REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 2, Fascicola 2, 1973, pp. 131—136

ASUPRA UNEI GENERALIZĂRI A NOŢIUNII DE FUNCŢIE CONVEXĂ

de

GH. CIMOCA şi IOAN ŞERB
(Cluj)

§ 1. Introducere

Noţiunea clasică de funcţie convexă are o legătură strînsă cu interpolarea prin polinoame de gradul întîi şi cu unele ecuaţii funcţionale. Aceste legături au permis generalizarea noţiunii de funcţie convexă în două direcţii, prin introducerea funcţiilor convexe de ordin superior, legate de interpolarea prin polinoame de un grad dat [3] sau mai general în raport cu o mulţime interpolatoare de funcţii [2] şi prin definirea funcţiilor ε-convexe, în legătură cu ecuaţia funcţională a lui CAUCHY [1].

În această lucrare se defineşte o noţiune de ε-convexitate, mai puţin generală decît noţiunea de ε-convexitate din [1], dar care conduce la definirea unei noţiuni de ε-convexitate de ordin superior.

§ 2. Funcţii ε-convexe de ordinul întîi.

Considerăm o mulţime E de puncte de pe axa reală R, care conţine cel puţin trei puncte distincte. Fie $\varepsilon > 0$ un număr fixat şi f o funcţie definită pe mulţimea E cu valori reale. Notînd cu $\mathfrak{L}_n$ mulţimea polinoamelor algebrice de grad cel mult n $(n \geqq 0)$ considerăm mulţimea :

$$\mathfrak{L}_1^\varepsilon(x_1, x_2; f) = \{p \in \mathfrak{L}_1 : | f(x_i) - p(x_i) | \leqq \varepsilon,\ x_i \in E,\ i = 1,2\}.$$

D e f i n i ţ i a 1. *Funcţia f se numeşte ε-convexă de ordinul întîi dacă oricare ar fi punctele $x_1 < x_2 < x_3$ din mulţimea E, există cel puţin un polinom $p \in \mathfrak{L}_1^\varepsilon(x_1, x_2; f)$ astfel încît: $p(x_3) + \varepsilon < f(x_3)$.*

Definiţia 2. [1]. *Funcţia f definită pe un interval $[a, b] \in$ ... cu valori reale, se numeşte ε-convexă în sensul lui Hyers şi Ulam dacă inegalitatea:*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) + \varepsilon$$

are loc pentru oricare două puncte x_1, x_2 din $[a, b]$ distincte şi pentru oric[e] $\lambda \in (0, 1)$.

Observaţii. *Se constată imediat că cele două noţiuni de ε-convexitate revin la noţiunea obişnuită de convexitate, dacă $\varepsilon = 0$. În lucrarea [1] se studiază de fapt funcţiile ε-convexe definite pe o submulţime convexă ş[i] închisă din spaţiul euclidian n-dimensional. Definiţia 1 prezintă avantaj[ul] în sensul că mulţimea de definiţie a funcţiei f poate fi o mulţime discret[ă] şi totodată se poate folosi pentru definirea unei noţiuni de ε-convexitate d[e] ordin superior.*

Pentru a putea enunţa mai uşor unele proprietăţi imediate, vom nota prin $\mathcal{C}_1(E)$ mulţimea funcţiilor convexe obişnuite definite pe mulţimea E şi prin $\mathcal{C}_1^\varepsilon(E)$ mulţimea funcţiilor ε-convexe de ordinul întîi pe mulţimea E.

Proprietatea 1. *Dacă $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ atunci $\mathcal{C}_1^\varepsilon(E) \subset \mathcal{C}_1^{\varepsilon'}(E)$.*

Proprietatea 2. *Dacă $\varepsilon > 0$ atunci $\mathcal{C}_1(E) \subset \mathcal{C}_1^\varepsilon(E)$ şi $\mathcal{C}_1(E) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{C}_1^\varepsilon(E)$.*

Referitor la proprietatea 2, se poate constata imediat că prima incluziune este strictă, analizînd următorul exemplu: fie $E = \{0, 1, 2\}$, $\varepsilon = 0{,}1$ şi funcţia $f: E \to R$ definită astfel $f(0) = 3$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0{,}9$. Se verifică imediat că $f \notin \mathcal{C}_1(E)$. Însă $f \in \mathcal{C}_1^{0,1}(E)$ deoarece pentru polinomul $p(x) = -1{,}2x + 3{,}1$ sînt îndeplinite toate condiţiile din definiţia 1.

Relaţia care există între noţiunea de ε-convexitate de ordinul întîi şi noţiunea de ε-convexitate în sensul lui HYERS şi ULAM [1] este dată de:

TEOREMA 1. *Dacă $E = [a, b]$ atunci orice funcţie ε-convexă de ordinul întîi este o funcţie 2ε-convexă în sensul lui Hyers şi Ulam.*

Demonstraţie. Fie f o funcţie ε-convexă de ordinul întîi pe $[a,b]$ şi trei puncte distincte $a \leqq x_1 < x_2 < x_3 \leqq b$. Atunci există în mulţimea $\mathfrak{P}_1^\varepsilon(x_1, x_2; f)$ un polinom $p(x) = cx + d$ astfel încît:

(1) $$p(x_1) \leqq f(x_1) + \varepsilon,$$

(2) $$p(x_2) \geqq f(x_2) - \varepsilon,$$

(3) $$p(x_3) < f(x_3) - \varepsilon,$$

Fie $\lambda \in (0, 1)$ astfel ales încît $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$. Pe baza inegalităţilor (1), (2) şi (3) se poate scrie succesiv:

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_3) \geqq \lambda(cx_1 + d - \varepsilon) + (1-\lambda)(cx_3 + d + \varepsilon) =$$
$$= c(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) + d + \varepsilon(1-2\lambda) = p(x_2) + \varepsilon(1-2\lambda) \geqq f(x_2) -$$
$$- \varepsilon + \varepsilon(1-2\lambda) \geqq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) - 2\varepsilon.$$

Folosind teorema 1 şi un rezultat din [1] se obţine:

Corolarul 1. *Dacă $f \in \mathcal{C}_1^\varepsilon([a, b])$, atunci există o funcţie $g \in \mathcal{C}_1([a, b])$ astfel încît: $|f(x) - g(x)| \leqq \varepsilon$, $x \in [a, b]$.*

§ 3. Funcţii ε-convexe de ordin superior

Fie $n \geqq 1$, un număr natural. Considerăm o mulţime de puncte de pe axa reală şi presupunem că E conţine cel puţin $n + 2$ puncte distincte. Fie f o funcţie definită pe E cu valori reale. Dacă $\varepsilon > 0$ este fixat se consideră mulţimea:

$$\mathfrak{P}_n^\varepsilon(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f) = \{p \in \mathfrak{P}_n : |f(x_i) - p(x_i)| \leqq \varepsilon,\ x_i \in E,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n+1\}.$$

Definiţia 3. *Funcţia f se numeşte ε-convexă de ordinul n pe mulţimea E dacă oricare ar fi punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ din E, există cel puţin un element $p \in \mathfrak{P}_n^\varepsilon(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$ astfel încît:*

(4) $$p(x_{n+2}) + \varepsilon < f(x_{n+2}).$$

Observaţii. *Definiţia 3 se poate extinde şi pentru $n = 0$, caz în care funcţiile ε-convexe de ordinul 0 coincid cu funcţiile convexe de ordinul 0 [3], adică sînt tocmai funcţiile crescătoare pe E. Deasemenea, se pot defini funcţiile ε-concave de ordinul n înlocuind în definiţia 3, inegalitatea (4) prin inegalitatea:*

(5) $$p(x_{n+2}) - \varepsilon > f(x_{n+2})$$

şi funcţiile ε — polinomiale de ordinul n cînd inegalitatea (4) se înlocuieşte prin inegalitatea:

(6) $$|p(x_{n+2}) - f(x_{n+2})| \leqq \varepsilon,$$

Proprietăţile 1 şi 2 menţionate la studiul funcţiilor ε-convexe d[e] ordinul întîi se extind imediat şi pentru cazul funcţiilor ε-convexe d[e] ordinul n.

D e f i n i ţ i a 4. *Se numeşte polinom extremal inferior (superior) a[l] mulţimii* $\mathfrak{L}^{\varepsilon}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$ *polinomul de interpolare de gradul* n, *a[l] cărui grafic trece prin punctele de coordonate:* $(x_i, f(x_i) + (-1)^{n-i+2}\varepsilon)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, *respectiv prin punctele de coordonate* $(x_i, f(x_i) +$

$$+ (-1)^{n-i+1}\varepsilon),\ i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

TEOREMA 2. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca funcţia* $f: E \to$ [...] *să fie ε-convexă (ε-concavă) de ordinul n este ca pentru orice sistem de punc[te]* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ *din E, pentru polinomul extremal inferior (superior)* *al mulţimii* $\mathfrak{L}^{\varepsilon}_n(x_1, \ldots, x_{n+1}; f)$ *să fie verificată inegalitatea* (4) *respecti[v]* *inegalitatea* (5).

Demonstraţie. Este suficient să se demonstreze teorema pentru cazu[l] funcţiilor ε-convexe de ordinul n. Suficienţa condiţiei este evidentă, poli[-] nomul extremal inferior verificînd inegalitatea (4).

Pentru demonstrarea necesităţii este suficient să arătăm că are lo[c] inegalitatea $p(x_{n+2}) \geqq \underline{p}(x_{n+2})$ unde am notat cu p polinomul di[n] $\mathfrak{L}^{\varepsilon}_n(x_1, \ldots, x_{n+1}; f)$ care verifică inegalitatea (4) iar cu $\underline{p}$ polinomul extre[-] mal inferior al aceleiaşi mulţimi. Din definiţia mulţimii $\mathfrak{L}^{\varepsilon}_n(x_1, \ldots, x_{n+1}; f)$ rezultă că p este un polinom de interpolare care trece prin nişte punct[e] de coordonate $(x_i, f(x_i) + \varepsilon_i)$ cu $|\varepsilon_i| \leqq \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, adică:

$$p(x_{n+2}) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{[f(x_i) + \varepsilon_i]\omega_n(x_{n+2})}{\omega'_n(x_i)(x_{n+2} - x_i)},$$

unde $\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1})$.

Dar atunci:

$$p(x_{n+2}) \geqq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)\omega_n(x_{n+2})}{\omega'_n(x_i)(x_{n+2} - x_i)} + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{-(-1)^{n-i+1}\varepsilon\omega_n(x_{n+2})}{(-1)^{n-i+1}|\omega'_n(x_i)|(x_{n+2} - x_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{[f(x_i) + (-1)^{n-i+2}\varepsilon]\omega_n(x_{n+2})}{\omega'_n(x_i)(x_{n+2} - x_i)} = \underline{p}(x_{n+2}).$$

Pentru enunţarea altor rezultate vom nota cu $C[a, b]$, mulţimea funcţi[i]lor continue pe $[a, b]$ şi cu $E_n(f)$ cea mai bună aproximaţie a funcţi[ei] $f \in C[a, b]$, pe intervalul $[a, b]$, prin polinoame de grad cel mult n, [2], î[n] norma uniformă.

O b s e r v a ţ i e. *Semnalăm faptul că ε-polinomialitatea de orice ordi[n] a unei funcţii pe un interval* $[a, b]$ *nu implică continuitatea funcţiei pe ace[l] interval, întrucît se pot construi cu uşurinţă funcţii discontinue pe interva[-] lul* $[a, b]$ *şi care sînt ε-polinomiale de un ordin dat n. Construirea acesto[r] exemple se bazează pe corolarul teoremei care urmează.*

TEOREMA 3. *Fie* $\varepsilon > 0$ *dat şi* $f \in C[a, b]$. *Pentru ca funcţia f să fie funcţie ε-polinomială de ordinul n pe* $[a, b]$ *este necesar şi suficient să existe un polinom* $p \in \mathfrak{L}_n$ *astfel încît inegalitatea* $|f(x) - p(x)| \leqq \varepsilon$ *să fie verificată pentru orice punct* $x \in [a, b]$.

Demonstraţie. Suficienţa condiţiei este evidentă. Pentru a demonstra necesitatea condiţiei vom folosi o consecinţă a unei teoreme a lui HELLY [4], care are următorul enunţ: *Fie* $I_1, I_2, \ldots, I_m$, $m \geqq n + 2$, *un şir de segmente de dreaptă, paralele cu axa OY, avînd lungimi egale şi ale căror proiecţii pe axa OX sînt egal distanţate. Dacă pentru fiecare sistem de cîte* $n + 2$ *segmente din şir, există un polinom în* $\mathfrak{L}_n$ *al cărui grafic intersectează toate segmentele din sistem, atunci există în* $\mathfrak{L}_n$ *un polinom al cărui grafic intersectează toate segmentele din şir.*

Să considerăm pentru început o diviziune echidistantă pentru intervalul $[a, b]: a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} = b$ şi mulţimea $\mathfrak{L}^{\varepsilon}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$ corespunzătoare. Se arată uşor că există o constantă $K > 0$ astfel încît pentru orice polinom $p \in \mathfrak{L}^{\varepsilon}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$ are loc inegalitatea:

$$|p(x'') - p(x')| \leqq K|x'' - x'|, \tag{7}$$

oricare ar fi punctele distincte x', x'' din $[a, b]$.

Prin înjumătăţirea succesivă a diviziunii de plecare obţinem la pasul k o diviziune echidistantă conţinînd $2^{k-1}n + 1$ puncte. Deoarece funcţia f este ε-polinomială, aplicînd rezultatul amintit la începutul demonstraţiei, obţinem o submulţime nevidă $\mathfrak{L}^{\varepsilon}_{n,k}$ a mulţimii $\mathfrak{L}^{\varepsilon}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$ astfel încît pentru orice $p \in \mathfrak{L}^{\varepsilon}_{n,k}$ şi pentru orice punct x_j din diviziunea de la pasul k are loc inegalitatea:

$$|f(x_j) - p(x_j)| \leqq \varepsilon. \tag{8}$$

Din inegalităţile (7) şi (8) rezultă că pentru orice polinom p şi pentru orice $x \in [a, b]$ avem:

$$|f(x) - p(x)| \leqq \varepsilon + \delta_k,$$

unde $\delta_k > 0$ şi $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$. Aşadar $E_n(f) \leqq \varepsilon$ şi polinomul de cea mai bună aproximaţie de gradul n al funcţiei f pe intervalul $[a, b]$ verifică inegalitatea din enunţul teoremei.

C o r o l a r u l 2. *Condiţia necesară şi suficientă ca funcţia* $f \in C[a, b]$ *să fie ε-polinomială de ordinul n pe* $[a, b]$ *este ca* $E_n(f) \leqq \varepsilon$.

Folosind lema lui Borel-Lebesgue şi corolarul 2 se obţine:

TEOREMA 4. *Fie n un număr natural şi* $\varepsilon > 0$. *Dacă* $f \in C[a, b]$, *atunci, există un număr finit de puncte* $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$, *astfel încît pe orice interval* $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, m - 1$, *funcţia f este ε-polinomială de ordinul n.*

Unele din rezultatele enunţate în acestă lucrare se pot regăsi în cazul funcţiilor ε-convexe în raport cu o mulţime interpolatoare de funcţii [2], această nouă noţiune de convexitate definindu-se într-un mod analog cu ε-convexitatea faţă de mulţimea $\mathfrak{L}_n$.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE FONCTION CONVEXE

RÉSUMÉ

Dans ce travail on définit les fonctions ε-convexes d'ordre $n(n \geqq 1)$ en utilisant certaines idées des travaux [1], [2] et [3] et on obtient quelques résultats sur la caractérisation de ces fonctions.

BIBLIOGRAFIE

[1] Hyers D. H., Ulam S. M., *Approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 3, 831–828 (1952).

[2] Popoviciu E., *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării*, Editura Dacia, Cluj, 1972.

[3] Popoviciu T., *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Mathematica (Cluj), VIII, 1–85 (1933).

[4] Rademacher H., Schoenberg I. J., *Helly's Theorems on Convex Domains and Tchebycheff's Approximation Problems*, Canadian J. of Math., 2. 245–256 (1950).

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România

Primit la 22. I. 1973.