REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 2, Fascicola 1, 1973, pp. 61 – 79

ASUPRA UNOR METODE ITERATIVE PENTRU REZOLVAREA ECUAŢIILOR OPERAŢIONALE NELINIARE

de

A. DIACONU şi I. PĂVĂLOIU
(Cluj)

În lucrarea [13] S. UL'M a studiat un procedeu iterativ de rezolvare a ecuaţiilor operaţionale, în care odată cu construcţia iteraţiilor succesive se consideră un şir de operatori în aşa fel ales, încît elementele sale să aproximeze succesiv inversul unui operator dat.

1. Fie

$$P(x) = \theta \tag{1}$$

o ecuaţie operaţională unde $P : X \to Y$; X, Y spaţii Banach. Pentru rezolvarea ecuaţiei (1) S. Ul'm consideră următorul procedeu iterativ, [13]

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n\, P(x_n) \\ A_{n+1} = A_n(2E - P'(x_{n+1})A_n), \qquad n = 0, 1, \ldots, \end{cases} \tag{2}$$

unde $A_0 : Y \to X$ este un operator liniar arbitrar, E operatorul identic al spaţiului Y şi $P'(x)$ este derivata Fréchét a operatorului P în punctul x.

Rezultatele stabilite de către S. Ul'm se bazează pe ipoteza că ecuaţia (1) admite o soluţie x^*.

În lucrarea de faţă vom studia convergenţa procedeului iterativ (2), fără ipoteza existenţei soluţiei ecuaţiei (1). Teorema care va urma va stabili atît convergenţa procedeului (2) către soluţia ecuaţiei (1) cît şi existenţa soluţiei ecuaţiei (1). Rezultatul stabilit de către noi nu este comparabil cu rezultatul lui S. Ul'm dar ipotezele pe care noi le vom admite par să fie mai puţin restrictive decît cele ale lui S. Ul'm.

Rezultatul obţinut de noi se exprimă în următoarea :

TEOREMA 1. *Dacă în sfera* $S = \{x \mid ||x - x_0|| \leqq r\}$ *sînt îndeplinite condiţiile :*

1) *Operatorul* P *admite derivate în sens Fréchet pînă la ordinul 2 inclusiv, derivata de ordinul 1 a operatorului* P *admite un invers mărginit, adică pentru orice* $x \in S$ $||[P'(x)]^{-1}|| \leqq B < +\infty$ *şi* $||P''(x)|| \leqq M < +\infty$.

2) *Elementul iniţial* x_0, *operatorul iniţial* A_0 *şi constantele* B *şi* M *satisfac condiţia :*

$$\max\{2MB^2||P(x_0)||, ||E - P'(x_0)A_0||\} \leqq \frac{1}{9}d,$$

unde

$$d < 1 \text{ şi } r = \frac{d}{9MB(1 - d^{p-1})},\ p = 2 - \varepsilon \text{ cu } 0 < \varepsilon < 1,$$

atunci au loc următoarele proprietăţi :

1) *Şirurile* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ *sînt convergente.*

2) *Ecuaţia* (1) *admite soluţia* $x^* \in S$ *care se poate obţine ca limită a şirului* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *generat de* (2) *şi*

$$A^* = \lim_{n \to \infty} A_n = [P'(x^*)]^{-1}.$$

3) *Au loc următoarele inegalităţi :*

$$||x_n - x^*|| \leqq \frac{d^{p^n}}{9MB(1 - d^{p^n(p-1)})}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

$$||A_n - A^*|| \leqq \frac{Bd^{p^n}(3 - d)}{9\,(1 - d^{p^n(p-1)})}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

Demonstraţie. Pentru început urmărim să arătăm că pentru orice $n = 0, 1, \ldots$ au loc următoarele proprietăţi :

a) $$x_n \in S.$$

b) $$\begin{cases} \rho_n = 2MB^2||P(x_n)|| \leqq \theta_n d^{2^n} \leqq \dfrac{1}{9} d^{p^n} \\ \delta_n = ||E - P'(x_n)A_n|| \leqq \mu_n d^{2^n} \leqq \dfrac{1}{9} d^{p^n}, \end{cases}$$

unde $(\theta_n)_{n=0}^{\infty}$ şi $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ sînt generate de relaţiile de recurenţă :

$$\theta_{n+1} = \theta_n^2 + \theta_n\mu_n$$

$$\mu_{n+1} = (\mu_n + 2\theta_n)^2,$$

unde
$$\theta_0 = \mu_0 = \frac{1}{9}.$$

c) $$||A_n|| \leqq 2B.$$

Proprietăţile a)—b) sînt verificate pentru $n = 0$ prin ipoteză. Rămîne să arătăm că $||A_0|| \leqq 2B$. Într-adevăr

$$||A_0|| = ||[P'(x_0)]^{-1} + A_0 - [P'(x_0)]^{-1}|| \leqq$$

$$\leqq ||[P'(x_0)]^{-1}||\,(1 + ||E - P'(x_0)A_0||) \leqq B\left(1 + \frac{1}{9}d\right) < 2B.$$

Presupunem că proprietăţile a)—c) au loc pentru $n = 0, 1, \ldots, k$ şi le vom demonstra pentru $n = k + 1$

Demonstrăm proprietatea a). Avem :

$$||x_{k+1} - x_0|| \leqq \sum_{i=0}^{k} ||x_{i+1} - x_i|| \leqq \sum_{i=0}^{k} ||A_i|| \cdot ||P(x_i)|| \leqq 2B \sum_{i=0}^{k} ||P(x_i)|| \leqq$$

$$\leqq 2B \frac{1}{18MB^2} \sum_{i=0}^{k} d^{p^i} = \frac{d}{9MB}(1 + d^{p-1} + d^{p^2-1} + \ldots + d^{p^k-1}) <$$

$$< \frac{d}{9MB}(1 + d^{p-1} + d^{2(p-1)} + \ldots) = \frac{d}{9MB(1 - d^{p-1})} = r.$$

În raţionamentul de mai sus ne-am folosit de inegalităţile evidente

$$i(p - 1) \leqq p^i - 1, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

deci $x_{k+1} \in S$.

Pentru a demonstra proprietatea b) se stabilesc următoarele inegalităţi :

$$||P(x_{k+1})|| \leqq \frac{M}{2}||A_k||^2||P(x_k)||^2 + ||P(x_k)|| \cdot ||E - P'(x_k)A_k||, \tag{5}$$

$$||E - P'(x_{k+1})A_k|| \leqq (||E - P'(x_k)A_k|| + M||A_k||^2||P(x_k)||)^2. \tag{6}$$

Într-adevăr:

$$\|P(x_{k+1})\| \leqq \|P(x_{k+1}) - P(x_k) - \frac{P'(x_k)}{1!}(x_{k+1} - x_k)\| +$$

$$+ \|P(x_k) + P'(x_k)(x_{k+1} - x_k)\| \leqq \frac{\|P''(\xi_k)\|}{2!}\|x_{k+1} - x_k\|^2 +$$

$$+ \|P(x_k) - P'(x_k) A_k P(x_k)\| \leqq \frac{M}{2}\|A_k\|^2\|P(x_k)\|^2 + \|P(x_k)\| \, \|E - P'(x_k)A_k\|,$$

unde am ţinut cont de faptul că $\xi_k = x_k + \theta(x_{k+1} - x_k)$, $0 < \theta < 1$ şi deoarece $x_k \in S$, $x_{k+1} \in S$ este evident că şi $\xi_k \in S$. Cu aceasta inegalitatea (5) este demonstrată.

Pentru (6) avem:

$$\|E - P'(x_{k+1}) A_{k+1}\| = \|E - P'(x_{k+1}) A_k(2E - P'(x_{k+1})A_k)\| =$$

$$= \|E - 2P(x_{k+1})A_k + (P'(x_{k+1}) A_k)^2\| \leqq \|E - P'(x_{k+1})A_k\|^2 \leqq$$

$$\leqq (\|E - P'(x_k)A_k\| + \|P''(\xi_k')\| \, \|x_{k+1} - x_k\| \cdot \|A_k\|)^2 \leqq$$

$$\leqq (\|E - P'(x_k) A_k\| + M\| A_k\|^2\|P(x_k)\|)^2,$$

deoarece şi aici ca mai sus $\xi_k' \in S$.

Înmulţind ambii membrii ai inegalităţii (5) cu $2MB$ şi ţinînd cont că $\|A_k\| < 2B$ din (5) şi (6), folosind notaţiile introduse obţinem:

$$\begin{cases} \rho_{k+1} \leqq \rho_k^2 + \rho_k \, \delta_k \\ \delta_{k+1} \leqq (\delta_k + 2\rho_k)^2. \end{cases} \tag{7}$$

Ţinînd cont de ipotezele inducţiei avem următoarele inegalităţi:

$$\begin{cases} \rho_k \leqq \theta_k \, d^{2^k} \leqq \frac{1}{9} \, d^{p^k}, \\ \delta_k \leqq \mu_k \, d^{2^k} \leqq \frac{1}{9} \, d^{p^k}. \end{cases} \tag{8}$$

Din inegalităţile (7) şi (8) deducem:

$$\rho_{k+1} \leqq (\theta_k^2 + \theta_k \, \mu_k) \, d^{2^{k+1}} = \theta_{k+1} \, d^{2^{k+1}}$$

$$\delta_{k+1} \leqq (\mu_k + 2\,\theta_k)^2 \, d^{2^{k+1}} = \mu_{k+1} \, d^{2^{k+1}},$$

unde am notat:

$$\theta_{k+1} = \theta_k^2 + \theta_k\mu_k$$

$$\mu_{k+1} = (\mu_k + 2\theta_k)^2.$$

Arătăm că:

$$\theta_{k+1} \, d^{2^{k+1} - p^{k+1}} < \frac{1}{9} \quad \text{şi} \quad \mu_{k+1} \, d^{2^{k+1} - p^{k+1}} < \frac{1}{9}.$$

Într-adevăr deoarece

$$d^{2^{k+1} - p^{k+1}} = \left(d^{2^k - \frac{p}{2} p^k}\right)^2$$

avem:

$$\theta_{k+1} \, d^{2^{k+1} - p^{k+1}} = \left(\theta_k d^{2^k - \frac{p}{2} p^k}\right)^2 + \left(\theta_k d^{2^k - \frac{p}{2} p^k}\right)\left(\mu_k d^{2^k - \frac{p}{2} p^k}\right),$$

$$\mu_{k+1} \, d^{2^{k+1} - p^{k+1}} = \left(\mu_k d^{2^k - \frac{p}{2} p^k} + 2\,\theta_k d^{2^k - \frac{p}{2} p^k}\right)^2.$$

Din (8) rezultă:

$$\theta_k \leqq \frac{1}{9} \, d^{p^k - 2^k}, \qquad \mu_k \leqq \frac{1}{9} \, d^{p^k - 2^k},$$

avem atunci:

$$\theta_{k+1} \, d^{2^{k+1} - p^{k+1}} \leqq \frac{2}{81}(d^{2-p})^{p^k} \leqq \frac{2}{81} < \frac{1}{9},$$

$$\mu_{k+1} \, d^{2^{k+1} - p^{k+1}} \leqq \frac{9}{81}(d^{2-p})^{p^k} < \frac{1}{9}.$$

Rezultă imediat că:

$$\rho_{k+1} \leqq \theta_{k+1} \, d^{2^{k+1}} \leqq \frac{1}{9} \, d^{p^{k+1}},$$

$$\delta_{k+1} \leqq \mu_{k+1} \, d^{2^{k+1}} \leqq \frac{1}{9} \, d^{p^{k+1}},$$

ceeace demonstrează proprietatea b).

În cele ce urmează arătăm că are loc proprietatea c).

Într-adevăr:

$$\|A_{k+1}\| = \|[P'(x_{k+1})]^{-1} + A_{k+1} - [P'(x_{k+1})]^{-1}\| \leqq$$

$$\leqq \|[P'(x_{k+1})]^{-1}\|(1 + \|E - P'(x_{k+1})A_{k+1}\|) \leqq B\left(1 + \frac{1}{9} \, d^{p^{k+1}}\right) < 2B.$$

Prin urmare proprietăţile a), b), c) sînt adevărate pentru orice $n = 0, 1, \ldots$

Vom demonstra că şirul $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ este fundamental

$$||x_{n+m} - x_n|| \leqq \sum_{i=n}^{n+m-1} ||x_{i+1} - x_i|| \leqq \sum_{i=n}^{n+m-1} ||A_i|| \cdot ||P(x_i)|| \leqq$$

$$\leqq 2B \frac{1}{18MB^2} \sum_{i=n}^{n+m-1} d^{p^i} = \frac{d^{p^n}}{9MB} (1 + d^{p^{n+1}-p^n} + \ldots + d^{p^{n+m-1}-p^n}) <$$

$$< \frac{d^{p^n}}{9MB} [1 + d^{p^n(p-1)} + \ldots + (d^{p^n(p-1)})^{m-1}] < \frac{d^{p^n}}{9MB(1 - d^{p^n(p-1)})}.$$

Ne-am folosit de faptul că pentru orice $i = 1, \ldots, m - 1$

$$p^{n+i} - p^n = p^n(p-1)(p^{i-1} + p^{i-2} + \ldots + p + 1) > i\, p^n(p-1),$$

deoarece $p > 1$.

Din faptul că $d < 1$, rezultă că şirul $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ este fundamental, spaţiul X fiind complet, el va fi şi convergent. Fie x^* limita acestui şir.

Din faptul că:

$$||x_{n+m} - x_n|| < \frac{d^{p^n}}{9MB(1 - d^{p^n(p-1)})}; \quad n, m = 0, 1, \ldots$$

făcînd $m \to \infty$ obţinem:

$$||x^* - x_n|| \leqq \frac{d^{p^n}}{9MB(1 - d^{p^n(p-1)})}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

prin urmare inegalităţile (3). Pentru $n = 0$, rezultă

$$||x^* - x_0|| \leqq \frac{d}{9MB(1 - d^{p-1})};$$

prin urmare $x^* \in S$

Din inegalităţile b) rezultă $\lim_{n\to\infty} ||P(x_n)|| = 0$, de unde ţinînd cont de continuitatea lui P rezultă $P(x^*) = \theta$, prin urmare x^* este soluţie a ecuaţiei (1).

Deoarece $x^* \in S$, va exista operatorul $[P'(x^*)]^{-1}$ notat cu A^*. Avem:

$$||A_n - A^*|| = ||[P'(x^*)]^{-1} - A_n|| = ||[P'(x^*)]^{-1} - [P'(x^*)]^{-1}[P'(x^*)]A_n|| \leqq$$
$$\leqq B||E - P'(x^*)A_n|| \leqq B(||E - P'(x_n)A_n|| + ||P'(x^*) - P'(x_n)||\, ||A_n||) \leqq$$
$$\leqq B(\delta_n + 2MB||x^* - x_n||), \text{ unde } ||P'(x^*) - P'(x_n)|| \leqq ||P''(\eta)||\, ||x^* - x_n|| \leqq$$
$$\leqq M||x^* - x_n||,$$

deoarece $\eta = x_n + \theta(x^* - x_n)$, $0 < \theta < 1$ aparţine sferei S.

Rezultă deci că: $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A^*$ şi:

$$||A^* - A_n|| \leqq \frac{Bd^{p^n}(3 - d^{p^n(p-1)})}{9(1 - d^{p^n(p-1)})},$$

care sînt chiar inegalităţile (4). Cu aceasta teorema este demonstrată.

2. În cele de mai sus s-a făcut ipoteza că operatorul P admite derivate Fréchet pînă la ordinul 2 inclusiv. În continuare vom înlocui această ipoteză prin una mult mai generală aceea că P admite diferenţe divizate pînă la ordinul 2 inclusiv.

Noţiunea de diferenţă divizată pe un spaţiu abstract se presupune cunoscută [5], [9], [11], [12].

Pentru rezolvarea ecuaţiei operaţionale (1) considerăm următoarea metodă iterativă:

$$(9) \qquad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n) \\ A_{n+1} = A_n(2E - [x_n, x_{n+1}; P]A_n); \qquad n = 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

unde x_0 este un punct arbitrar al spaţiului X, iar $A_0 : Y \to X$ un operator liniar arbitrar. Prin $[x, y; P] : X \to Y$ s-a notat diferenţa divizată de ordinul 1 a operatorului P pe punctele x, y. Se va nota cu $[x, y, z; P] : X \to (X \to Y)$ diferenţa divizată de ordinul 2 a operatorului P.

Relativ la ecuaţia operaţională (1) şi metoda iterativă (9) avem următorul rezultat.

TEOREMA 2. *Dacă în sfera* $S = \{x \mid ||x - x_0|| \leqq r\}$ *sînt îndeplinite condiţiile:*

1) *Operatorul* P *admite diferenţe divizate pînă la ordinul 2 inclusiv, diferenţa divizată de ordinul 1 admite invers şi* $||[x, y; P]^{-1}|| \leqq B < +\infty$, *pentru orice* $x, y \in S$ *şi* $||[x, y, z; P]|| \leqq M < +\infty$, *pentru orice* $x, y, z \in S$.

2) *Operatorul iniţial* A_0 *este mărginit şi* $||A_0|| \leqq 2B$.

3) *Sînt satisfăcute inegalitățile:*

$$\max\left\{4MB^2\|P(x_0)\|,\ \frac{1}{9}\sqrt{4MB^2\|P(x_1)\|},\ \|E-[x_0,x_1;P]A_0\|^2\right\}\leq\frac{1}{9}d,$$

unde $d<1$ *și* $r=\dfrac{d}{18MB(1-d^{p-1})}$, *cu* $p=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\varepsilon$, $0<\varepsilon<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Atunci:

1) *Șirurile* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *și* $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ *sînt convergente.*

2) *Ecuația* (1) *admite soluția* $x^*\in S$ *ce se poate obține ca limită a șirului* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *generat de* (9).

3) *Limita șirului de operatori* $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ *este și limita șirului de operatori* $([x_n, x_{n+1}; P]^{-1})_{n=0}^{\infty}$. $([x_n, x_{n+1}; P]^{-1}$ *există pentru orice* $n=0,1,\ldots$, *deoarece după cum va reieși din demonstrație,* $x_n\in S$ *pentru orice* $n=0,1,\ldots$).

4) *Au loc inegalitățile:*

$$\|x^*-x_n\|\leq\frac{d^{p^n(p-1)}}{18MB(1-d^{p^n(p-1)})}$$

și

$$\|A^*-A_n\|\leq\frac{2B}{9}\left[2d^{p^n-1}+\frac{3d^{p^n}}{1-d^{p^n(p-1)}}\right].$$

Demonstrație. La fel ca în demonstrația teoremei 1 vom arăta că au loc următoarele proprietăți:

a) $x_n\in S$, $n=0,1,\ldots,$

b$_1$) $\rho_n=4MB^2\|P(x_n)\|\leq\theta_n d^{\alpha_n}\leq\frac{1}{9}d^{p^n}$; $n=0,1,\ldots$

b$_2$) $\delta_n=\|E-[x_{n-1},x_n;P]A_n\|\leq\mu_n d^{\beta_n}\leq\frac{1}{9}d^{p^n-1}$; $n=0,1,\ldots,$

unde $(\theta_n)_{n=0}^{\infty}$ și $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ sînt generate de relațiile de recurență:

$$\theta_{n+1}=\theta_n^2 d^{\alpha_n-\alpha_{n-1}}+\theta_n\theta_{n-1}+\theta_n\mu_n d^{\beta_n-\alpha_{n-1}},$$

$$\mu_{n+1}=(\mu_n d^{\beta_n-\alpha_{n-1}}+\theta_n d^{\alpha_n-\alpha_{n-1}}+\theta_{n-1})^2,$$

cu $\theta_0=\theta_1=\mu_1=\frac{1}{9}$, iar șirurile $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ și $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$ sînt generate de relațiile de recurență:

$$\begin{cases}\beta_{n+1}=2\alpha_{n-1}\\ \alpha_{n+1}=\alpha_n+\alpha_{n-1},\end{cases}$$

cu $\alpha_0=1$, $\alpha_1=2$, $\beta_1=1$

c) $\|A_n\|\leq 2B$; $n=1,2,\ldots.$

Ca în demonstrația teoremei 1, vom folosi metoda inducției matematice.

Proprietățile a), b$_1$), c) sînt verificate prin ipotezele teoremei pentru $n=0$, iar b$_2$) pentru $n=1$.

Presupunem că proprietățile a)—c) sînt adevărate pentru $n\leq k$ și vrem să le demonstrăm pentru $n=k+1$.

Pentru proprietatea a) avem:

$$\|x_{k+1}-x_0\|\leq\sum_{i=0}^{k}\|x_{i+1}-x_i\|\leq\sum_{i=0}^{k}\|A_i\|\cdot\|P(x_i)\|\leq$$

$$\leq 2B\sum_{i=0}^{k}\|P(x_i)\|\leq 2B\frac{1}{9\cdot 4\cdot MB^2}\sum_{i=0}^{k}d^{p^i}=$$

$$=\frac{d}{18MB}(1+d^{p-1}+d^{p^2-1}+\ldots+d^{p^k-1})<\frac{d}{18MB(1-d^{p-1})}=r,$$

deoarece $i(p-1)\leq p^i-1$. Deci $x_{k+1}\in S$

Pentru proprietățile b$_1$) și b$_2$) stabilim inegalitățile

(10) $$\|P(x_{k+1})\|\leq M\|A_k\|\,\|P(x_k)\|\,(\|A_k\|\,\|P(x_k)\|+\|A_{k-1}\|\,\|P(x_{k-1})\|)+$$
$$+\|P(x_k)\|\,\|E-[x_{k-1},x_k,P]A_k\|,$$

(11) $$\|E-[x_k,x_{k+1};P]A_{k-1}\|\leq$$
$$\leq\{\|E-[x_{k+1},x_k;P]A_k\|+M\|A_k\|(\|A_k\|\cdot\|P(x_k)\|+\|A_{k-1}\|\cdot\|P(x_{k-1})\|\}.$$

Într-adevăr folosind formula de interpolare a lui Newton în spaţii abstracte avem:

$$\|P(x_{k+1})\| \leqq \|P(x_{k+1}) - P(x_k) - [x_{k+1}, x_k; P](x_{k+1} - x_k)\| +$$
$$+ \|P(x_k) + [x_{k+1}, x_k; P](x_{k+1} - x_k)\| \leqq \|[x_{k+1}, x_k, x_{k-1}; P]\| \times$$
$$\times \|x_{k+1} - x_k\| \, \|x_{k+1} - x_{k-1}\| + \|P(x_k) + [x_{k-1}, x_k; P](x_{k+1} - x_k)\|.$$

Din ipoteza inducţiei rezultă:

$$\|P(x_{k+1})\| \leqq M\|A_k\| \, \|P(x_k)\|(\|A_k\| \, \|P(x_k)\| + \|A_{k-1}\| \, \|P(x_{k-1})\|) +$$
$$+ \|P(x_k)\| \, \|E - [x_{k-1}, x_k; P] A_k\|.$$

De asemenea:

$$\|E - [x_k, x_{k+1}; P] A_{k+1}\| \leqq \|E - 2[x_k, x_{k+1}; P] A_k + ([x_k, x_{k+1}; P]A_k)^2\| \leqq$$
$$\leqq \|E - [x_k, x_{k+1}; P] A_k\|^2 \leqq \{\|E - [x_{k-1}, x_k; P] A_k\| +$$
$$+ \|[x_{k-1}, x_k; P] - [x_k, x_{k+1}; P]\| \, \|A_k\|\}^2 \leqq \{\|E - [x_k, x_{k-1}; P] A_k\| +$$
$$+ \|A_k\| \, \|[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}; P]\|(\|x_{k+1} - x_k\| + \|x_k - x_{k-1}\|\}^2.$$

de unde pe baza ipotezelor inducţiei rezultă (11).

Pe baza notaţiilor introduse într-un mod analog ca în cazul demonstraţiei teoremei 1 obţinem sistemul de inegalităţi recurente:

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} \rho_{k+1} \leqq \rho_k^2 + \rho_k\rho_{k-1} + \rho_k\delta_k \\ \delta_{k+1} \leqq (\delta_k + \rho_k + \rho_{k-1})^2. \end{cases}$$

Din ipoteza inducţiei avem:

$$\rho_k \leqq \theta_k d^{\alpha_k}, \quad \rho_{k-1} \leqq \theta_{k-1} d^{\alpha_{k-1}}, \quad \delta_k \leqq \mu_k d^{\beta_k},$$

unde θ_k, θ_{k-1}, μ_k şi α_k, α_{k-1}, β_k sînt numere cunoscute. Din inegalităţile (12) deducem:

$$\rho_{k+1} \leqq \theta_k^2 d^{2\alpha_k} + \theta_k\theta_{k-1} d^{\alpha_k + \alpha_{k-1}} + \theta_k\mu_k d^{\alpha_k + \beta_k} = \theta_{k+1} d^{\alpha_{k+1}}$$
$$\delta_{k+1} \leqq (\mu_k d^{\beta_k} + \theta_k d^{\alpha_k} + \theta_{k-1} d^{\alpha_{k-1}})^2 = \mu_{k+1} d^{\beta_{k+1}}.$$

Se observă că trebuie să avem:

$$\alpha_{k+1} = \min\{2\alpha_k, \alpha_k + \alpha_{k-1}, \alpha_k + \beta_k\}$$
$$\beta_{k+1} = 2\min\{\alpha_k, \beta_k, \alpha_{k-1}\}.$$

Arătăm prin inducţie că are loc inegalitatea dublă:

$$\text{(13)} \qquad \alpha_s \geqq \beta_s \geqq \alpha_{s-1}; \; s = 1, 2, \ldots .$$

Pentru $s = 1$, inegalitatea este evidentă. Presupunem că ea are loc pentru $s = 1, 2, \ldots, t$. Avem atunci:

$$2\alpha_t = 2\alpha_t \geqq 2\alpha_{t-1}$$
$$\alpha_t + \alpha_{t-1} \geqq 2\alpha_{t-1} \geqq \alpha_{t-1} + \beta_{t-1}$$
$$\alpha_t + \beta_t \geqq 2\beta_t \geqq 2\alpha_{t-1} \geqq \alpha_{t-1} + \alpha_{t-2},$$

de unde:

$$\min\{2\alpha_t, \alpha_t + \alpha_{t-1}, \alpha_t + \beta_t\} \geqq 2\min\{\alpha_t, \beta_t, \alpha_{t-1}\} \geqq$$
$$\geqq \min\{2\alpha_{t-1}, \alpha_{t-1} + \alpha_{t-2}, \alpha_{t-1} + \beta_{t-1}\},$$

deci:

$$\alpha_{t+1} \geqq \beta_{t+1} \geqq \alpha_t,$$

prin urmare inegalitatea dublă (13) are loc pentru orice $s = 1, 2, \ldots$

Atunci din expresiile lui α_{k+1} şi β_{k+1} rezultă:

$$\begin{cases} \alpha_{k+1} = \alpha_k + \alpha_{k-1} \\ \beta_{k+1} = 2\alpha_{k-1}. \end{cases}$$

Observăm atunci că θ_{k+1} şi μ_{k+1} sînt daţi de relaţiile:

$$\theta_{k+1} = \theta_k^2 d^{\alpha_k - \alpha_{k-1}} + \theta_k \theta_{k+1} + \theta_k\mu_k d^{\beta_k - \alpha_{k-1}}$$
$$\mu_{k+1} = (\mu_k d^{\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}} + \theta_k d^{\alpha_k - \alpha_{k-1}} + \theta_{k-1})^2.$$

Demonstrăm acum că dacă p este un număr pozitiv care satisface ipotezele teoremei, atunci au loc inegalităţile:

$$\theta_{k+1} d^{\alpha_{k-1} - p^{k+1}} < \frac{1}{9}, \quad \mu_{k+1} d^{\beta_{k+1} - p^k} < \frac{1}{9}.$$

Într-adevăr:

$$\theta_{k+1} d^{\alpha_{k+1} - p^{k+1}} = (\theta_k^2 d^{\alpha_k - \alpha_{k-1}} + \theta_k\theta_{k-1} + \theta_k\mu_k d^{\beta_k - \alpha_{k-1}})\, d^{\alpha_{k+2} - p^{k+1}}$$
$$\mu_{k+1} d^{\beta_{k+1} - p^k} = (\mu_k d^{\beta_k - \alpha_{k-1}} + \theta_k d^{\alpha_k - \alpha_{k-1}} + \theta_k)^2\, d^{\beta_{k+1} - p^k}.$$

Din ipoteza inducţiei avem:

$$\theta_{k-1} < \frac{1}{9} d^{p_{k-1}-\alpha_{k-1}}, \quad \theta_k < \frac{1}{9} d^{p^k-\alpha_k}, \quad \mu_k < \frac{1}{9} d^{p^{k-1}-\beta_k},$$

de unde rezultă:

$$\theta_{k+1} d^{\alpha_{k+1}-p^{k+1}} < \frac{1}{81}\left(d^{2p^k-p^{k+1}} + 2d^{p^k+p^{k-1}-p^{k+1}}\right)$$

şi

$$\mu_{k+1} d^{\beta_{k+1}-p^k} < \frac{1}{81}\left(2d^{p^k-\alpha_{k-1}} + d^{p^{k-1}-\alpha_{k-1}}\right)^2 d^{\beta_{k+1}-p^k} =$$

$$= \frac{1}{81}\left(4d^{p^k} + 4d^{p^{k-1}} + d^{2p^{k-1}-p^k}\right),$$

de unde observîndu-se că dacă $p \in \left]1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ toţi exponenţii ce intervin fiind pozitivi rezultă că:

$$\theta_{k+1} d^{\alpha_{k+1}-p^{k+1}} < \frac{3}{81} < \frac{1}{9}$$

$$\mu_{k+1} d^{\beta_{k+1}-p^k} < \frac{9}{81} = \frac{1}{9},$$

de unde:

$$\rho_{k+1} \leqq \theta_{k+1} d^{\alpha_{k+1}} < \frac{1}{9} d^{p^{k+1}}$$

$$\delta_{k+1} \leqq \mu_{k+1} d^{\beta_{k+1}} < \frac{1}{9} d^{p^k},$$

deci proprietăţile b_1), b_2) sînt adevărate şi pentru $n = k+1$.

Pentru relaţia c) avem:

$$\|A_{k+1}\| = \|[x_k, x_{k+1}; P]^{-1} + A_{k+1} - [x_k, x_{k+1}; P]^{-1}\| \leqq$$

$$\leqq \|[\alpha_k, x_{k+1}; P]^{-1}\|(1 + \|E - [x_k, x_{k+1}; P]A_{k+1}\|) \leqq$$

$$\leqq B(1 + \delta_{k+1}) < B\left(1 + \frac{1}{9} d^{p^k}\right) < \frac{10}{9} B < 2B.$$

Prin urmare am demonstrat prin inducţie că relaţiile a), b_1), c) sînt adevărate pentru orice $n = 0, 1, \ldots$ iar b_2) pentru orice $n = 1, 2, \ldots$

Avem atunci:

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leqq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leqq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|A_i\| \, \|P(x_i)\| <$$

$$< 2B \frac{1}{36MB^2} \sum_{i=n}^{n+m-1} d^{p^i} \leqq \frac{d^{p^n}}{18\,MB}\left(1 + d^{p^{n+1}-p^n} + \ldots + d^{p^{n+m-1}-p^n}\right) <$$

$$< \frac{d^{p^n}}{18\,MB}\left[1 + d^{p^n} + \ldots + (d^{p^n(p-1)})^{m-1} + \ldots\right] < \frac{d^{p^n}}{18MB(1 - d^{p^n(p-1)})}.$$

Deoarece $d < 1$ rezultă că $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ este fundamental deci şi convergent.

Dacă $m \to \infty$ obţinem;

$$\|x^* - x_n\| \leqq \frac{d^{p^n}}{18MB(1 - d^{p^n(p-1)})}; \quad n = 0, 1, \ldots$$

şi în plus pentru $n = 0$

$$\|x^* - x_0\| \leqq \frac{d}{18MB(1 - d^{p-1})},$$

deci $x^* \in S$.

Din faptul că $\lim_{n\to\infty} \|P(x_n)\| = 0$ şi din continuitatea lui P rezultă că: $P(x^*) = 0$ deci x^* este soluţie a ecuaţiei (1).

Arătăm că şirul de operatori $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ definit de (9) este convergent. Avem:

$$\|A_{i+1} - A_i\| = \|A_i(2E - [x_i, x_{i+1}; P]A_i) - A_i\| \leqq$$

$$\leqq \|A_i\| \, \|E - [x_i, x_{i+1}; P]A_i\| \leqq 2B(\delta_i + \rho_i + \rho_{i-1}) \leqq \frac{2B}{9}(2d^{p^{i-1}} + d^{p^i}).$$

Deci:

$$\|A_{m+n} - A_n\| \leqslant \sum_{i=n}^{n+m-1} \|A_{i+1} - A_i\| \leqq \frac{2B}{9}\left(2\sum_{i=n}^{n+m-1} d^{p^{i-1}} + \sum_{i=n}^{n+m-1} d^{p^i}\right) =$$

$$= \frac{2B}{9}\left[2d^{p^{n-1}} + d^{p^{n+m-1}} + 3\frac{d^{p^n}}{1 - d^{p^n(p-1)}}\right],$$

de unde se observă că şirul $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ este fundamental. Deoarece dacă X, Y sînt spaţii Banach şi $(Y, X)^*$ (spaţiul aplicaţiilor liniare şi continue definite pe Y cu valori în X, este spaţiu Banach. Cum $A_n \in (Y, X)^*$ pentru orice $n = 0, 1, \ldots$ deci şirul $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ este convergent. Fie A^* limita şirului A_n. Avem:

$$\|A^* - A_n\| \leq \frac{2B}{9}\left(2d^{p^{n-1}} + \frac{3d^{p^{n-1}}}{1-d^{p^n(p-1)}}\right).$$

Vom arăta că şi şirul $([x_n, x_{n+1}; P]^{-1})_{n=1}^{\infty}$ este convergent şi converge tot către A^*. Avem:

$$\|A_n - [x_n, x_{n+1}; P]^{-1}\| \leq \|[x_n, x_{n+1}; P]^{-1}\| \|E - [x_n, x_{n+1}; P) A_n\| <$$
$$< \frac{2B}{9}\left(2d^{p^{n-1}} + d^{p^n}\right).$$

Deci:

$$\|A^* - [x_n, x_{n+1}; P]^{-1}\| \leq \|A^* - A_n\| + \|A_n - [x_n, x_{n+1}; P]^{-1}\| <$$
$$< \|A^* - A_n\| + \frac{2B}{9}\left(2d^{p^{n-1}} + d^{p^n}\right),$$

de unde rezultă că există limita şirului $([x_n, x_{n+1}; P]^{-1})_{n=0}^{\infty}$ şi această limită este A^*.

Cu aceasta teorema este demonstrată.

3. Ca mai sus vom presupune că P admite diferenţe divizate pînă la ordinul 2 inclusiv. Vom considera pentru rezolvarea ecuaţiei operaţionale (1) următoarea metodă iterativă: [6], [7], [4], [13]

$$(14) \qquad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n) \\ A_{n+1} = A_n(2E - [x_{n+1}, Q(x_{n+1}); P] A_n); \quad n = 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

unde x_0 este un punct arbitrar al spaţiului X, $A_0 : Y \to X$ este un operator linear arbitrar, iar $Q : X \to X$ este un operator iterativ ataşat lui P, adică un operator ce admite ca şi punct fix orice soluţie a ecuaţiei (1).

Se stabileşte următorul rezultat:

TEOREMĂ 3. *Dacă în sfera* $S = \{x \mid \|x - x\| \leq r\}$ *sînt îndeplinite condiţiile:*

1) *Operatorul P admite diferenţe divizate la ordinul 2 inclusiv, diferenţa divizată de ordinul 1 admite invers şi* $\|[x, y; P]^{-1}\| \leq B < +\infty$ *pentru orice* $x, y \in S$ *şi* $\|[x, y, z; P]\| \leq M < +\infty$ *pentru orice* $x, y, z \in S$.

2) *Operatorul Q satisface condiţiile* $\|Q(x) - Q(y)\| \leq L\|x - y\|$ *pentru orice* $x, y \in S$; $\|x - Q(x)\| \leq \|P(x)\|$ *pentru orice* $x \in S$.

3) *Sînt îndeplinite condiţiile:*

$$\max\{2MB(2B + \alpha)\|P(x_0)\|,\ \|E - [x_0, Q(x_0); P]A_0\|\} \leq cd,$$

unde

$$d < 1, \quad r = \frac{\alpha cd}{2MB(2B + \alpha)} + \frac{cd}{M(2B + \alpha)(1 - d^{p-1})},$$

$$c = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{1 + \alpha}\right\}, \quad \alpha' = \frac{1 + L}{2B + \alpha};$$

unde $p = 2 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$.

Atunci:

1) *Şirurile* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *şi* $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ *sînt convergente.*

2) *Ecuaţia (1) admite soluţia* $x^* \in S$ *ce se poate obţine ca limită a şirului* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *generat de (14) şi*

$$A^* = \lim_{n\to\infty} A_n = [x^*, Q(x^*); P]^{-1} = [P'(x^*)]^{-1}.$$

3) *Au loc inegalităţile:*

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{cd^{p^n}}{M(2B + \alpha)(1 - d^{p^n(p-1)})}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

şi

$$\|A^* - A_n\| \leq Bcd^{p^n}\left[1 + \frac{2B(1 + L)}{(2B + \alpha)(1 - d^{p^n(p-1)})}\right], \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Demonstraţie. Ca şi la teoremele precedente vom arăta folosind metoda inducţiei matematice că pentru orice $n = 0, 1, \ldots$ au loc următoarele proprietăţi:

a) $\qquad x_n \in S, \qquad Q(x_n) \in S, \qquad n = 0, 1, \ldots,$

b) $$\begin{cases} \rho_n = 2MB(2B + \alpha)\|P(x_n)\| \leq \theta_n d^{2^n} \leq cd^{p^n} \\ \delta_n = \|E - [x_n, Q(x_n); P]A_n\| \leq \mu_n d^{2^n} \leq cd^{p^n}, \end{cases}$$

unde $(\theta_n)_{n=0}^{\infty}$ şi $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ sînt generate de relaţiile de recurenţă:

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n^2 + \theta_n\mu_n \\ \mu_{n+1} = (\mu_n + \alpha'\theta_n)^2; \qquad n = 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

cu $\theta_0 = c$, $\mu_0 = c$

c) $\|A_n\| \leq 2B, \quad n = 0, 1, \ldots$

Din ipotezele teoremei desprindem $x_0 \in S$, $\rho_0 \leq \theta_0 d = cd$, $\delta_0 \leq \mu_0 d = cd$. Pentru a arăta $Q(x_0) \in S$ se calculează:

$$\|Q(x_0) - x_0\| \leq \alpha \|P(x_0)\| \leq \frac{\alpha cd}{2MB(2B + \alpha)} < r,$$

deci $Q(x_0) \in S$. De asemenea:

$$\|A_0\| \leq \|[x_0, Q(x_0); P]^{-1} + A_0 - [x_0, Q(x_0); P]^{-1}\| \leq$$

$$\leq \|[x_0, Q(x_0); P]^{-1}\|(1 + \|E - [x_0, Q(x_0); P]A_0\|) \leq 2B.$$

Prin urmare proprietăţile a)—d) au loc pentru $n = 0$. Presupunem că ele sînt adevărate pentru $n = 0, 1, \ldots, k$. Arătăm că în aceste ipoteze ele sînt adevărate pentru $n = k + 1$.

Pentru proprietatea a) avem:

$$\|x_{k+1} - x_0\| \leq \sum_{i=0}^{k} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \sum_{i=0}^{k} \|A_i\| \, \|P(x_i)\| \leq$$

$$\leq 2B \frac{cd}{2MB(2B + \alpha)} (1 + d^{p-1} + \ldots + d^{p^k - 1}) \leq$$

$$\leq \frac{cd}{M(2B + \alpha)} (1 + d^{p-1} + \ldots + d^{k(p-1)} + \ldots) < \frac{cd}{M(2B + \alpha)(1 - d^{p-1})} \leq r.$$

De asemenea:

$$\|Q(x_{k+1}) - x_0\| \leq \|Q(x_{k+1}) - x_{k+1}\| + \|x_{k+1} - x_0\| \leq$$

$$\leq \alpha\|P(x_{k+1})\| + \|x_{k+1} - x_0\| \leq \frac{\alpha cd}{2MB(2B + \alpha)} + \frac{cd}{M(2B + \alpha)(1 - d^{p-1})} <$$

$$< \frac{\alpha cd}{2MB(2B + \alpha)} + \frac{cd}{M(2B + \alpha)(1 - d^{p-1})} = r.$$

Deci: $x_{k+1} \in S$, $Q(x_{k+1}) \in S$

Pentru demonstrarea proprietăţilor b) şi c) se stabilesc inegalităţile:

$$\|P(x_{k+1})\| \leq M\|A_k\|(\|A_k\| + \alpha)\|P(x_k)\|^2 + \|P(x_k)\| \cdot \|E - [x_k, Q(x_k); P]A_k\|$$

$$\|E - [x_{k+1}, Q(x_{k+1}); P]A_{k+1}\| \leq \{\|E - [x_k, Q(x_k); P]A_k\| + M(1 + L)\|A_k\| \, \|P(x_k)\|\}^2$$

Aceste inegalităţi se stabilesc într-un mod cu totul analog ca în cazul teoremelor 1—2. Bazîndu-ne pe $\|A_k\| \leq 2B$ şi cu notaţiile introduse ajungem la

$$\rho_{k+1} \leq \rho_k^2 + \rho_k \delta_k$$

$$\delta_{k+1} \leq (\delta_k + \alpha' \rho_k)^2,$$

unde $\alpha' = \frac{1 + L}{2B + \alpha}$.

Din aceste inegalităţi recurente într-o manieră absolut analoagă cu demonstraţia teoremei 1 rezultă că:

$$\rho_{k+1} \leq \theta_{k+1} d^{2^{k+1}} \leq cd^{p^{k+1}}$$

$$\delta_{k+1} \leq \mu_{k+1} d^{2^{k+1}} \leq cd^{p^{k+1}},$$

unde p este un număr pozitiv oricît de aproapiat de 2.

Proprietatea d) rezultă analog cu cazul teoremelor 1)—2).

Bazîndu-ne pe proprietăţile a)—d) rezultă că:

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \frac{cd^{p^n}}{M(2B + \alpha)(1 - d^{p^n(p-1)})},$$

de unde rezultă că şirul $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ este fundamental deci şi convergent către x^* care va fi şi soluţia ecuaţiei (1). Aceasta ca în cazul teoremelor precedente rezultă din faptul că $\lim\limits_{n \to \infty} P(x) = \theta$ şi din continuitatea lui P.

Eroarea cu care x_n îl aproximează pe x^* este dată de inegalitatea:

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{cd^{p^n}}{M(2B + \alpha)(1 - d^{p^n(p-1)})},$$

de unde rezultă că

$$\|x^* - x_0\| \leq \frac{cd}{M(2B + \alpha)(1 - d^{p-1})} < r,$$

deci $x^* \in S$.

Pentru stabilirea convergenţei şirului $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ avem inegalitatea :

$$\|[x^*, Q(x^*); P]^{-1} - A_n\| \leq \|[x^*, Q(x^*); P]^{-1}\| \, \|E - [x^*, Q(x^*); P] A_n\| \leq$$
$$\leq B\{\|E - [x_n, Q(x_n); P] A_n\| + \|[x_n, Q(x_n); P] - [x^*, Q(x^*); P]\| \, \|A_n\|\} \leq$$
$$\leq B\{\delta_n + (\|[x_n, Q(x_n), Q(x^*); P]\| \, \|Q(x^*) - Q(x_n)\| \, \|A_n\|\} +$$
$$+ \|[x_n, x^*, Q(x^*); P]\| \, \|x_n - x^*\| \cdot \|A_n\|\} \leq$$
$$\leq B\{\delta_n + M(L+1)\, 2B\|x^* - x_n\|\},$$

de unde se observă că :

$$\lim_{n\to\infty} \|[x^*, Q(x^*); P]^{-1} - A_n\| = 0$$

de unde rezultă că şirul de operatori $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ este convergent şi are ca limită pe $[x^*, Q(x^*); P]^{-1} = [P'(x^*)]^{-1}$. Înlocuind $\|x^* - x_n\|$ cu majoranta cunoscută se obţine eroarea cu care A_n îl aproximează pe $[x^*, Q(x^*); P]^{-1}$ care este dată de inegalitatea :

$$\|A^* - A_n\| \leq Bcd^{p^n}\left[1 + \frac{2B(L+1)}{(2B+\alpha)(1 - d^{p^n(p-1)})}\right].$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

SUR QUELQUES MÉTHODES ITÉRATIVES POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES NON-LINÉAIRES

RÉSUMÉ

Dans cette note nous considérons l'équation opérationnelle $P(x)=0$ où $P: X \to Y$ est un opérateur non-linéaire ; X, Y étant des espaces de Banach et en partant du résultat de S. UL'M [13] nous nous proposons d'étudier la convergence et la vitesse de convergence des méthodes $x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n)$; $n = 0, 1, \ldots$ où la suite $(A_n)_{n=0}^{\infty}$, $A_n: Y \to X$ est don-

née par la relation de récurrence $A_{n+1} = A_n(2E - B_n A_n)$ où B_n est respectivement

$$P'(x_{n+1}), \ [x_n, x_{n+1}; P] \text{ ou } [x_{n+1}, Q(x_{n+1}); P],$$

Q est un opérateur itératif associé à P. On démontre que l'ordre de convergence de ces trois méthodes est respectivement $2-\varepsilon$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \varepsilon$ et $2-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ étant arbitrairement petit.

BIBLIOGRAFIE

[1] Collatz, L., *Näherungsverfahren höherer Ordnung für Gleichungen in Banach-Räumen.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, **II** (*1*), 66–75 (1958).

[2] Janko, B., *Sur la théorie unitaire des méthodes d'itération pour la résolution des équations opérationnelles non linéaires.* Publications of the Mathematical Institute Hungarian Academy of Sciences, **II** Ser. A, 301–311 (1961).

[3] Janko, B., *Rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare în spaţii Banach.* Bucureşti Editura Academiei, R.S.R. (1969).

[4] Păvăloiu I., *Sur la méthode de Steffensen pour la résolution des équations opérationnelles non linéaires.* Revue Roumaine de Mathématiques pures et Appliquées, **XIII** (*6*), 857–861 (1968).

[5] Păvăloiu, I., *Interpolation dans des espaces linéaires normés et applications.* Mathematica (Cluj) **XII** (**35**), *1*, 149–158 (1970).

[6] Păvăloiu, I., *Sur les procédés itératifs à un ordre élevé de convergence.* Mathematica, (Cluj) **XII** (**35**), *2*, 309–324 (1970).

[7] Păvăloiu, I., *Consideraţii asupra metodelor iterative obţinute prin interpolare inversă.* Studii şi cercetări matematice, **XXIII** (*10*), 1545–1549 (1971).

[8] Popoviciu, T., *Sur la délimitation de l'erreur dans l'approximation des racines d'une équation par interpolation linéaire ou quadratique.* Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **XIII**, *1*, 75–78 (1968).

[9] Sergeev, A., S., *O metode hord.* Sibirski mat. jurnal, **XI**, (*2*), 282–289 (1961).

[10] Traub, J. F., *Iterative methods for the solution of equations.* Prentice-Hall. Inc. Englewood Cliffs N.J. (1964).

[11] Ul'm, S., *Ob obobşcennîh razdelennîh raznostiah I* Izv. Akad. Nauk. Estonski S.S.R. **16**, *1*, 13–26 (1967).

[12] Ul'm, S., *Ob obobşcennyh razdelennyh raznostjah II* Izv. Akad. Nauk Estonskoi S.S.R. **16**, *2*, 146–155 (1967).

[13] Ul'm, S., *Ob iteraţionnyh metodah s posledovatel'noi approksimacii obratnovo operatora* Izv. Akad. Nauk Estonskoi S.S.R., **16**, *4*, 403–411 (1967).

Primit la 8. V. 1972.

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România