{\supset})\, sqA - sqA,$$

(1.3) $$A - A (r_{\subset} \cup r_{\supset} \cup r_{\dashv})\, sqA - A^2$$

(1.4) $$A - A (r_{\subset} \cup r_{\supset} \cup r_{\vdash}) A^2 - sqA.$$

O altă proprietate deosebit de importantă este clasica lege de subdistributivitate:

(2) $$A(B + C)\, r_{\subset} AB + AC,$$

lege cu care ne vom ocupa mai pe larg în § 5.

O altă proprietate interesantă (nevalabilă pentru mărimi multivalorice în general [19]) este relaţia

(3) $$A^2 - B^2 \subset (A + B)(A - B),$$

valabilă pentru orice pereche de intervale A, B.

Încheiem acest paragraf prin menţionarea următoarelor relaţii:

(4) $$(A - A,\ 2A^2) \in r_{\subset} \cup r_{\supset} \cup r_{<} \cup r_{\dashv},$$

şi

(5) $$(2AB,\ A^2 + B^2) \in r_{\subset} \cup r_{<} \cup r_{\dashv}.$$

Domeniile din semiplanul $b_1 \leqslant b_2$ în care avem $(2AB,\ A^2 + B^2) \in r_{\subset}$, $r_{<}$ sau $r_{\dashv}$ sînt delimitate de arce de parabolă, hiperbolă şi de prima bisectoare, în punctele de intersecţie a acestor curbe arcele respective racordîndu-se prin continuitate (nu şi prin continuitatea derivatelor!). În vecinătatea originii, unde B are sens (octantele 2—5) are loc totdeauna relaţia

(6) $$2AB \subseteq A^2 + B^2.$$

§ 3. Unele ecuaţii în aritmetica intervalelor

În cadrul celui de al IV-lea congres al matematicienilor de expresie latină (Bucureşti-Braşov 1969 [16] p. 32—33) am tratat problema rezolvării a ecuaţiilor

(7) $$AX + B = CX + D$$

şi

(8) $$(AX^2)/X = B,$$

unde A, B, C, $D \in \mathbf{I}$ iar $X \in \mathbf{I}$ este un interval necunoscut.

Studiul ecuaţiei (7) în cazul $C = [0, 0] = 0$ se află în [4] iar în cazul $C = B = [0, 0] = 0$ ecuaţia este considerată în [14] legată de problema factorizării în aritmetica intervalelor.

Studiul general al rezolvării ecuaţiei (6) este foarte laborios. Ne mărginim la enunţarea următoarelor două teoreme, urmînd ca într-o altă lucrare să tratăm studiul cazului general.

TEOREMA 2. *Dacă $A > 0$, $0 \in C$, $a_2 > c_2$, atunci condiţia necesară şi suficientă pe care trebuie să o satisfacă capetele intervalelor A, B, C şi D astfel încît ecuaţia* (7) *să aibă o soluţie şi*

(9) $$x_1 < 0,\ x_2 > 0,\ c_1 x_2 > c_2 x_1,\ c_1 x_1 < x_2 c_2$$

este

$$(10)\quad \begin{cases} 0 < -c_1 < c_2 < a_2,\ 0 < a_1 < a_2,\ b_1 < b_2,\ d_1 < b_2, \\ \bar{B} + (b_1 - d_1) \cdot \dfrac{2c_2 - c_1}{c_2} < \bar{D} < \bar{B} + (b_1 - d_1) \cdot \dfrac{2c_1 - c_2}{c_1}. \end{cases}$$

Dacă are loc condiţia (10), *atunci soluţia ecuaţiei* (6), care *satisface condiţiil*[e] (9) *este*

$$(11)\quad X = \left[\frac{d_1 - b_1}{a_2 - c_2},\ \frac{d_2 - b_2}{a_2 - c_2}\right].$$

Forma parametrică generală a intervalelor A, B, C, D care satisfa[c] *proprietăţile* (10) *este*

$$(12)\quad \begin{cases} A = [at,\ a],\ B = [c - d,\ c - d + e],\ C = [-asr,\ as], \\ D = \left[c - d - f,\ c - d + e + \dfrac{f}{r}(r + q + r^2(1 - q))\right], \end{cases}$$

unde, $a, b, c, d, e, f, \in \mathbf{R}+$ *şi* $q, r, s, t \in (0,\ 1)$.

TEOREMA 3. *Dacă* $A > 0$, $0 \in C$, $c_1^2 < a_2^2$, *atunci nu putem alege astfel intervalele* A, B, C, D, *încît ecuaţia* (7) *să aibă o soluţie* X *care să verifice condiţiile*

$$(13)\quad 0 \in X,\ c_1x_2 < c_2x_1,\ c_1x_1 > c_2x_2.$$

Să considerăm în continuare intervalele

$$(14)\quad A,\ B > 0$$

şi numărul natural n. Punem problema rezolvării ecuaţiei

$$(15)\quad (AX^{n+1}) : X = B$$

(cazul $n = 1$ corespunde ecuaţiei (8)).

În ipoteza (14), ecuaţia (15) este echivalentă cu ecuaţia

$$(16)\quad \left[\frac{a_1x_1^{n+1}}{x_2},\ \frac{a_2x_2^{n+1}}{x_1}\right] = [b_1,\ b_2].$$

care are ca soluţie

$$(17)\quad X = \left[\left(\frac{b_1^{n+1}b_2}{a_1^{n+1}a_2}\right)^{\frac{1}{(n+1)^2-1}},\ \left(\frac{b_1b_2^{n+1}}{a_1a_2^{n+1}}\right)^{\frac{1}{(n+1)^2-1}}\right]$$

Pentru ca (17) să fie un interval, este necesar şi suficient ca

$$(18)\quad b_2 \geqslant \frac{b_1a_2}{a_1}$$

Astfel am obţinut

TEOREMA 4. *În condiţiile* (14) *şi* (18) *soluţia ecuaţiei* (15) *este intervalul dat de* (17).

§ 4. Quasioperaţii

În cazul cînd $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$, $D = \delta$ sînt numere reale (intervale cu capetele egale) şi $\alpha \neq \gamma$, soluţia ecuaţiei (7) este numărul real

$$(19)\quad x = \frac{\delta - \beta}{\alpha - \gamma},$$

prin urmare soluţia ecuaţiei (7), cînd există, (pentru A, B, C, D intervale) reprezintă o extindere a funcţiei reale (19). Asemănător soluţia (17) a ecuaţie (16) este o extindere a funcţiei reale $X = X(\alpha,\ \beta) = \sqrt[n]{\frac{\beta}{\alpha}}$. Aceste observaţii ne conduc în mod firesc la problema determinării implicite a unor funcţii de intervale (§ 1) definite prin intermediul unor ecuaţii.

Fie $k > 0$ un număr întreg şi fie funcţiile de interval

$$(20)\quad s_1(A,\ B) = A - B,\ s_k(A,\ B) = A - (A - s_{k-1}(A,\ B))\ k = 2, 3, 4, \ldots$$

definite pe $\mathbf{H} = \mathbf{I}^2$. Vom nota $s_k(A,\ B) = [m_k,\ n_k]$. Din formulele de recurenţă (20) rezultă:

$$m_k = a_1 - b_2 - (k - 1)\bar{A},\ n_k = a_2 - b_1 + (k - 1)\bar{A}.$$

Astfel

$$(21)\quad s_k((A,\ B)) = [a_1 - b_2 - (k - 1)(a_2 - a_1),\ a_2 - b_1 + (k - 1)(a_2 - a_1)].$$

Se demonstrează următoarea teoremă:

TEOREMA 4. *Ecuaţia*

$$(22)\quad s_k(X,\ A) = B$$

are soluţie (interval) atunci şi numai atunci cînd:

$$(23)\quad \bar{A} \leqslant \bar{B}.$$

În cazul (23), *soluția ecuației* (22), *care se va nota cu* $A \oplus_k B$ *este*

$$(24) \quad X = \left[\frac{k(a_1 + a_2 + b_1 + b_2) - a_1 - b_2}{2k - 1},\ \frac{k(a_1 + a_2 + b_1 + b_2) - a_2 - b_1}{2k - 1}\right] = A \oplus_k B$$

Formula (24) ne dă un interval pentru orice număr real $k > 1/2$ astfel se extinde problema rezolvării ecuației (22) pentru un număr $k > 1/$ (formulele de recurență (20) pierzîndu-și interpretarea discretă obișnuită)

În figura 3 se dă reprezentarea în funcție de k a capetelor intervalului $A \oplus_k B$. Din cele de mai sus reiese că pentru $k > 1/2$,

$$f_{\oplus_k} : (A,\ B) \mapsto A \oplus_k B$$

este o funcție de interval cu $\mathbf{H} = \{(A,\ B) \mid \bar{A} \leqslant \bar{B}\}$.

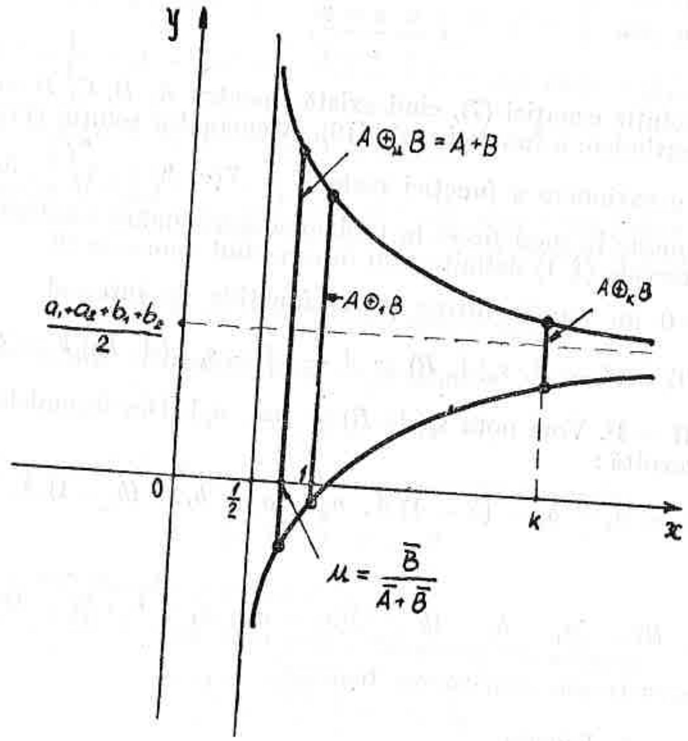

Fig. 3

Studiul operației $\oplus_k$ este deosebit de interesant. Vom aminti aici numai problema discuției relației care există între intervalele

$$A \oplus_k (B \oplus_m C) \text{ și } (A \oplus_k B) \oplus_m C$$

tudiul unor asemenea relații de ,,semiasociativitate'' a fost subiectul nei expuneri făcute în cadrul unui seminar de ecuații funcționale organizat de Societate de stiințe matematice din R.S.R.la Iași (1971) și împreună u studiul ,,semidistributivității' pentru quasioperații (a se vedea mai jos acest paragraf) urmează să facă obiectul unei lucrări special destinate uasioperațiilor.

Legat de quasiadunarea definită, voi menționa formulele asimptotice:

$$(25) \qquad A \oplus_{\frac{1}{2}} B = (-\infty,\ \infty)$$

și

$$(26) \qquad A \oplus_{+\infty} B = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{2} \in \mathbf{R}.$$

Dacă $k > 0$ este un număr întreg și pentru

$\mathbf{H} = \{(A,\ B) \mid a_1 > 0,\ b_1 > 0\}$, definim

$$(27) \qquad d_1(A,\ B) = A/B,\ d_k(A,\ B) = A/(A/d_{k-1}(A,\ B)),\ k = 2,\ 3,\ \ldots,$$

atunci

$$(28) \qquad d_k(A,\ B) = \left[\frac{a_1}{b_2}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{k-1},\ \frac{a_2}{b_1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{k-1}\right]$$

și are loc

TEOREMA 5. *Ecuația*

$$(29) \qquad d_k(X,\ A) = B$$

are o soluție atunci și numai atunci cînd

$$(30) \qquad a_2/a_1 \leqslant b_2/b_1.$$

Dacă ecuația (29) *este rezolvabilă, atunci notăm cu* $A \odot_k^- B$ *soluția acestei ecuații și avem:*

$$(31) \qquad X = A \odot_k^- B = \left[\sqrt[2k-1]{\frac{(a_1 a_2 b_1 b_2)^{k-1}}{a_1 b_2}},\ \sqrt[2k-1]{\frac{(a_1 a_2 b_1 b_2)^{k-1}}{a_2 b_1}}\right]$$

Astfel pentru $\mathbf{H} = \{(A,\ B) \mid a_1 > 0,\ b_1 > 0,\ a_1 b_2 > a_2 b_1\}$,

$$f_{\odot_k} : (A,\ B) \mapsto A \odot_k B$$

este o funcție de interval. Capetele intervalului $A \odot_k B$ în funcție de (și aici are sens extinderea pentru $k > 1/2$ real) sînt reprezentate în figu 4. Se demonstrează următoarele formule asimtotice:

(32)
$$A \odot_{\frac{1}{2}} B = [0, \infty)$$

și

(33)
$$A \odot_{\infty} B = \sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2}.$$

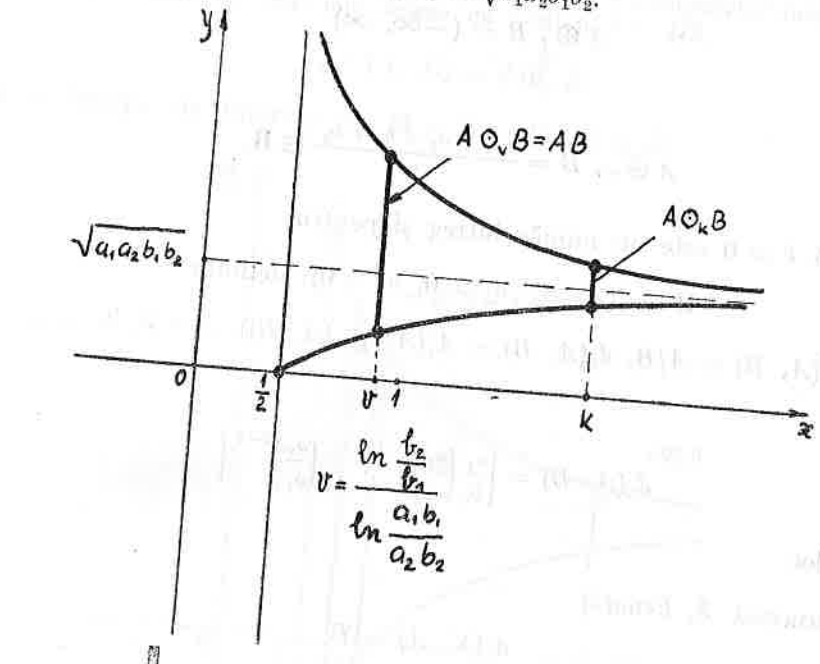

Fig. 4

Cercetarea relației care există între intervalele

$$A \odot_k (B \oplus_m C) \quad \text{și} \quad (A \odot_k B) \oplus_m^{\cdot} (A \odot_k C)$$

este legea de „subdistributivitate" pentru quasioperații.

O b s e r v a ț i i. 1° Studiul legilor de asociativitate a adunării (sau a înmulțirii, care poate fi ușor formulată) precum și a legii de distri- butivitate pentru quasioperații nu conduce neapărat la intervale care se află între ele în relații de inclusiune. Pot apare și cazuri deosebite în care apar relații $r_<$, $r_{\dashv}$ etc. Pentru studiul acestor legi trebuie presupus că intervalele considerate există. In caz contrar anumite intervale sînt mul- țimi vide sau nu există.

2°. Quasiadunarea este o generalizare a adunării obișnuite a intervale- lor (a restricției la $\mathbf{H} = \{(A, B) \mid \bar{A} \leqslant \bar{B}\}$ a adunării obișnuite) și anume, are loc formula

(34)
$$A + B = A \oplus_u B, \quad u = \bar{B}/(\bar{A} + \bar{B}).$$

Asemănător, quasiînmulțirea conține ca un caz particular înmulțirea obiș- nuită (o restricție a acesteia) și are loc formula

(35)
$$AB = A \odot_v B, \; v = (\ln \, b_2/b_1)/(\ln \, ((a_1 b_1) \, / \, (a_2 b_2)).$$

§ 5. Despre legea de subdistributivitate

Să considerăm o mulțime M și operațiile binare $+,.$ definite pe M. Dacă pentru orice $a, b, c \in M$ are loc relația de distribuitivitate

(36)
$$a(b + c) = ab + ac,$$

atunci sistemul $(M, +,.)$ se numește un sistem distributiv. Vom nota cu $\mathcal{P}(M)$ mulțimea părților lui M și pentru $A, B \subset M$ (deci $A, B \in \mathcal{P}(M)$) definim:

(37) $A + B = \{u + v \mid (u, v) \in A \times B\}, \; AB = \{uv \mid (u, v) \in A \times B\}.$

Este valabilă [3]:

TEOREMA 6. *Dacă $(M, +,.)$ este un sistem distributiv atunci $(\mathcal{P}(M), +,.)$ este un sistem subdistributiv, deci*

(38)
$$A, B, C, \in \mathcal{P}(M) \Rightarrow A(B + C) \subset AB + AC.$$

În cazul cînd $(M, +,.)$ este un sistem distributiv și $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$ este o familie de submulțimi din M, închisă față de operațiile + și · (din $\mathcal{P}(M)$), atunci $(\mathcal{A}, +, .)$ este de asemenea un sistem subdistributiv. Pentru $(M, +, .) = (\mathbf{R}, +, .)$ și $(\mathcal{A} = \mathbf{I})$ se obține legea de subdistributivitate din aritmetica intervalelor (de exemplu [9]) iar în cazul $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbf{R})$ se obține legea de subdistributivitate din algebra cantităților multivalorice ([19]). În introducere am arătat că în [15], [17] s-au studiat condițiile în care are loc distributivitatea, deci determinarea mulțimii

(39)
$$\{(A, B, C) \mid A(B + C) = AB + AC)\}.$$

În studiul semidistributivității prezintă interes rezolvarea unei pro- bleme mai generale: studiul poziției pe care o are intervalul $A(B + C)$ în interiorul intervalului $AB + AC$. Notăm:

(40) $A(B + C) = [u, v], \; AB + AC = [u - a, \; v + b] \; (u \leqslant v; \; a, b \in \mathbf{R}+)$

(legea de subdistributivitate asigură condiția de mai sus: $a, b \in \mathbf{R}^+$). C
zurile cînd $a = b = 0$ sînt considerate în studiul distributivității.

Problema care se pune este compararea mărimilor a, b în funcție d
intervale A, B, C. Problema este de asemenea laborioasă. În lucrare n
mărginim să dăm cîteva rezultate particulare, care permit prevederea r
zolvării, în cazul general, a problemei.

În funcție de semnele capetelor intervalelor $A, B, C, B + C$ ave
următoarele 30 de cazuri posibile de sisteme (A, B, C) de triplete ordonat
de intervale:

TABELUL 3

	A	B	C	$B+C$		A	B	C	$B+C$		A	B	C	$B+C$
1	+ +	+ +	+ +	+ +	11	− +	+ +	+ +	+ +	21	− −	+ +	+ +	+ +
2	+ +	+ +	− +	+ +	12	− +	+ +	− +	+ +	22	− −	+ +	− +	+ +
3	+ +	+ +	− +	− +	13	− +	+ +	− +	− +	23	− −	+ +	− +	− +
4	+ +	+ +	− −	+ +	14	− +	+ +	− −	+ +	24	− −	+ +	− −	+ +
5	+ +	+ +	− −	− +	15	− +	+ +	− −	− +	25	− −	+ +	− −	− +
6	+ +	+ +	− −	− −	16	− +	+ +	− −	− −	26	− −	+ +	− −	− −
7	+ +	− +	− +	− +	17	− +	− +	− +	− +	27	− −	− +	− +	− +
8	+ +	− +	− −	− +	18	− +	− +	− −	− +	28	− −	− +	− −	− +
9	+ +	− +	− −	− −	19	− +	− +	− −	− −	29	− −	− +	− −	− −
10	+ +	− −	− −	− −	20	− +	− −	− −	− −	30	− −	− −	− −	− −

Cazurile în care avem

(41) $$0 \in A \cup (B \cap C \cap (B + C))$$

se numesc mixte, iar celelalte cazuri se numesc simple. Deci cazurile 12,
13, 15, 17, 18 și 19 sînt cazuri mixte, celelalte cazuri fiind simple.

S t u d i u l c a z u r i l o r s i m p l e. Are loc

TEOREMA 7. *In cazurile simple în care*

(42) $$\operatorname{sgn} b_1 = \operatorname{sgn} c_1 \text{ și } \operatorname{sgn} b_2 = \operatorname{sgn} c_2$$

deci în cazurile 1, 7, 10, 11, 20, 21, 27 *și* 30 *are loc distributivitatea* (deci în
(40) avem $a = b = 0$).

Pentru celelalte cazuri simple au loc rezultate de următoarea natură:

TEOREMA 8. *În cazurile* 2 *și* 3 *avem* $b = 0$, *iar în cazurile* 8 *și* 9 *avem*
$a = 0$. *În cazurile* 2 *și* 3 *avem* $a = -(a_2 - a_1)c_1$, *respectiv* $a = (a_2 - a_1)b_1$.
In cazurile 8 *și* 9 *avem* $b = -(a_2 - a_1)$, *respectiv* $b = (a_2 - a_1)b_2$.

În general cazului 2 îi corespunde reprezentarea parametrică a intervalelor A, B, C:

(43) $$A = [a,\ a + b],\ B = [c,\ c + d],\ C = [-cs,\ e]$$

unde $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}^+$ și $0 \leqslant s \leqslant 1$. În general, studiul sub formă parametrică a intervalelor A, B, C permite evaluări comparative precise ale mărimilor a, b din (40).

În cazurile simple este posibil ca a și b să fie pozitive în acelaș timp.

În continuare vom da și un rezultat ilustrativ privind un caz mixt.

Fie A, B, C un sistem ordonat de intervale pentru care

(44) $$0 \in A \cup C \cup (B + C),\quad B \neq 0.$$

(44) corespunde evident cazului 13. Dacă notăm

(45) $$s = -\frac{b_2 c_1}{b_1},\quad t = \frac{b_1}{b_2}$$

atunci (s, t) (45) este pătratul unitate $0 \leqslant s, t \leqslant 1$ din primul cadran, care pătrat unitate se descompune în domeniile

$$D = \{(s,\ t) |\ 0 \leqslant s \leqslant 1/2\ \&\ s/(1-s) \leqslant t \leqslant 1\},$$

$$D' = \{(s,\ t) | 0 \leqslant S \leqslant 1/2\ \&\ 0 \leqslant t \leqslant s/(1-s)\}$$

$$D'' = \{(s,\ t)\ |\ 1/2 \leqslant s \leqslant 1\ \&\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

$$D_{II} = D' \cup D'',$$

reprezentate în figura 5.

În cazul 13 (44) are loc

TEOREMA 9. *Cu notația* (45) *au loc echivalențele:*

(46) $(s,\ t) \in D_I \Leftrightarrow a_1 < 0,\ a_2 > 0,\ b_1 > 0,$
$b_2 > b_1,\ c_1 < -(b_1 + b_2),\ c_2 > 0,$

(47) $(s,\ t) \in D' \Leftrightarrow a_1 < 0,\ a_2 > 0,$
$b_1 > 0,\ b_2 > b_1,\ -(b_1 + b_2) < c_1 <$
$< -2b_1,\ c_2 > 0$

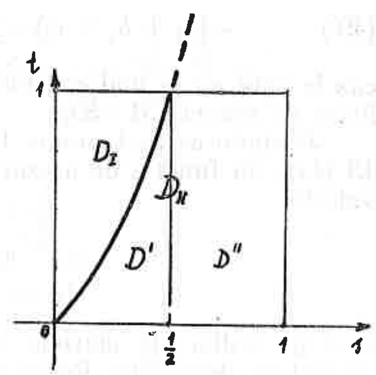

Fig. 5

și

(48) $(s, t) \in D' \Leftrightarrow a_1 < 0,\ a_2 > 0,\ b_1 > 0,\ b_2 > b_1,\ -2b_1 < c_1 < -b$
$c_2 > 0.$

Prin urmare se pot construi efectiv sistemele de intervale $(A, B, C$ care satisfac condițiile din teorema 9, deci pentru care (s, t) aparțin domeni lor D_{I}, D' respectiv D''.

TEOREMA 10. *În cazul D_{I} avem inegalitățile*

(49) $$0 \leqslant (b_1 + b_2 + c_1) \leqslant \sqrt{b^2 + 4(b_1 + c_1)c_1} - b_2 \leqslant -c_1$$

și echivalențele:

(50) $$0 < c_2 < -(b_1 + b_2 + c_1) \Leftrightarrow \frac{a_1 c_2}{c_1} < \frac{a_1(b_2 + c_2)}{b_1 + c_1} < \frac{a_1(b_1 + c_1)}{b_2 + c_2} < \frac{a_1 c_1}{c_2},$$

(51) $$-(b_1 + b_2 + c_1) < c_2 < \sqrt{b_2^2 + 4(b_1 + c_1)c_1} - b_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_1 c_2}{c_1} < \frac{a_1(b_1 + c_1)}{b_2 + c_2} < \frac{a_1(b_2 + c_2)}{b_1 + c_2} < \frac{a_1 c_1}{c_3}.$$

(52) $$\sqrt{b_2^2 + 4(b_1 + c_1)c_1} - b_2 < c_2 < -c_1 \Leftrightarrow \frac{a_1(b_1 + c_1)}{b_2 + c_2} < \frac{a_1 c_2}{c_1} < \frac{a_1 c_1}{c_2} < \frac{a_1(b_2 + c_2)}{b_1 + c_1}.$$

(53) $$c_2 < -c_1 \Leftrightarrow \frac{a_1(b_1 + c_1)}{b_2 + c_2} < \frac{a_1 c_1}{c_2} < \frac{a_1 c_2}{c_1} < \frac{a_1(b_2 + c_2)}{b_1 + c_1}.$$

În cazul D_{II}(deci D' sau D'') avem inegalitățile:

(49') $$-(b_1 + b_2 + c_1) < 0 < \sqrt{b^2 + 4(b_1 + c_1)c_1} - b_2 < -c_1$$

caz în care nu se mai consideră echivalența (50), celelalte echivalențe fiind luate în seamă (51–53).

Bazîndu-ne pe teorema 10, se demonstrează ușor (în cazul considerat, 13 (44)), în funcție de așezarea numărului a_2 în intervalele determinate de valorile

$$\frac{a_1 c_2}{c_1},\ \frac{a_1(b_2 + c_2)}{b_1 + c_1},\ \frac{a_1(b_1 + c_1)}{b_2 + c_2},\ \frac{a_1 c_1}{c_2}$$

a căror ordine de mărime este determinată de echivalențele (49)–(53)) că putem determina forma parametrică efectivă a intervalelor A, B, C în cazul considerat și deci să studiem comparativ mărimile a, b (40).

tul unei lucrări legată de aritmetica intervalelor.

Studiul general al subdistributivității și racordarea cazurilor este obiectul unei lucrări legată de aritmetica intervalelor.

§ 6. Unele probleme din analiza intervalelor

Majoritatea problemelor tratate mai sus (cu excepția formulelor asimptotice din § 4) pot fi rezolvate folosind metode algebrice. Spunem că problemele respective aparțin domeniului aritmeticii intervalelor, uneori algebrei intervalelor. În fond se fundamentează sistemul algoritmic de calcul cu intervalele, cînd ele apar în număr finit, sau cînd intervalele considerate nu se obțin printr-un proces de trecere la limită.

Problema însumării unor serii de intervale, definirii unei derivate generalizate pentru intervale etc. face parte din analiza intervalelor.

Ilustrativ vom prezenta aici numai cazul însumării unor intervale, extinzînd problema determinării sumei progresiei geometrice infinite.

Vom enunța următoarele rezultate.

TEOREMA 11. *Să notăm* $\alpha = \frac{a_1(1 + a_2)}{1 - a_1^2}$, $\beta = \frac{a_1^2 + a_1^n}{1 - a_1^2}$.

Dacă $0 \leqslant a_2 \leqslant -a_1$, atunci

(54) $$\sum_{j=1}^{n} A^j = \begin{cases} \left[\alpha - \frac{(1 + a_2)a_1^{n+1}}{1 - a_1^2},\ \beta - \frac{(a_1^1 + a_a)a_1^n}{1 - a_1^2}\right] & \text{dacă } n \text{ este par,} \\ \left[\alpha - \frac{(1 + a_2)a_1^{n+2}}{1 - a_1^2},\ \beta - \frac{(1 + a_2)a_1^{n+1}}{1 - a_1^2}\right] & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Dacă $0 \leqslant a_2 \leqslant -a_1 < 1$, *atunci*

(55) $$\sum_{j=1}^{\infty} A^j = \left[\frac{a_1}{1 - a_2} - \frac{a_1^2 - a_2^2}{(1 - a_2)(1 - a_1^2)},\ \frac{a_2}{1 - a_2} + \frac{a_2^2 - a_2^2}{(1 - a_2)(1 - a_1^2)}\right]$$

și

(56) $$\frac{A}{1 - A} = \left[\frac{a_1}{1 - a_2},\ \frac{a_2}{1 - a_2}\right].$$

TEOREMA 12. *În ipotezele teoremei 11, avem*

(57) $$\frac{A}{1 - A} \subset \sum_{j=1}^{\infty} A^j.$$

În general, dacă $A \in \mathbf{I}$, şi intervalele

$$\frac{A}{1 - A}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} A^j$$

există, atunci relaţia (57) are loc (în unele cazuri putem avea egalitate

Rezultate de forma (57) ne permite studiul erorilor de calcul ce intervi prin însumarea unor serii de intervale, faţă de folosirea extinderii la inter vale a sumei seriei numerice corespunzătoare.

THE ARITHMETIC AND THE ANALYSIS OF INTERVALS

SUMMARY

In our paper we present many results in connection with problems for intervals. The interval functions are defined in §1, and the interval relations in § 2. As examples are given the interval functions f_w, f_p, f_{sq}, f_+, $f_\cdot$, $f_/$ and the interval relations $r_\subset$, $r_<$, $r_\dashv$, $r_\supset$, $r_>$, $r_\vdash$. The domains $D_r = \{(b_1, b_2) \mid [a_1, a_2]\, r\, [b_1, b_2]\}$ (for the above relations) are represented in Fig. 1. for a fixed interval $A = [a_1, a_2]$. The products of the above relations are given in the first table of § 2. The comparison of the intervals

$$A - A \text{ and } A^2 - A^2,\ A^2 - sqA,\ sqA - A^2,\ sqA - sqA$$

is given in Fig. 2. (see also second table in §2). The relations between the intervals $A^2 - A^2$ and $(A + B)(A - B)$, $A - A$ and $2A^2$, $2AB$ and $A^2 + B^2$ are also presented in §2.

The study of the interval equations

$$AX + B = CX + D \text{ and } (AX^{n+1}) : X = B$$

is given (only in some particular cases) in §3.

The quasioperations $\oplus_k$, $\odot_k$, defined as solutions of some recurrent interval equations, are studied in §4.

The subdistributive law (s.l) is studied in §5. A general presentation of the s.l. for distributive systems is given, also some problems in the study of comparison for the intervals $A(B + C)$ and $AB + AC$.

In §5 is given a brief presentation for an interval series.

BIBLIOGRAFIE

[1] Apostolatos, N. T. *More general interval aritmetics and applications* Bull. Soc. Math. Grèce, **10,** 136–180 (1969); M. R. 43/1462 (1972).

[2] Bubuşca, I. M. Prager, E. Vitaseck, *Numerical processes in differential equations*. Praha, 1968.

[3] Berţi, Ş. N., *Intervalele şi aritmetica lor în analiza numerică*. Gazeta matematică, A, **LXXV,** 8, 309–313 1970.

[4] — *The solution of an interval equation*. Mathematica (Cluj), **11 (34),** 1969, 189–194 (1969).

[5] — *The geometry of the relations in the set of real numbers*. Mathematica (Cluj), **11 (34)** 29–48 (1969).

[6] Курош, А. Г., Лекуии по общей алгебре. Moscova, 1962.

[7] Lăzărescu, I., *Toleranţa. Calculul cu toleranţe*. Bucureşti, Ed. Tehn., 1948.

[8] — *Axiomatizarea teoriei toleranţelor*. Bulet. St. al Institutului politehnic Cluj, II 137–141 (1968).

[9] Moore, R. E., Interval analysis. 1966.

[10] Neumann, J. von *and* Goldstine, H., *Numerical inverting of matrices of high order*. Bull. Amer. Math. Soc. **53,** 1021–1099 (1947)

[11] Popoviciu, T., *Remarques sur le maximum d'un déterminant dont tous les éléments sont non-négatifs*. Mathematica (Cluj), **XIII,** 242–256 (1937).

[12] Rabinovici, I., *Unele probleme privind cotarea funcţională şi cotarea tehnologică*. Standardizarea, 21, 449–504 (1969)

[13] — *Toleranţe şi ajustaje* (2 volume). Editura Tehnică, 1971.

[14] Ratschek, H., *Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik*. J. Reine und Angw. Math. **252,** 128–138 (1972).

[15] — *Die Subdistributivität der Intervallarithmetik*. ZAMM, 189–192 (1970).

[16] — *al IV-lea Congres al matematicienilor de expresie latină*. Rezumatele lucrărilor. Bucureşti-Braşov, 1969, pag. 32–33.

[17] Spaniol, O., *Die Distributivität in der Intervallarithmetik*. Computing, **5,** 6–16 (1970).

[18] — *Topics in interval analysis*. Ed. E. Hansen, Oxford, 1969.

[19] Young, R. C. *The algebra of many-valued quantities*. Math. Ann., **4.** 260–290 (1931).

[20] Wilkinson, H., *Rounding errours in algebraic processes* Department of scientific and industrial research, London 1962.

Primit la 27. XII. 1971.