REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 2, Fascicola 2, 1973, pp. 143–149

ASUPRA METODEI MONTE-CARLO PENTRU CALCULUL UNOR INTEGRALE SIMPLE

de

CARMEN DARIE
(Cluj)

În cele ce urmează vom considera o funcţie reală f de variabilă reală x, crescătoare şi derivabilă pe $[0, 1]$ astfel ca $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$ şi ne interesează o estimare a integralei

$$I = \int_0^1 f(x)\, dx$$

Media aritmetică a n valori obţinute prin observaţii independente asupra unei variabile aleatoare X de densitate de probabilitate $f'(x)$ este o estimare convergentă a speranţei matematice a lui X, adică a integralei $\int_1^0 xf'(x)\, dx$.

Dar

$$\int_0^1 xf'(x)\, dx = 1 - \int_0^1 f(x)\, dx = 1 - I$$

de unde

$$I = 1 - \int_0^1 xf'(x)\, dx$$

Deci o estimare a lui I va fi de forma

$$I_n = 1 - \frac{1}{n}(x_1 + \ldots\ldots + x_n)$$

Variaţia V_n a estimatorului I_n este $V_n = \frac{1}{n} S^2$ unde

$$S^2 = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx - (1 - I)^2$$

$$= 2I - I^2 - 2\int_0^1 xf(x)dx$$

În cazul clasic cînd se folosesc puncte uniform repartizate în [0,1] estimarea lui I este de forma

$$I'_n = \frac{1}{n}[(fx_1) + \ldots + f(x_n)]$$

variaţia estimatorului fiind în acest caz

$$V'_n = \frac{1}{n} S'^2$$

unde

$$S'^2 = \int_0^1 f^2(x)\,dx - I^2.$$

JEAN MÉRIC [2] demonstrează că metoda Monte-Carlo pentru calculul integralei $I = \int_0^1 f(x)dx$ dintr-o funcţie reală f de variabilă reală, crescătoare, derivabilă pe [0, 1], astfel ca $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ care este uniform majorată pe [0, 1] de o funcţie a familiei $(x^r)_{r>1}$ este mai bună decît metoda clasică, adică

$$E_f = S'^2 - S^2 \geqslant 0.$$

În nota de faţă vrem să dăm o evaluare a lui E_f pentru o clasă mai generală de funcţii: clasa funcţiilor convexe pe [0,1] cu proprietatea $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. În acest caz

$$E_f = S'^2 - S^2 = \int_0^1 f^2(x)dx - I^2 - 2I + I^2 + 2\int_0^1 xf(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 f^2(x)dx - 2I + 2\int_0^1 f(x)\,dx.$$

În cele ce urmează vom da delimitări pentru I,

$$\int_0^1 xf(x)\,dx \text{ şi } \int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

Din faptul că funcţia $f(x)$ este convexă rezultă

$$f(\alpha t + \beta y) \leqslant \alpha f(t) + \beta f(y)$$

$$\alpha, \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta = 1$$

Făcînd $y = 0$ obţinem

$$f(\alpha t) \leqslant \alpha f(t) \quad \alpha \in [0, 1]$$

Notăm

$$\alpha t = x_1, \ t = x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$$

Atunci

(1) $$f(x_1) \leqslant \frac{x_1}{x_2} f(x_2) \qquad \frac{f(x_1)}{x_1} \leqslant \frac{f(x_2)}{x_2}, \ x_1 < x_2$$

adică $\frac{f(x)}{x}$ este crescătoare.

Din (1) şi $f(1) = 1$ se obţine

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(1)}{1} = 1, \quad x \in (0, 1]$$

deci

$$f(x) \leqslant x$$

si

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

În felul acesta am obţinut delimitarea lui I

(2) $$0 < I \leqslant \frac{1}{2}.$$

Din ecuaţia tangentei la curba $f(t)$ rezultă inegalitatea

$$f'(x)(t - x) + f(x) \leqslant f(t) \quad \forall (x, t) \in [0, 1]^2$$

Dacă integrăm după t obținem

$$\int_0^1 f(t)\,dt \geqslant f'(x)\left(\int_0^1 t\,dt - x\right) + f(x)$$

(3) $$I \geqslant f(x) + f'(x)\left(\frac{1}{2} - x\right) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Dacă integrăm după x obținem

$$t\int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 f'(x)\,dx + \int_0^1 f(x)dx \leqslant f(t) \qquad \forall\ t \in [0, 1]$$

$$t - \int_0^1 xf'(x)dx + I \leqslant f(t)$$

$$t - 1 + I + I \leqslant f(t)$$

$$2I \leqslant f(t) - t + 1 \qquad \forall\ t \in [0, 1].$$

Deci

(4) $$I \leqslant \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2}(x - 1) \qquad \forall\, x \in [0, 1].$$

Din (3) și (4) rezultă

$$f'(x)\left(\frac{1}{2} - x\right) + f(x) \leqslant I \leqslant \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2}(x - 1).$$

Dacă înmulțim (3) cu x și integrăm se obține

$$I \cdot \int_0^1 xdx \geqslant \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 f'(x)\left(\frac{1}{2}\,x - x^2\right) dx$$

de unde

(5) $$\int_0^1 xf(x)dx \leqslant \frac{1}{3}\left(I + \frac{1}{2}\right).$$

Dacă înmulțim (4) cu x și integrăm se obține

$$2I\int_0^1 x\,dx \leqslant \int_0^1 xf(x)\,dx - \int_0^1 x(x - 1)dx$$

dică

(6) $$\int_0^1 xf(x)dx \geqslant \frac{1}{2}\left(2I - \frac{1}{3}\right).$$

Din (5) și (6) se obține delimitarea pentru $\int_0^1 xf(x)dx$

(7) $$I - \frac{1}{6} \leqslant \int_0^1 xf(x)dx \leqslant \frac{1}{3}\left(I + \frac{1}{2}\right).$$

Utilizînd rezultatul lui B. J. ANDERSSON [1],

TEOREMA. *Oricare ar fi* $f_1, f_2, \ldots, f_n(x)$ *convexe, definite pe* $[0, 1]$ *astfel încît*

$$f_k(x) \geqslant 0,\ f_k(0) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

avem

$$\int_0^1 f_1(x) \ldots f_n(x)dx \geqslant \frac{2^n}{n+1}\left(\int_0^1 f_1(x)dx\right) \ldots \left(\int_0^1 f_n(x)dx\right),$$

facem particularizarea

$$n = 2 \qquad f_1(x) = x \qquad f_2(x) = f(x)$$

și obținem

$$\int_0^1 f(x)dx \geqslant \frac{2}{3}\,I$$

care este o delimitare inferioară mai bună pentru integrală decît (6).

Utilizînd acest rezultat se obține

(8) $$\frac{2}{3}\,I \leqslant \int_0^1 xf(x)dx \leqslant \frac{1}{3}\left(I + \frac{1}{2}\right).$$

Înmulțind (4) cu $f(x)$ și integrînd se obține

$$\int_0^1 xf(x)dx \leqslant \int_0^1 f^2(x)dx + I - 2I^2$$

Dar

$$\max_{I \in \left(0, \frac{1}{2}\right]} (I - 2I^2) = \frac{1}{8}.$$

Deci

$$(9) \qquad \int_0^1 x f(x) dx \leqslant \int_0^1 f^2(x) dx + \frac{1}{8}.$$

Din (8) şi (9) obţinem următoarea delimitare pentru E_f

$$E_f = \int_0^1 f^2(x) dx - 2I + 2 \int_0^1 x f(x) dx$$

$$\geqslant \int_0^1 x f(x) dx - \frac{1}{8} - 2I + 2 \int_0^1 x f(x) dx =$$

$$= 3 \int_0^1 f(x) dx - 2I - \frac{1}{8} \geqslant 2I - 2I - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}.$$

Deci

$$(10) \qquad -\frac{1}{8} \leqslant E_f$$

Ne interesează delimitarea superioară a lui E_f. Pentru aceasta înmul-ţim (3) cu $f(x)$ şi integrăm. Vom obţine

$$(11) \qquad \int_0^1 f^2(x) dx \leqslant \frac{2}{3} I^2 + \frac{1}{6}.$$

Din inegalitatea lui B. J. Andersson cu particularizarea $n = 2$, $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ se obţine

$$(12) \qquad \int_0^1 f^2(x) dx \geqslant \frac{4}{3} I^2.$$

Din (11) şi (12) rezultă

$$(13) \qquad \frac{4}{3} I^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x) dx \leqslant \frac{2}{3} I^2 + \frac{1}{6}.$$

Deci

$$E_f \leqslant \frac{2}{3} I^2 + \frac{1}{6} - 2I + \frac{2}{3}\left(I + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} I^2 + \frac{1}{6} - 2I + \frac{2}{3} I + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{2}{3} I^2 - \frac{4}{3} I + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$$

deoarece pentru $I \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ $\frac{2}{3} I^2 - \frac{4}{3} I + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$.

Deci

$$(14) \qquad E_f \leqslant \frac{1}{2}$$

În felul acesta s-au obţinut limitele de variaţie ale lui E_f

$$-\frac{1}{8} \leqslant E_f \leqslant \frac{1}{2}.$$

SUR LA MÉTHODE DE MONTE-CARLO POUR LE CALCUL DE CERTAINES INTÉGRALES SIMPLES

RÉSUMÉ

Dans cette Note est exposée une étude comparative de la méthode classique et de la méthode Monte-Carlo pour le calcul de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$ d'une fonction f réelle, de variable réelle, définie sur $[0, 1]$ dérivable, convexe, telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Andersson, B. J., *An inequality for convex functions*, *Nordisk Mat. Tidsk.* **6**, p. 25–26, (1958).

[2] Méric, Jean, *Sur une méthode de Monte-Carlo pour le calcul de certaines intégrales simples*, *Comptes Rendus*, T **268**, nr. **13**, p. 732–734 (1969).

[3] Mitrinović, D. S., *Analitičke nejednakosti* (1970).

Primit la 21. V. 1973.

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România