REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 2, Fascicola 2, 1973, pp. 117—129

REPREZENTAREA UNOR SISTEME DE ECUAŢII PRIN NOMOGRAME CU TRANSPARENT ORIENTAT

de

L. BAL şi M. MIHOC

(Cluj)

Studiul nomogramelor cu transparent a fost obiectul cercetării în ultimii ani a numeroşi matematicieni, printre care se remarcă în deosebi S. G. HOVANSKI [3]. El stabileşte diferite forme canonice pentru ecuaţiile ce pot fi rezolvate în acest mod şi dă efectiv metoda de construcţie a nomogramelor cu transparent orientat.

Problema condiţiilor, în care o ecuaţie dată sau un sistem de ecuaţii pot fi aduse la aceste forme canonice a fost cercetată mai puţin. În cazul sistemelor de două ecuaţii cu cinci-opt variabile, problema a fost studiată de către J. BOGOLIUBOV [2].

În această lucrare ne vom ocupa de reprezentarea nomografică a unor sisteme de patru ecuaţii cu douăsprezece variabile prin nomograme cu transparent orientat.

Se consideră sistemul de ecuaţii:

$$\Omega_i(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

unde funcţiile Ω_i sînt definite şi continue într-un domeniu cu 12 dimensiuni.

Să presupunem că funcţiile Ω_i îndeplinesc condiţiile pentru existenţa funcţiilor implicite:

$$\begin{aligned} x_7 &= \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ x_8 &= \psi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ x_{11} &= \gamma(x_1, x_2, x_3, x_4, x_9, x_{10}) \\ x_{12} &= \omega(x_1, x_2, x_3, x_4, x_9, x_{10}). \end{aligned} \tag{2}$$

Funcţiile φ, ψ, γ, ω ale sistemului (2) satisfac condiţiile:

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
&c_{1,2}=\begin{vmatrix}\varphi'_{x_1} & \psi'_{x_1}\\ \varphi'_{x_2} & \psi'_{x_2}\end{vmatrix}\neq 0;\quad
c_{3,4}=\begin{vmatrix}\varphi'_{x_3} & \psi'_{x_3}\\ \varphi'_{x_4} & \psi'_{x_4}\end{vmatrix}\neq 0;\quad
c_{5,6}=\begin{vmatrix}\varphi'_{x_5} & \psi'_{x_5}\\ \varphi'_{x_6} & \psi'_{x_6}\end{vmatrix}\neq 0\\
&d_{1,2}=\begin{vmatrix}\gamma'_{x_1} & \omega'_{x_1}\\ \gamma'_{x_2} & \omega'_{x_2}\end{vmatrix}\neq 0;\quad
d_{3,4}=\begin{vmatrix}\gamma'_{x_3} & \omega'_{x_3}\\ \gamma'_{x_4} & \omega'_{x_4}\end{vmatrix}\neq 0;\quad
d_{9,10}=\begin{vmatrix}\gamma'_{x_9} & \omega'_{x_9}\\ \gamma'_{x_{10}} & \omega'_{x_{10}}\end{vmatrix}\neq 0.
\end{aligned}
$$

Pentru ca sistemul de ecuaţii (1), respectiv (2) să poată fi reprezentat nomografic printr-o nomogramă cu transparent orientat, el trebuie să poată fi adus la forma canonică:

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
A_{7,8}(x_7, x_8) &= A_{1,2}(x_1, x_2) + A_{3,4}(x_3, x_4) + A_{5,6}(x_5, x_6)\\
B_{7,8}(x_7, x_8) &= B_{1,2}(x_1, x_2) + B_{3,4}(x_3, x_4) + B_{5,6}(x_5, x_6)\\
A_{11,12}(x_{11}, x_{12}) &= A_{1,2}(x_1, x_2) + A_{3,4}(x_3, x_4) + A_{9,10}(x_9, x_{10})\\
B_{11,12}(x_{11}, x_{12}) &= B_{1,2}(x_1, x_2) + B_{3,4}(x_3, x_4) + B_{9,10}(x_9, x_{10}).
\end{aligned}
$$

Pentru simplificarea scrierii vom nota

$$A_{2k-1,2k}(x_{2k-1}, x_{2k}) = A_{2k-1,2k}, \qquad k=\overline{1,6}.$$

Funcţiile A_{ij}, B_{ij} satisfac condiţiile de nedegenerare ale cîmpurilor binare (x_{2k-1}, x_{2k}), $k=\overline{1,6}$

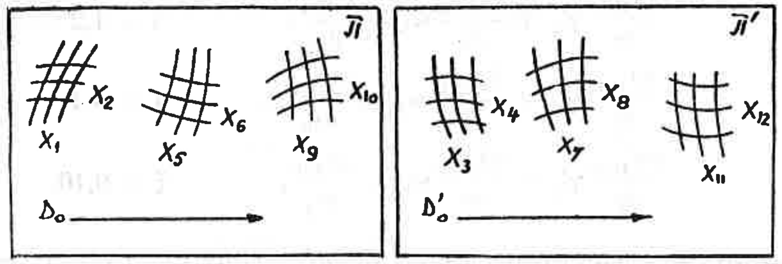
$$
(5)\quad
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial A_{2k-1,2k}}{\partial x_{2k-1}} & \dfrac{\partial A_{2k-1,2k}}{\partial x_{2k}}\\[2ex]
\dfrac{\partial B_{2k-1,2k}}{\partial x_{2k-1}} & \dfrac{\partial B_{2k-1,2k}}{\partial x_{2k}}
\end{vmatrix}\neq 0 \qquad k=\overline{1,6}.
$$

Nomograma care rezolvă sistemul de ecuaţii (4) are atît în planul fix, cît şi în planul mobil, trei cîmpuri binare. Utilizarea nomogramei este dată de formula de structură:

$$P_{1,2}\,|{-}|\,P_{3,4}\quad P_{5,6}\,|\rightrightarrows|\,P_{7,8}\quad P_{9,10}\,|\rightrightarrows|\,P_{11,12},$$

unde $P_{2k-1,2k}$, $(k=\overline{1,6})$ sînt puncte în cîmpurile binare $(x_{2k-1,2k})$ $(k=\overline{1,6})$. Primul contact dublu al nomogramei este contact de fixare, iar celelalte două sînt contacte de rezolvare.

Schema acestei nomograme este dată în fig. 1.



a) plan fix b) plan mobil

Figura 1.

Problema reprezentării nomografice a sistemului (2) printr-o nomogramă cu transparent orientat revine la găsirea următorului sistem de identităţi:

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
A_{7,8}(\varphi, \psi) &\equiv A_{1,2}(x_1, x_2) + A_{3,4}(x_3, x_4) + A_{5,6}(x_5, x_6)\\
B_{7,8}(\varphi, \psi) &\equiv B_{1,2}(x_1, x_2) + B_{3,4}(x_3, x_4) + B_{5,6}(x_5, x_6)\\
A_{11,12}(\gamma, \omega) &\equiv A_{1,2}(x_1, x_2) + A_{3,4}(x_3, x_4) + A_{9,10}(x_9, x_{10})\\
B_{11,12}(\gamma, \omega) &\equiv B_{1,2}(x_1, x_2) + B_{3,4}(x_3, x_4) + B_{9,10}(x_9, x_{10}).
\end{aligned}
$$

În baza unei leme dată de J. Bogoliubov se arată că condiţiile (3) sînt necesare pentru existenţa sistemului (6), care este supus condiţiilor (5).

Pentru rezolvarea problemei propuse se cere deci găsirea funcţiilor $A_{2k-1,2k}(x_{2k-1}, x_{2k})$, respectiv $B_{2k-1,2k}(x_{2k-1}, x_{2k})$, care să satisfacă identic sistemul (4).

Să determinăm condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească funcţiile sistemului (2), pentru ca acesta să poată fi adus la forma (4).

Vom presupune deci, că sistemul de identităţi (6) există.

Să calculăm derivatele parţiale ale primilor membrii ai primei şi celei de a treia ecuaţii a sistemului (6) în raport cu variabilele x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, respectiv x_1, x_2, x_3, x_4, x_9, x_{10}, ţinînd cont de sistemul (2). Găsim sistemele:

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
&\frac{\partial A_{7,8}}{\partial\varphi}\varphi'_{x_\nu} + \frac{\partial A_{7,8}}{\partial\psi}\psi'_{x_\nu} \equiv \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_\nu}, && \nu = 1,2\\
&\frac{\partial A_{7,8}}{\partial\varphi}\varphi'_{x_\mu} + \frac{\partial A_{7,8}}{\partial\psi}\psi'_{x_\mu} \equiv \frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_\mu}, && \mu = 3,4\\
&\frac{\partial A_{7,8}}{\partial\varphi}\varphi_{x_\eta} + \frac{\partial A_{7,8}}{\partial\psi}\psi'_{x_\eta} \equiv \frac{\partial A_{5,6}}{\partial x_\eta}, && \eta = 5,6
\end{aligned}
$$

şi

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A_{11,12}}{\partial \gamma}\gamma'_{x_\nu} + \frac{\partial A_{11,12}}{\partial \omega}\omega'_{x_\nu} \equiv \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_\nu}, \qquad && \nu = 1,2\\
&\frac{\partial A_{11,12}}{\partial \gamma}\gamma_{x_\mu} + \frac{\partial A_{11,12}}{\partial \omega}\omega'_{x_\mu} \equiv \frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_\mu}, && \mu = 3,4\\
&\frac{\partial A_{11,12}}{\partial \gamma}\gamma'_{x_\xi} + \frac{\partial A_{11,12}}{\partial \omega}\omega'_{x_\xi} \equiv \frac{\partial A_{9,10}}{\partial x_\xi}, && \xi = 9,10.
\end{aligned}\tag{8}$$

Datorită particularităţii sistemului (6), rezultă că sistemele (7) şi (8 sînt verificate şi de funcţiile $B_{2k-1,2k}(x_{2k-1}, x_{2k})$.

Ţinînd cont de relaţiile (3), sistemul (7) de şase ecuaţii cu două necu noscute $\frac{\partial A_{7,8}}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial A_{7,8}}{\partial \psi}$, poate fi rezolvat în raport cu acestea:

$$\begin{aligned}
&c_{2,3}\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + c_{3,1}\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} + c_{1,2}\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_3} \equiv 0\\
&c_{2,4}\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + c_{4,1}\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} + c_{1,2}\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} \equiv 0\\
&c_{2,5}\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + c_{5,1}\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} + c_{1,2}\frac{\partial A_{5,6}}{\partial x_5} \equiv 0\\
&c_{2,6}\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + c_{6,1}\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} + c_{1,2}\frac{\partial A_{5,6}}{\partial x_6} \equiv 0,
\end{aligned}\tag{9}$$

şi procedînd analog pentru sistemul (8), găsim, după eliminarea funcţiilor $\frac{\partial A_{9,10}}{\partial x_7}$, $\frac{\partial A_{9,10}}{\partial x_{10}}$:

$$\begin{aligned}
&d_{2,3}\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + d_{3,1}\frac{\partial S_{1,2}}{\partial x_2} + d_{1,2}\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_3} \equiv 0\\
&d_{2,4}\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + d_{4,1}\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} + d_{1,2}\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} \equiv 0\\
&d_{2,9}\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + d_{9,1}\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} + d_{1,2}\frac{\partial A_{9,10}}{\partial x_9} \equiv 0\\
&d_{2,10}\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + d_{10,1}\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} + d_{1,2}\frac{\partial A_{9,10}}{\partial x_{10}} \equiv 0.
\end{aligned}\tag{10}$$

Sistemele (9), (10) sînt verificate şi de funcţiile $B_{2k-1,2k}$. Scoţînd din sistemele (9), (10) derivatele parţiale de ordinul întîi ale funcţiilor $A_{3,4}$, $A_{5,6}$, respectiv ale funcţiilor $A_{3,4}$, $A_{9,10}$ vom avea sistemele:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_3} \equiv a\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + b\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2}\\
&\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} \equiv c\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + d\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2}\\
&\frac{\partial A_{5,6}}{\partial x_5} \equiv e\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + f\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2}\\
&\frac{\partial A_{5,6}}{\partial x_5} \equiv g\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + h\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2},
\end{aligned}\tag{11}$$

unde:

$$\begin{aligned}
&a \equiv -\frac{c_{2,3}}{c_{1,2}}, \quad b \equiv -\frac{c_{3,1}}{c_{1,2}}, \quad c \equiv -\frac{c_{2,4}}{c_{1,2}}, \quad d \equiv -\frac{c_{4,1}}{c_{1,2}}\\
&e \equiv -\frac{c_{2,5}}{c_{1,2}}, \quad f \equiv -\frac{c_{5,1}}{c_{1,2}}, \quad g \equiv -\frac{c_{2,6}}{c_{1,2}}, \quad h \equiv -\frac{c_{6,1}}{c_{1,2}},
\end{aligned}\tag{12}$$

sînt funcţii de variabilele $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_3} \equiv i\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + j\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2}\\
&\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} \equiv k\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + m\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2}\\
&\frac{\partial A_{9,10}}{\partial x_9} \equiv n\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + p\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2}\\
&\frac{\partial A_{9,10}}{\partial x_{10}} \equiv r\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + s\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2},
\end{aligned}\tag{13}$$

unde:

$$\begin{aligned}
&i \equiv -\frac{d_{2,3}}{d_{1,2}}, \quad j \equiv -\frac{d_{3,1}}{d_{1,2}}, \quad k \equiv -\frac{d_{2,4}}{d_{1,2}}, \quad m \equiv -\frac{d_{4,1}}{d_{1,2}}\\
&n \equiv -\frac{d_{2,9}}{d_{1,2}}, \quad p \equiv -\frac{d_{9,1}}{d_{1,2}}, \quad r \equiv -\frac{d_{2,10}}{d_{1,2}}, \quad s \equiv -\frac{d_{10,1}}{d_{1,2}}
\end{aligned}\tag{14}$$

sînt funcţii de variabilele $x_1, x_2, x_3, x_4, x_9, x_{10}$.

Avem aceleaşi sisteme pentru funcţiile $B_{2k-1,2k}$. Un calcul simplu ne arată că:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\ d - b\ c = \frac{c_{3,4}}{c_{1,2}} \neq 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = e\,h - f\ g = \frac{c_{5,6}}{c_{1,2}} \neq 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} i & j \\ k & m \end{vmatrix} = i\ m - k\ j = \frac{d_{3,4}}{d_{1,2}} \neq 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} n & p \\ r & s \end{vmatrix} = n\ s - p\ r = \frac{d_{9,10}}{d_{1,2}} \neq 0.$$

Primele două ecuaţii din fiecare din sistemele (11) şi (13) conduc la un sistem omogen de patru ecuaţii cu patru necunoscute. Condiţia ca acest sistem să admită soluţie diferită de soluţia nulă este:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a & -b \\ 0 & 1 & -c & -d \\ 1 & 0 & -i & -j \\ 0 & 1 & -k & -l \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{15}$$

sau

$$\begin{vmatrix} a - i & b - j \\ c - k & m - d \end{vmatrix} \equiv 0. \tag{16}$$

Derivăm acum membrii stîngi ai ecuaţiilor sistemului (11) în raport cu variabilele x_4, x_3, respectiv x_6, x_5, şi apoi le scădem două cîte două, ţinînd cont de egalitatea derivatelor parţiale mixte de ordinul doi:

$$\begin{aligned} &(a'_{x_4} - c'_{x_3}) \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + (b'_{x_4} - d'_{x_3}) \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\ &(e'_{x_6} - g'_{x_5}) \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + (f'_{x_6} - h'_{x_5}) \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Procedînd analog cu membrii stîngi ai ultimelor două ecuaţii ale sistemului (13), pe care le derivăm în raport cu variabilele x_{10}, respectiv x_9, găsim

$$(n'_{x_{10}} - r'_{x_9}) \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + (p'_{x_{10}} - s'_{x_9}) \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0. \tag{18}$$

Ţinînd cont că $\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} \neq 0$ şi $\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \neq 0$, pentru ca identităţile (17) şi (18) să aibe loc, sînt necesare următoarele condiţii:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a'_{x_4} - c'_{x_3} & b'_{x_4} - d'_{x_3} \\ e'_{x_6} - g'_{x_5} & f'_{x_6} - h'_{x_5} \end{vmatrix} \equiv 0 \\ &\begin{vmatrix} a'_{x_4} - c'_{x_3} & b'_{x_4} - d'_{x_3} \\ n'_{x_{10}} - r'_{x_9} & p'_{x_{10}} - s'_{x_9} \end{vmatrix} \equiv 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Să derivăm acum membrii stîngi ai ecuaţiilor sistemului (11) în raport cu variabilele x_5, x_6, x_3, x_4, şi membrii stîngi ai ultimelor două ecuaţii a sistemului (13) în raport cu variabilele x_3 şi x_4 găsim:

$$\begin{cases} a'_{x_5} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + b'_{x_5} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\ a'_{x_6} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + b'_{x_6} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\ c'_{x_5} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + d'_{x_5} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\ c'_{x_6} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + d'_{x_6} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} e'_{x_3} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + f'_{x_3} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\ e'_{x_4} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + f'_{x_4} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\ g'_{x_3} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + h'_{x_3} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\ g'_{x_4} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + h'_{x_4} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} n'_{x_3} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + p'_{x_3} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\ n_{x_4} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + p_{x_4} \frac{\partial A_{,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\ r'_{x_3} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + s'_{x_3} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\ r'_{x_4} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + s'_{x_4} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0. \end{cases} \tag{22}$$

Ţinînd cont că $\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} \neq 0$ şi $\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \neq 0$, pentru ca identităţile (20), (21), (22) să aibe loc, sînt necesare următoarele condiţii:

$$
(23)\qquad
\begin{array}{ll}
\begin{vmatrix} a'_{x_5} & b'_{x_5} \\ a'_{x_6} & b'_{x_6} \end{vmatrix} \equiv 0; &
\begin{vmatrix} a'_{x_5} & b'_{x_5} \\ c'_{x_5} & d'_{x_6} \end{vmatrix} \equiv 0; \\[2ex]
\begin{vmatrix} a'_{x_5} & b'_{x_5} \\ c'_{x_6} & d'_{x_6} \end{vmatrix} \equiv 0; &
\begin{vmatrix} a'_{x_5} & b'_{x_6} \\ e'_{x_3} & f'_{x_3} \end{vmatrix} \equiv 0; \\[2ex]
\begin{vmatrix} a'_{x_5} & b'_{x_5} \\ e'_{x_4} & f'_{x_4} \end{vmatrix} \equiv 0; &
\begin{vmatrix} a'_{x_5} & b'_{x_5} \\ g'_{x_3} & h'_{x_3} \end{vmatrix} \equiv 0; \\[2ex]
\begin{vmatrix} a'_{x_5} & b'_{x_5} \\ g'_{x_4} & h'_{x_4} \end{vmatrix} \equiv 0; &
\begin{vmatrix} a'_{x_5} & b'_{x_5} \\ n'_{x_3} & p'_{x_3} \end{vmatrix} \equiv 0; \\[2ex]
\begin{vmatrix} a'_{x_5} & b'_{x_5} \\ n'_{x_4} & p'_{x_4} \end{vmatrix} \equiv 0; &
\begin{vmatrix} a'_{x_5} & b'_{x_6} \\ r'_{x} & s'_{x_3} \end{vmatrix} \equiv 0; \\[2ex]
\begin{vmatrix} a'_{x_5} & b_{x_6} \\ r'_{x_4} & s'_{x_4} \end{vmatrix} \equiv 0;
\end{array}
$$

Să derivăm membrii întîi ai ecuaţiilor sistemelor (11) şi (13) în raport cu variabilele x_1, x_2, avem sistemele de ecuaţii cu derivate parţiale

$$
(24)\qquad
\begin{cases}
a \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_1^2} + b \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_1 \partial x_2} + a'_{x_1} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + b'_{x_1} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\[1ex]
a \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_2 \partial x_1} + b \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_2^2} + a'_{x_2} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + b'_{x_2} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\[1ex]
c \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_1^2} + d \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_1 \partial x_2} + c'_{x_1} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + d'_{x_1} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\[1ex]
c \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_2 \partial x_1} + d \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_2^2} + c'_{x_2} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + d'_{x_2} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0
\end{cases}
$$

$$
(25)\qquad
\begin{cases}
e \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_1^2} + f \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_1 \partial x_2} + e'_{x_1} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + f'_{x_1} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\[1ex]
e \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_2 \partial x_1} + f \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_2^2} + e'_{x_2} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + f'_{x_2} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} \equiv 0 \\[1ex]
g \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_1^2} + h \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_1 \partial x_2} + g'_{x_1} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + h'_{x_1} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\[1ex]
g \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_2 \partial x_1} + h \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_2^2} + g'_{x_2} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + h'_{x_2} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0
\end{cases}
$$

$$
(26)\qquad
\begin{cases}
n \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_1^2} + p \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_1 \partial x_2} + n'_{x_1} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + p'_{x_1} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\[1ex]
n \frac{\partial^1 A_{1,2}}{\partial x_2 \partial x_1} + p \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_2^2} + n'_{x_2} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + p'_{x_2} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\[1ex]
r \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_1^2} + s \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_1 \partial x_2} + r'_{x_1} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + s'_{x_1} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\[1ex]
r \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_2 \partial x_1} + s \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_2^2} + r'_{x_2} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + s'_{x_2} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0
\end{cases}
$$

Sistemul (24) este sistem omogen de 4 ecuaţii, avînd ca necunoscute, derivatele parţiale de ordinul întîi şi doi ale funcţiei $A_{1,2}(x_1, x_2)$. El este verificat şi de derivatele parţiale de ordinul întîi şi doi ale funcţiei $B_{1,2}(x_1, x_2)$.

Întrucît aceste două funcţii $A_{1\,2}$ şi $B_{1,2}$ trebuie să fie liniar independente, datorită cerinţei nomografice de a exista cîmpul binar al variabilelor x_1, x_2, rezultă că rangul matricii sistemului trebue să fie mai mic sau egal cu trei (rang $A \leqslant 3$).

$$
A = \begin{pmatrix}
a & b & o & a'_{x_1} & b'_{x_1} \\
o & a & b & a'_{x_2} & b'_{x_2} \\
c & d & o & c'_{x_1} & d'_{x_1} \\
o & c & d & c_{x_2} & d'_{x_2}
\end{pmatrix}
$$

Se observă că primele 3 coloane ale matricii A sînt liniar independente, deoarece primul determinant de ordinul trei este diferit de zero:

$$b^2c - abd = b(bc - ad) \neq 0$$

şi deci rang $A \geqslant 3$.

Din cele 2 observaţii rezultă deci că rang $A = 3$.

Din acest motiv minorii de ordinul patru sînt nuli. Adică avem:

$$\text{(27)}\qquad \begin{cases} c \cdot a'_{x_1} - a \cdot c'_{x_1} + d \cdot a'_{x_2} - b \cdot c'_{x_2} \equiv 0 \\ c \cdot b'_{x_1} - a \cdot d'_{x} + d \cdot b'_{x_2} - b \cdot d'_{x_2} \equiv 0. \end{cases}$$

În aceste condiții se poate rezolva sistemul (24) relativ la

$\dfrac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_1^2}$; $\dfrac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_1 \partial x_2}$; $\dfrac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_2^2}$. Găsim:

$$\text{(28)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_1^2} \equiv A \dfrac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + B \dfrac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_1 \partial x_2} \equiv C \dfrac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + D \dfrac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x_2^2} \equiv E \dfrac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + F \dfrac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2}, \end{cases}$$

unde:

$$A = \frac{b \cdot c'_{x_1} - d \cdot a'_{x_1}}{\Delta_1}; \quad B = \frac{b \cdot d'_{x_1} - d \cdot b'_{x}}{\Delta_1},$$

$$C = \frac{c \cdot a'_{x_1} - a \cdot c'_{x_1}}{\Delta_1}; \quad D = \frac{c \cdot b'_{x_1} - a \cdot d'_{x_1}}{\Delta_1};$$

$$E = \frac{a^2 \cdot c'_{x_1} - a \cdot c a'_{x_1} - \Delta_1 a'_{x_2}}{b\Delta_1}; \quad F = \frac{a^2 d'_{x_1} - acb'_{x_1} - \Delta_1 b'_{x_2}}{b\Delta_1};$$

$$\Delta_1 = a\,d - b\,c.$$

Să derivăm acum ecuațiile sistemului (28) în raport cu variabilele x_3, x_4:

$$\begin{cases} A'_{x_k} \dfrac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + B'_{x_k} \dfrac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\ C'_{x_k} \dfrac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + D'_{x_k} \dfrac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \\ E'_{x_k} \dfrac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + F'_{x_k} \dfrac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0 \qquad k = 3, 4, 5, 6, 9, 10. \end{cases}$$

Amintind din nou că $\dfrac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} \neq 0$ și $\dfrac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \neq 0$ găsim:

$$\text{(29)}\qquad \begin{vmatrix} A'_{x_k} & B'_{x_k} \\ C'_{x_k} & D'_{x_k} \end{vmatrix} \equiv 0; \quad \begin{vmatrix} A'_{x_k} & D'_{x_k} \\ E'_{x_k} & F'_{x_k} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Cu substituția $\dfrac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} = U(x_1, x_2)$, $\dfrac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} = V(x_1, x_2)$ sistemul (28) devine:

$$\text{(28')}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &\equiv AU + BV \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} \equiv \frac{\partial V}{\partial x_1} &\equiv CU + DV \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} &\equiv EU + FV. \end{aligned}$$

Deoarece sistemul (28') are ca și soluție funcția $B_{1,2}(x_1, x_2)$, el va avea deci două soluții liniar independente și prin urmare, el trebue să fie complet integrabil.

Scriem condițiile de complet integrabilitate (derivăm prima ecuație a sistemului în raport cu x_2 și a doua în raport cu x_1, apoi a doua ecuație în raport cu x_2 și a treia în raport cu x_1).

Avem:

$$\text{(30)}\qquad \begin{aligned} A'_{x_2} - C'_{x_1} + BE - CD &\equiv 0 \\ B'_{x_2} - D'_{x_1} + AD + BF - BC - D^2 &\equiv 0 \\ C'_{x_2} - E'_{x_1} + C^2 + DE - AE - CF &\equiv 0 \\ D'_{x_2} - F'_{x_1} + CD - BE &\equiv 0. \end{aligned}$$

Să impunem acum condiția ca soluția (28) să verifice și sistemele (25), (26). Găsim sistemele:

$$\text{(31)}\qquad \begin{aligned} (Ae + Cf + e'_{x_1}) \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + (Be + Df + f'_{x_1}) \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} &\equiv 0 \\ (Ce + Ef + e'_{x_1}) \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + (De + Ff + f'_{x_1}) \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} &\equiv 0 \\ (Ag + Ch + g'_{x_1}) \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + (Bg + Dh + h'_{x_1}) \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} &\equiv 0 \\ (Cg + Eh + g'_{x_1}) \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + (Dg + Fh + h'_{x_1}) \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$(32)\quad \begin{aligned} &(An + Cp + n'_{x_1})\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + (Bn + Dp + p'_{x_1})\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0\\ &(Cn + Ep + n'_{x_2})\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} + (Dn + Fp + p'_{x_2})\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0\\ &(Ar + Cs + r'_{x_1})\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + (Br + Ds + s'_{x_1})\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0\\ &(Cr + Es + r'_{x_2})\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} + (Dr + Fs + s'_{x_2})\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \equiv 0. \end{aligned}$$

Dacă scriem acum condiţia de compatibilitate a sistemelor (31) şi (32) şi menţionînd iar că $\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_1} \neq 0 \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x_2} \neq 0$ avem :

$$(33)\quad \begin{aligned} &\begin{vmatrix} Ae + Cf + e'_{x_1} & Be + Df + f'_{x_1}\\ Ce + Ef + e'_{x_2} & De + Ef + f'_{x_2} \end{vmatrix} \equiv 0\\ &\begin{vmatrix} Ae + Cf + e'_{x_1} & Be + Df + f'_{x_1}\\ Ag + Ch + g'_{x_1} & Bg + Dh + h'_{x_1} \end{vmatrix} \equiv 0\\ &\begin{vmatrix} Ae + Cf + e'_{x_1} & Be + Df + f'_{x_1}\\ Cg + Eh + g'_{x_2} & Dg + Fh + h'_{x_2} \end{vmatrix} \equiv 0.\\ &\begin{vmatrix} A + eCf + e'_{x_1} & Be + Df + f'_{x_1}\\ An + Cp + n'_{x_1} & Bn + Dp + p'_{x_1} \end{vmatrix} \equiv 0\\ &\begin{vmatrix} Ae + Cf + e'_{x_1} & Be + Df + f'_{x_1}\\ Cn + Ep + n'_{x_2} & Dn + Fp + p'_{x_2} \end{vmatrix} \equiv 0\\ &\begin{vmatrix} Ae + Cf + e'_{x_1} & Be + Df + f'_{x_1}\\ Ar + Cs + r'_{x_1} & Br + Ds + s'_{x_1} \end{vmatrix} \equiv 0\\ &\begin{vmatrix} Ae + Cf + e'_{x_1} & Be + Df + f'_{x_1}\\ Cr + Es + r'_{x_2} & Dr + Fs + s'_{x_2} \end{vmatrix} \equiv 0 \end{aligned}$$

Din cele prezentate pînă aici rezultă următoarea :

TEOREMA: *Pentru ca sistemul de ecuaţii* (2) *cu condiţiile* (3) *să poată fi pus sub forma* (4) *este necesar să fie îndeplinite condiţiile* (16), (23), (27), (29), (30), (33).

Integrînd sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale (28') găsim funcţiile $A_{1,2}(x_1, x_2)$, $B_{1,2}(x_1, x_2)$ iar apoi din sistemele (11), (13) găsim funcţiile $A_{3,4}(x_3, x_4)$, $B_{3,4}(x_3, x_4)$, $A_{5,6}(x_5, x_6)$, $B_{5,6}(x_5, x_6)$ $A_{9,10}(x_9, x_{10})$, $B_{9,10}(x_9, x_{10})$.

LA REPRÉSENTATION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS PAR DES NOMOGRAMMES À TRANSPARENT ORIENTÉ

RÉSUMÉ

Dans ce travail nous avons étudié la représentation nomographique des systèmes de quatre équations à douze variables par des nomogrammes à transparent orienté.

On considère le système d'équations (1) et on suppose remplies les conditions pour l'existence des fonctions implicites (2).

Pour que le système d'équations (1) respectivement (2) puisse être représenté nomographiquement par un nomogramme à transparent orienté, il faut ou bien l'amener à la forme canonique (4), où bien que les fonctions A_{ij}, B_{ij} satisfassent aux conditions (5).

Le schéma du nomogramme qui résout le système d'équations (4) est donné dans la figure 1.

Le problème de la représentation nomographique du système (2) par un nomogramme dont le schéma est donné dans la figure 1 revient à trouver le système d'identités (6).

Le résultat principal du travail est contenu dans le dernier théorème:

Pour que le système d'équations (2) qui satisfait aux conditions (3) puisse se mettre sous la forme (4) il est nécessaire que les conditions (16), (19), (23), (27), (29), (30), (33), soient remplies.

BIBLIOGRAFIE

[1] Bal, L. Mihoc, M., *Sur la condition de Goursat de séparation des variables* Mathematica, (Cluj), **12** (35), 2, 217–222 (1970).

[2]. Боголюбов Ю., О представимости системы двух уравнений с шестью переменными в виде $A_{rh} = A_{ij} + A_{pq}$, $B_{rh} = B_{ij} + B_{pq}$, допускающем построение номограмм с прозрачным ориентированным транспарантом. В кн. Номографический сборник, 7, М. ВЦ АН СССР, 128–142 (1970).

[3] Хованский Г. С. Методы номографирования. М. ВЦ АН СССР, Москва, 1964.

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România

Primit la 23. XII. 1972.