REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 2, Fascicola 1, 1973, pp. 105–111

ASUPRA UNUI OPERATOR CARE PĂSTREAZĂ SEMNUL UNEI FUNCŢII ŞI AL DERIVATELOR SALE

de

DUMITRU RIPEANU

(Cluj)

1. În [1] s-a indicat în teorema 2 un procedeu de a determina un operator $A : C^{(n)}[a, b] \to C^{(n)}[a, b]$ (unde a şi b sînt numere fixate, $a < b$) definit de relaţia

$$\varphi(x) = A[f] = \int_a^b p(x, s) f(s)\, ds$$

cu proprietatea că dacă f este o funcţie oarecare din $C^{(n)}[a, b]$ pentru care $f^{(\sigma)}(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in [a, b]$ şi $\sigma = 0, 1, \ldots, n$, atunci şi $\varphi^{(\sigma)}(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in [a, b]$ şi $\sigma = 0, 1, \ldots, n$. Procedeul este următorul: operatorul A este definit de sîmburele

$$p(x, s) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} C_\alpha x^\alpha \frac{d^\alpha}{ds^\alpha} [(s-a)^\alpha (s-b)^\alpha] + \frac{x^n}{n!} \frac{d^n}{ds^n} [(s-a)^n (s-b)^n] \tag{1}$$

în care constantele C_α $(\alpha = \overline{0, n-1})$ sînt date de relaţiile

$$C_{n-\lambda} = \frac{1}{(n-\lambda)!}\left(\frac{1}{\lambda!} m_{n-\lambda, \lambda} + \sum_{\sigma=1}^{\lambda-1} \frac{(n-\lambda+\sigma)!}{\sigma!} m_{n-\lambda, \sigma} C_{n-\lambda+\sigma}\right) \tag{2}$$

iar

$$m_{n-\lambda,\sigma} =$$

$$= -\min_{x, s \in [a, b]} \frac{x^\sigma}{(s-a)^{n-\lambda}(s-b)^{n-\lambda}} \frac{d^\sigma}{ds^\sigma} [(s-a)^{n-\lambda+\sigma}(s-b)^{n-\lambda+\sigma}] \tag{3}$$

$$(\lambda = \overline{1, n};\ \sigma = \overline{1, \lambda}).$$

2. În nota de față se înlocuiesc numerele C_α din (1) cu alte numere Γ_α, al căror calcul este imediat.

TEOREMĂ. Numerele $C_\alpha(\alpha = \overline{0, n-1})$ din (1) se pot înlocui cu numerele Γ_α date de relațiile

$$\Gamma_\alpha = \frac{R_\alpha}{\alpha!} C_n^\alpha l^{n-\alpha} \quad (\alpha = \overline{0, n-1}) \tag{4}$$

unde $l = \begin{cases} a(a-b) \text{ dacă } a+b \leqslant 0 \\ b(b-a) \text{ dacă } a+b \geqslant 0 \end{cases}$, iar numerele R_α $(\alpha = n-1, n-2, \ldots, 0)$ se determină succesiv prin relațiile

$$R_{n-1} = 1, \; R_\alpha = 1 + \sum_{\sigma=1}^{n-1-\alpha} C_{n-\alpha}^\sigma R_{\alpha+\sigma} \tag{5}$$

$$(\alpha = n-2, n-3, \ldots, 0)$$

$$\left(\text{sau } R_{n-\alpha} = 1 + \sum_{\sigma=1}^{\alpha-1} C_\alpha^\sigma R_{n-\alpha+\sigma}, \quad \alpha = 2, 3, \ldots, n\right).$$

Demonstrație. Dacă se înseamnă pentru comoditate în (3)

$$P_\sigma(s) = \frac{1}{(s-a)^{n-\lambda}(s-b)^{n-\lambda}} \frac{d^\sigma}{ds^\sigma} [(s-a)^{n-\lambda+\sigma}(s-b)^{n-\lambda+\sigma}]$$

și se face schimbarea $s = \frac{1}{2}[a + b - (b-a)u]$, atunci se are

$$P_\sigma(s) = (-1)^\sigma \sigma!(b-a)^\sigma P_\sigma^{(n-\lambda, n-\lambda)}(u) \tag{6}$$

în notația clasică a polinoamelor lui Jacobi:

$$P_N^{[\alpha, \beta]}(u) = \frac{(-1)^N}{2^N N!} \frac{1}{(1-u)^\alpha(1+u)^\beta} \frac{d^N}{du^N} [(1-u]^{N+\alpha}(1+u)^{N+\beta}].$$

Ori, se știe ([2] pag. 79 și 175) că dacă $\alpha \geqslant -1$, $\beta \geqslant -1$ și $\rho = \max(\alpha, \beta) \geqslant -\frac{1}{2}$, atunci $\max\limits_{u \in [-1,1]} |P_N^{(\alpha,\beta)}(u)| = C_{N+\rho}^N$. Dacă $\alpha = \beta (= \rho)$, se are deci

$$\max_{u \in [-} |P_N^{(\alpha,\beta)}(u)| = P_N^{(\alpha,\beta)}(1) = C_{N+\alpha}^N.$$

Așa dar, în (6) $\max\limits_{s \in [a,b]} |P_\sigma(s)| = P_\sigma(a) = (b-a)^\sigma \sigma! C_{n-\lambda+\sigma}^\sigma = (n - \lambda + 1)(n - \lambda + 2) \ldots (n - \lambda + \sigma)(b-a)^\sigma$, iar în ipoteza $a + b \leqslant 0$ se are $|a^\sigma P_\sigma(a)| \geqslant |x^\sigma P_\sigma(a)| \geqslant |x^\sigma P_\sigma(s)|$ și deci pentru σ nepereche

$$x^\sigma P_\sigma(s) \geqslant -|x^\sigma P_\sigma(s)| \geqslant -|a^\sigma P_\sigma(a)| = a^\sigma P_\sigma(a) \tag{6$_1$}$$

iar pentru σ pereche

$$x^\sigma P_\sigma(s) > -x^\sigma \max_{s \in [a,b]} |P_\sigma(s)| \geqslant -a^\sigma P_\sigma(a) \; (\text{dacă } x \neq 0). \tag{7}$$

Așa dar, pentru orice $\sigma = 1, 2, \ldots, \lambda - 1$, se are $\min\limits_{x, s (\in [a,b]} x^\sigma P_\sigma(s) \geqslant -(n - \lambda + 1)(n - \lambda + 2) \ldots (n - \lambda + \sigma)[a(a-b)]^\sigma$ și deci în (3)

$$\begin{aligned} m_{n-\lambda,\sigma} &\leqq \overline{m}_{n-\lambda,\sigma} = \\ &= (n-\lambda+1)(n-\lambda+2)\ldots(n-\lambda+\sigma)[a(a-b)]^\sigma, \end{aligned} \tag{8}$$

unde $\overline{m}_{q,\sigma} = (q+1)(q+2) \ldots (q+\sigma)[a(a-b)]^\sigma$. În ipoteza complementară $a + b \geqslant 0$, se deduce aceeași relație (8) cu $[b(b-a)]^\sigma$ în loc de $[a(a-b)]^\sigma$. Pentru a termina demonstrația teoremei este suficient de a copia demonstrația teoremei 2 din [1], în care se înlocuiesc numerele C_α cu Γ_α, iar numerele $m_{q,\sigma}$ din (13) (în [1]) cu numerele $\overline{m}_{q,\sigma}$ din (8), cu singura deosebire că: 1° relația

$$\psi_{n-\lambda}(x, s) \geqslant (n-\lambda)! \, C_{n-\lambda} -$$

$$-\sum_{\sigma=1}^{\lambda-1} \frac{(n-\lambda+\sigma)!}{\sigma!} C_{n-\lambda+\sigma} m_{n-\lambda,\sigma} - \frac{1}{\lambda!} m_{n-\lambda,\lambda} = 0$$

din demonstrația în chestiune se înlocuiește pe baza lui (8) cu

$$\begin{aligned} \psi_{n-\lambda}(x, s) &\geqslant (n-\lambda)! \, \Gamma_{n-\lambda} - \sum_{\sigma=1}^{\lambda-1} \frac{(n-\lambda+\sigma)!}{\sigma!} \Gamma_{n-\lambda+\sigma} (-\min_{x, s \in [a,b]} x^\sigma P_\sigma(s)) - \\ &\quad - \frac{1}{\lambda!} (-\min_{x, s \in [a,b]} x^\lambda P_\lambda(s)) = (n-\lambda)! \, \Gamma_{n-\lambda} - \\ &\quad - \sum_{\sigma=1}^{\lambda-1} \frac{(n-\lambda+\sigma)!}{\sigma!} \Gamma_{n-\lambda+\sigma} m_{n-\lambda,\sigma} - \frac{1}{\lambda!} m_{n-\lambda,\lambda} > \\ &> (n-\lambda)! \, \Gamma_{n-\lambda} - \sum_{\sigma=1}^{\lambda-1} \frac{(n-\lambda+\sigma)!}{\sigma!} \Gamma_{n-\lambda+\sigma} \overline{m}_{n-\lambda,\sigma} - \frac{1}{\lambda!} \overline{m}_{n-\lambda,\lambda} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

dat fiindcă pentru σ pereche (7) arată că inegalitatea în (8) este strictă. S-a presupus $\lambda \geqslant 3$. Dacă $\lambda = 2$, cum în (8) se are pentru σ nepereche semnul de egalitate, semnul $>$ din (9) se înlocuieşte cu semnul egal. 2° Relaţia $\bar{p}(x, s) \geqslant C_0 - \sum_{\sigma=1}^{n-1} C_\sigma m_{0,\sigma} - \frac{1}{n!} m_{0,n} = 0$ se înlocuieşte cu relaţia

$$\bar{p}(x, s) \geqslant \Gamma_0 - \sum_{\sigma=1}^{n-1} \Gamma_\sigma m_{0,\sigma} - \frac{1}{n!} m_{0,n} > \Gamma_0 - \sum_{\sigma=1}^{\lambda-1} \Gamma_\sigma \overline{m}_{0,\sigma} - \frac{1}{n!} \overline{m}_{0,n} = 0.$$

Relaţia (15) din [1] (adică relaţia (2) din prezenta notă) se înlocuieşte, după cum s-a menţionat, cu relaţia

$$\Gamma_{n-\lambda} = \frac{1}{(n-\lambda)!}\left(\sum_{\sigma=1}^{\lambda-1} \frac{(n-\lambda+\sigma)!}{\sigma!} \Gamma_{n-\lambda+\sigma} \overline{m}_{n-\lambda,\sigma} + \frac{1}{\lambda!} \overline{m}_{n-\lambda,\lambda}\right). \tag{10}$$

(8) şi (10) dau

$$\Gamma_{n-\lambda} = K_\lambda C_n^\lambda \frac{l^\lambda}{(n-\lambda)!} \quad (\lambda = \overline{1, n}) \tag{11}$$

unde K_λ este un număr. În adevăr dacă (11) are loc pentru $\lambda = \overline{1, \lambda_0}$, (8) şi (10) dau $\Gamma_{n-(\lambda_0+1)} = K_{\lambda_0+1} C_n^{\lambda_0+1} \frac{l^{\lambda_0+1}}{(n-\lambda_0-1)!}$, unde

$$K_{\lambda_0+1} = 1 + \sum_{\sigma=1}^{\lambda_0} C_{\lambda_0+1}^\sigma K_{\lambda_0+1-\sigma} \tag{12}$$

aşa că $\Gamma_{n-(\lambda_0+1)}$ este de forma (11). Cum (8) şi (10) spun că Γ_{n-1} este de forma (11) (cu $K_1 = 1$), relaţia (11) este dovedită. Se va scrie această relaţie sub forma $\Gamma_\alpha = R_\alpha C_n^\alpha \frac{l^{n-\alpha}}{\alpha!}$ ($\alpha = n - \lambda = \overline{0, n-1}$), unde $R_\alpha = K_{n-\alpha}$ sînt daţi de relaţia respectivă (12)

$$R_\alpha = 1 + \sum_{\sigma=1}^{n-\alpha-1} C_{n-\alpha}^\sigma R_{\alpha+\sigma}$$

$$(\alpha = n-2, \quad n-3, \ldots, 0; \quad R_{n-1} = 1),$$

sau

$$R_{n-\alpha} = 1 + \sum_{\sigma=1}^{\alpha-1} C_\alpha^\sigma R_{n-\alpha+\sigma} \quad (\alpha = 2, 3, \ldots, n),$$

ceea ce dovedeşte teorema.

3. O b s e r v a ţ i i. 1° Este evident că teorema precedentă dă pentru coeficienţii Γ_α valori mai mari decît procedeul indicat la punctul 1, cu alte cuvinte că $\Gamma_\alpha > C_\alpha$ ($\alpha = \overline{0, n-2}$).

În adevăr, dacă $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta > -\frac{1}{2}$, atunci numărul $|P_N^{(\alpha,\beta)}(-1)|$ şi maximele relative succesive ale lui $|P_N^{(\alpha,\beta)}(u)|$ din intervalul $u \in [-1, x_0]$, cu $x_0 = \frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha + \beta}$ alcătuiesc un şir descrescător, iar aceleaşi maxime relative şi numărul $|P_N^{(\alpha,\beta)}(1)|$ alcătuiesc în intervalul $[x_0, 1]$ un şir crescător. ([2], pag. 176) (în cazul nostru $\alpha = \beta$, deci $x_0 = 0$). Aşadar se are în (6) $P_\sigma(s) < P_\sigma(a) = |P_\sigma(b)|$ pentru orice $s \in [a, b]$. Aşadar, în (7) (σ pereche) se are (dacă, spre a fixa ideile, $a + b \leqslant 0$) $P_\sigma(s) > -\max_{s\in[a,b]} |P_\sigma(s)| = -P_\sigma(a) = -P_\sigma(b)$, deci $\min_{x,s\in[a,b]} x^\sigma P_\sigma(s) > -a^\sigma P_\sigma(a)$ (pentru $x = 0$, cum în ipoteza făcută $a < 0$, relaţia (7) este evidentă). Deci pentru σ pereche (tot în ipoteza $a + b \leqslant 0$) se are în (8) în loc de semnul $\leqslant$, semnul $<$ (pentru σ nepereche, se are în loc de semnul $\leqslant$ semnul $=$, dat fiindcă în (6_1) se are $x^\sigma P_\sigma(s) = a^\sigma P_\sigma(a)$ pentru $x = s = a$).

Aşadar, (2), (10) şi (8) dau

$$\Gamma_{n-1} = C_{n-1} = \frac{\overline{m}_{n-1,1}}{(n-1)!} = \frac{m_{n-1,1}}{(n-1)!} = \frac{n}{(n-1)!} l,$$

$$\Gamma_{n-2} = \frac{1}{(n-2)!}[(n-1)!\,\Gamma_{n-1}\overline{m}_{n-2,1} + \frac{1}{2!}\overline{m}_{n-2,2}) >$$

$$> \frac{1}{(n-2)!}((n-1)!\,C_{n-1} m_{n-2,1} + \frac{1}{2!} m_{n-2,2}) = C_{n-2}$$

şi în general $\Gamma_{n-\lambda} > C_{n-\lambda}$ ($\lambda = \overline{2, n}$).

2°. Se vede imediat că în (6) se are

$$\max_{s\in[a,b]} P_\sigma(s) = \tag{13}$$

$$= (n-\lambda+1)(n-\lambda+2)\ldots(n-\lambda+\sigma)(b-a)^\sigma.$$

În adevăr, dacă $\alpha = \beta$, $\max_{u\in[-1,1]} |P_N^{(\alpha,\beta)}(u)| = C_{N+\alpha}^N = P_N^{(\alpha,\beta)}(1)$ deci $\max_{u\in[-1,1]} P_N^{(\alpha,\beta)}(u) = P_N^{(\alpha,\beta)}(1)$, aşadar, în (6) se are pentru σ pereche

$$\max_{s\in[a,b]} P_\sigma(s) = P_\sigma(a) = (n-\lambda+1)(n-\lambda+2)\ldots(n-\lambda+\sigma)(b-a)^\sigma$$

iar pentru σ nepereche (dat fiindcă dacă $\alpha = \beta$ se are $P_N^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^N P_N^{(\alpha,\beta)}(1)$; deci dacă $\alpha = \beta$ şi N este nepereche atunci conform lui (7)

$$P_N^{(\alpha,\beta)}(-1) = -\max_{u\in[-1,1]} P_N^{(\alpha,\beta)}(u) = \min_{u\in[-1,1]} P_N^{(\alpha,\beta)}(u));$$

$$\max_{s\in[a,b]} P_\sigma(s) = -\sigma!\,(b-a)^\sigma \min_{u\in[-1,1]} P_\sigma^{(n-\lambda,\, n-\lambda)}(u) =$$
$$= P_\sigma(b) = (n-\lambda+1)(n-\lambda+2)\ldots(n-\lambda+\sigma)(b-a)^\sigma,$$

aşa că (13) este dovedită.

SUR UN OPÉRATEUR QUI CONSERVE LE SIGNE D'UNE FONCTION ET DE SES DÉRIVÉES

RÉSUMÉ

Dans cette note on apporte un complément à un travail à paraître [1], où l'on détermine des opérateurs $A : C^{(n)}[a, b] \to C^{(n)}[a, b]$ par la relation $\varphi(x) = A[f] = \int_a^b p(x, s) f(s)\, ds$ qui jouissent de la propriété que $\varphi^{(\sigma)}(x) \geqslant 0$ $(\sigma = \overline{0, n})$ pour tout $x \in [a, b]$ pour toute fonction $f \in C^{(n)}$ $[a, b]$ pour laquelle $f^{(\sigma)}(x) \geqslant 0$ $(\sigma = \overline{0, n})$ pour tout $x \in [a, b]$. Une classe particulière de tels opérateurs est fournie par le poids

$$p(x, s) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} C_\alpha x^\alpha \frac{d^\alpha}{ds^\alpha}[(s-a)^\alpha (s-b)^\alpha] + \frac{x^n}{n!}\frac{d^n}{ds^n}[(s-a)^n (s-b)^n]$$

où les constantes C_α sont données par les relations

$$C_{n-\lambda} = \frac{1}{(n-\lambda)!}\left(\frac{1}{\lambda!} m_{n-\lambda,\lambda} + \sum_{\sigma=1}^{\lambda-1} \frac{(n-\lambda+\sigma)!}{\sigma!} m_{n-\lambda,\sigma} C_{n-\lambda+\sigma}\right)$$

avec

$$m_{n-\lambda,\sigma} = -\min_{x,s\in[a,b]} \frac{x^\sigma}{(s-a)^{n-\lambda}(s-b)^{n-\lambda}} \frac{d^\sigma}{ds^\sigma}[(s-a)(s-b)]^{n-\lambda+\sigma}$$
$$(\lambda = \overline{1, n};\ \sigma = \overline{1, \lambda}).$$

Dans cette note on remplace les constantes C_α par d'autres dont le calcul est immédiat, notamment par les constantes

$$\Gamma_\alpha = \frac{R_\alpha}{\alpha!} C_n^\alpha l^{n-\alpha} \quad (\alpha = \overline{0, n-1})$$

où $l = \begin{cases} a(a-b) & \text{si } a+b \leqslant 0 \\ b(b-a) & \text{si } a+b \geqslant 0 \end{cases}$ et les nombres R_α sont donnés par les relations:

$$R_{n-1} = 1,\quad R_{n-\alpha} = 1 + \sum_{\sigma=1}^{\alpha-1} C_\alpha^\sigma R_{n-\alpha+\sigma} \quad (\alpha = \overline{2, n}).$$

On montre que $\Gamma_{n-1} = C_{n-1}$ et $\Gamma_\alpha > C_\alpha$ $(\alpha = \overline{0, n-2})$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Ripiánu, D., *Sur un opérateur qui conserve l'allure.* Revue d'analyse numérique et de la théorie de l'approximation (Cluj) (sub tipar).

[2] Szegö, G., *Ортогональные многочлены*, Moscova 1963.

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România

Primit la 2. IV. 1972.