REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 2, Fascicola 2, 1973, pp. 151–157

ASUPRA p-CENTRELOR ABSOLUTE ALE UNUI GRAF. STABILITATEA p-CENTRELOR ABSOLUTE

de

HORVATH ION

(Cluj)

1. Introducere

Se consideră un graf $G(X, U)$ finit, conex şi neorientat. Fiecărui vîrf $x_i \in X$ i se ataşează un număr întreg nenegativ h_i, numit ponderea vîrfului x_i. Unei muchii $(x_i, x_j) \in U$ i se pune în corespondenţă numărul a_{ij} care reprezintă lungimea muchiei. Vom numi acest graf, *graf ponderat.*

Un punct arbitrar al grafului sau mai scurt un *punct al grafului* este, fie un vîrf $x_i \in X$, fie un punct oarecare de pe o muchie a grafului. Un punct al grafului se va nota cu $y \in G$.

Dacă $y \in (x_i, x_j)$, se va nota cu $\delta(x_i, y)$, respectiv $\delta(x_j, y)$ lungimea părţii de muchie cuprinsă între y şi vîrful x_i, respectiv vîrful x_j. În particular, y poate să coincidă cu unul din vîrfurile x_i, x_j.

Fie $y_i \in (x_k, x_{k+1})$, $y_j \in (x_s, x_{s+1})$. Distanţa între y_i şi y_j care se va nota cu $\delta(y_i, y_j)$ se defineşte astfel:

$$\delta(y_i, y_j) = \min_{\substack{t=k,k+1 \\ u=s,s+1}} \{\delta(y_i, x_t) + d(x_t, x_u) + \delta(x_u, y_j)\}$$

unde $d(x_t, u_u)$ este distanţa între vîrful x_t şi x_u, în sensul lui BERGE [5].

Fie $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$, $u_1 = (x_{i_1}, x_{i_2})$, $u_2 = (x_{i_2}, x_{i_3})$, $\ldots$, $u_k = (x_{i_k}, x_{i_{k+1}})$, un drum din graful G. Prin *lungime ponderată a drumului* u se înţelege produsul $h_{i_1} \Sigma_{j=1}^{k} a_{i_j i_{j+1}}$; *distanţa ponderată* între $x_i \in X$ şi $y_j \in G$ este produsul $h_i \delta(x_i, y_j)$.

Un punct $y_0 \in G$ se numește *centrul absolut al grafului ponderat* dacă oricare ar fi $x_i \in X$ are loc relația:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i \delta(x_i, y_0) \leqq \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ y \in G}} h_i \delta(x_i, y)$$

unde n este numărul vîrfurilor grafului G.

Se va nota cu $V_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$, $k < n$ vectorul boolean n-dime sional ale cărui componente $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ sînt egale cu 1, restul compone telor fiind egale cu zero. Dacă nu se specifică componentele se va nota simp V_n, iar vectorul nul $V_n(0)$.

Vectorul boolean V_n *este dominat de vectorul* V_n^* dacă $V_n \dot{\times} V_n^* = V$ S-a notat cu $\dot{\times}$ produsul boolean.

Determinarea centrului absolut al unui graf apare în problemele care se cere fixarea amplasării unei unități de pompieri a unui centru deservire a populației, a unei ambulanțe, etc. Ponderile sînt, în prim caz numere indicînd importanța obiectivelor industriale sau civile, în doilea caz numărul persoanelor din unitățile locative care fac apel la ac centru, respectiv necesită intervenția ambulanței.

Dacă se cere amplasarea a p-centre (p dat), astfel ca distanța ponderat de la un centru oarecare la un vîrf al grafului să fie minimă, spunem avem o problemă de p-centre absolute. Astfel de probleme se pun în caz determinării sectoarelor de miliție, a unor unități comerciale, etc.

În prima parte a lucrării se prezintă un algoritm pentru determinare mulțimilor

$$Q_\lambda(x_i) = \{y \mid \delta(y, x_i) \leqslant \lambda\} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$R_\lambda(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}) = \bigcap_{q=1,\ldots,t} Q_\lambda(x_{i_q}) - [\bigcap_{q=1,\ldots,t} Q_\lambda(x_{i_q})] \cap [\bigcup_{q=t+1,\ldots,n} Q_\lambda(x_{i_q})]$$

sugerată de [2]. Pentru determinarea p-centrelor absolute se propune soluție combinatorică.

În ultima parte a lucrării este abordată problema stabilității p-centre lor absolute.

2. Algoritm pentru determinarea p-centrelor absolute

Algoritmul constă din:

I. Se determină toate drumurile avînd o lungime ponderată dată λ care pornesc din vîrful $x_i \in X$, pentru un i fixat, adică $Q_\lambda(x_i)$.

II. Se atașează muchiilor sau segmentelor de muchii prin care tre aceste drumuri vectori booleeni n-dimensionali.

III. Se determină numărul centrelor absolute.

I. Presupunem că se dau sub forma unui tabel vecinii vîrfurilor grafului G:

$$(V) \qquad \begin{aligned} Vx_1 &= (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1k_1}) \\ Vx_2 &= (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2k_2}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Vx_n &= (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk_n}) \end{aligned}$$

Algoritmul operează cu trei tabele: A^*, A^{**}, A^{***}. Înaintea efectuării pasului $p = 1$, în A^* se va scrie $x_{i_1} = x_{i_0}$, în A^{**} se va trece Vx_{i_1}, iar A^{***} va fi vid. Se va lua $\Lambda = 0$ și $j = 1$.

A. Se consideră elementele lui Vx_{i_p} din A^{**}. Deosebim cazurile:

1. Vx_{i_p} din A^{**} are numai elemente 0. Se cercetează tabelul (V):

a) În tabelul (*V*), Vx_{i_p} are un singur element și anume pe $x_{i_{p-1}}$. A^{***} se va completa cu linia $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}; \delta(x_{i_p}, y_j^{i_1}))$. Se ia $j := j + 1$. Se continuă cu B.

b) în tabelul (*V*), Vx_{i_p} are cel puțin două elemente. Se continuă cu B.

2. Fie x_{i_q} primul element diferit de zero a lui Vx_{i_p} din A^{**}. Se ia $\Lambda = \Lambda + a_{i_p i_q} h_{i_1}$. Deosebim următoarele trei cazuri:

a) $\Lambda > \lambda$ sau $\Lambda = \lambda$ și $x_{i_q} \notin \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{p-1}}\}$. Noua linie care se înscrie în A^{***} se compune din elementele ultimei linii din A^* completată cu x_{i_q} și $\delta(x_{i_q}, y_j^{i_1}) = (\Lambda - \lambda)/h_{i_1}$, unde $y_j^{i_1} \in (x_{i_p}, x_{i_q})$. Se ia $j := j + 1$. Se continuă cu C.

b) $\Lambda = \lambda$ și $x_{i_q} \in \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{p-1}}\}$ sau $\Lambda < \lambda$ și $x_{i_q} \in \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{p-1}}\}$ se continuă cu C.

c) $\Lambda < \lambda$ și $x_{i_q} \notin \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{p-1}}\}$. A^{**} se completează cu linia Vx_{i_q} din tabelul (V). Se înlocuiește cu zero elementul x_{i_p} al acestei linii. În A^* va scrie o nouă linie: $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}, x_{i_q}$. Se ia $p := p + 1$, $x_{i_{p+1}} = x_{i_q}$ iar $Vx_{i_{p+1}} = Vx_{i_q}$. Dacă $p \leqslant 2$ se continuă cu D., în caz contrar se revine la A.

B. Se șterge ultima linie din A^* și A^{**}. Elementul x_{i_p} al liniei $Vx_{i_{p-1}}$ din A^{**} se înlocuiește cu zero și se șterge ultimul termen din Λ. Se ia $p := p - 1$. Dacă $p \leqslant 2$ se continuă cu D., în caz contrar se revine la A.

C. x_{i_q} din Vx_{i_p} în A^{**} se va înlocui cu zero. Se ia $\Lambda := \Lambda - a_{i_p i_q} h_{i_1}$. Se revine la A.

D. Deosebim cazurile:

1. $p = 2$ și Vx_{i_p} din A^{**} nu are elemente diferite de zero. Se scrie zero în locul lui x_{i_2} din Vx_{i_1} în A^{**}. Se continuă cu A.

2. $p = 2$ și Vx_{i_p} din A^{**} are element diferit de zero. Se continuă cu A.

3. $p = 1$ și Vx_p din A^{**} nu are element diferit de zero. Se continuă cu II.

4. $p = 1$ şi Vx_{i_p} din A^{**} are element diferit de zero. Se continuă cu A.

II. Considerăm liniile tabloului A^{***}

$$(x_i, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{j-1}}, x_{i_j}\,;\ \delta(x_{i_j}, y_k^i))$$

unde k este numărul drumurilor de lungime ponderată care pleacă din x_i. Punctul $y_k^i \in (x_{i_{j-1}}, x_{i_j})$. Două linii consecutive vor avea cel puţin un element distinct. Elementele unei linii sînt distincte.

Dacă $\delta(x_{i_j}, y_k) \leqq 0$, drumul respectiv are o lungime ponderată mai mică sau egală cu λ şi prin urmare vîrful x_{i_j} este ultimul punct al drumului. În caz contrar $x_{i_{j-1}}$ este ultimul vîrf iar drumul se termină în punctul y_k^i.

Fără restrîngerea generalităţii putem considera $x_i = x_1$ primul vîrf considerat în algoritm. În acest caz ataşarea vectorilor booleeni se face astfel:

IIA. Dacă $\delta(x_{i_j}, y_k^i) \leqslant 0$, fiecărei muchii determinată de perechi de vîrfuri consecutive din linia k, i se va ataşa vectorul boolean n-dimensional:

$$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = V_n(x_i) \tag{1}$$

IIB. Dacă $\delta(x_{i_j}, y_k^i) > 0$ procedăm ca la IIA, cu excepţia ultimelor două vîrfuri. Muchia $(x_{i_{j-1}}, x_{i_j})$ este divizată de y_k. Segmentului $(x_{i_{j-1}}, y_k^i)$ i se ataşează vectorul (1) iar segmentului (y_k, x_{i_j}) vectorul zero. După epuizarea liniilor tabloului A^{***}, muchiilor neluate în considerare li se ataşează vectorul zero.

Dacă vîrful considerat $x_i \neq x_1$ (primul vîrf considerat), fiecărei muchii sau segment de muchie i se ataşează un vector egal cu vectorul avut în ciclul anterior sumat logic cu vectorul care i se ataşează după regula IIA, IIB de mai sus. Prin ciclu s-a înţeles aplicarea lui I şi II o singură dată.

După epuizarea liniilor tabelului A^{***} se ia $i := i + 1$ şi se continuă cu I. Dacă $i + 1 := n + 1$ se trece la III.

De mai sus rezultă că unui segment de muchie sau unei muchii i se ataşează un vector boolean n-dimensional avînd componenta x_i-a egală cu 1 dacă din orice punct al segmentului se poate ajunge la vîrful x_i parcurgînd o distanţă ponderată $\leqslant \lambda$.

III. Din mulţimea vectorilor ataşaţi segmentelor de muchii se elimină din consideraţiile ulterioare, vectorii dominaţi de către alţi vectori, în baza teoremei următoare din [2]:

TEOREMĂ *Pentru un λ dat numărul centrelor absolute ale grafului G rămîne acelaşi dacă din mulţimea vectorilor ataşaţi segmentelor de muchii se elimină vectorii dominaţi de alţi vectori.*

Vectorii rămaşi vor constitui liniile unei matrici cu m linii şi n coloane. Problema determinării p-centrelor absolute s-a redus la o problemă de

acoperire: determinarea numărului minim de linii astfel ca suma booleană pe coloane să fie egală cu 1. Un algoritm pentru rezolvarea acestei probleme se poate găsi în [6].

Dacă numărul de centre obţinut este mai mare decît p se repetă algoritmul descris luînd $\lambda_1 < \lambda$.

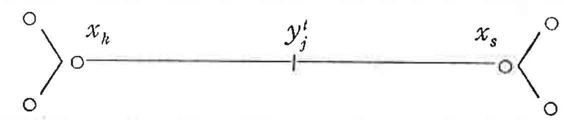
Vom nota cu λ^* aceea valoare a lui λ pentru care s-a obţinut p-centre absolute.

E x e m p l u (pentru faza I şi II)

Presupunem că după faza I a primului ciclu tabelul A^{***} conţine şi linia $(x_t, \ldots, x_k, x_s\,;\ \delta(x_s, y_j^t))$, $\delta(x_s, y_j^t) > 0$. În faza II muchia (x_k, x_s) va fi divizată, segmentelor obţinute li se vor ataşa vectorii

$$(x_k, y_j) : (0, \ldots, 01, 0, \ldots, 0) = V_n(x_t)$$

$$(y_j, x_s) : (0, \ldots, 0) = V_n(0)$$

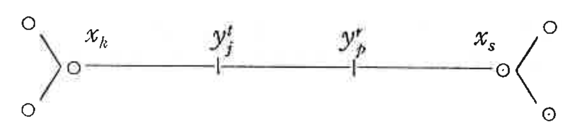


Dacă după parcurgerea fazei I în ciclul imediat următor tabelul A^{***} conţine şi linia $(x_r, \ldots, x_k, x_s\,;\ \delta(x_s, y_p^r))$, $0 < \delta(x_s, y_p^r) < \delta(x_s, y_j)$ în faza II, relativ la (x_k, x_s) se fac următoarele operaţii:

$$(x_k, y_j) : V_n(x_t) + V_n(x_r) = V_n(x_t, x_r)$$

$$(y_j^t, y_p^r) : V_n(0) + V_n(x_r) = V_n(x_r)$$

$$(y_p^r, x_s) : V_n(0) + V_n(0) = V_n(0)$$



3. Stabilitatea p-centrelor absolute

Problema propusă este următoarea: să se determine intervalul de variaţie al parametrului α_k, pentru un k fixat, $k = 1, 2, \ldots, n$, astfel ca p-centrele absolute să rămînă aceleaşi. α_k este ponderea adiţională lui h_k.

Fie $V_n^i(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$, $k < n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, vectorul ataşat p-centrului y_i.

Fie h_k^i ponderea adițională lui h_k pentru care are loc relația

$$(h_k + h_k^i)\,\delta(x_k, y_i) = \lambda^*$$

de unde avem

$$h_k^i = \frac{\lambda^*}{\delta(x_k, y_i)} - h_k^-$$

Dacă componenta x_k a vectorilor $V_n^1, V_n^3, \ldots, V_n^s$, $s \leqslant p$, este egală cu atunci

$$\alpha_k = \max_{i=1,2,\ldots,s} h_k^i = h_k^*$$

Prin urmare se poate enunța următoarea

TEOREMA: *p-centrele absolute ale unui graf G conex, finit și neorientat, rămîn aceleași dacă ponderea α_k adițională ponderii h_k a vîrfului x_k variază între*

$$0 \leqslant \alpha_k \leqslant h_k^*$$

Observații. *Problema de centru absolut a fost abordată în [1] și [2]. În ultima lucrare se consideră un graf particular și anume, un arbore. Metoda din [3] se poate extinde și la un graf conex dacă se găsește mai întîi arborele de acoperire minimă folosind rezultatele din [4], cu condiția ca drumurile grafului conex dat să aibă lungimi distincte.*

În unele probleme se dă distanța ponderată și se cere determinarea celui mai mic număr de centre absolute astfel ca distanța de la oricare vîrf al grafului la un centru oarecare să fie mai mic sau egal cu valoarea dată. În acest caz fazele I și II ale algoritmului se vor aplica o singură dată.

ON THE ABSOLUTE p-CENTRES OF A GRAF. THE STABILITY OF THE ABSOLUTE p-CENTERS

ABSTRACT

Let $G(X, U)$ be a graph finite, connected, non-directed and weighted. On denotes $\delta(y, x_i)$ the distance between vertex $x_i \in X$ and a point $y \in U$. In the first part of this paper on give an algorithm for computing the sets:

$$Q_\lambda(x_i) = \{y : \delta(y, x_i) \leqslant \lambda\}$$

$$R_\lambda(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}) = \bigcap_{q=1,\ldots,t} Q_\lambda(x_{i_q}) - [\bigcap_{q=1,\ldots,t} Q_\lambda(x_{i_q})] \cap [\bigcup_{q=t+1,\ldots,n} Q_\lambda(x_{i_q})]$$

with that, using the method of reference [2], on find the absolute p-centers of the graph. In the second part of paper is studing stability of solution if the weight h_i of vertex x_i is a parameter.

BIBLIOGRAFIE

[1] Hakimi, S. L., *Optimum Locations of Switching Centers and the Absolute Centres and Medians of a Graph.* Operations Research, **12**, 3, 450–459 (1964).
[2] Christofides Nicos and Viola, Peter, *The Optimum Location a Multi-centers on a Graph,* Operations Research Quarterly, **22**, 2, 145–154 (1971).
[3] Духобный., М. А., *Об одной оптималной задаче теории графов,* Математические заметки **10**, **2**, 355 – 359 (1971).
[4] Kruskal, Joseph B. Jr., *On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem,* Proc. Amer. Math. Soc., **7**, 1, 48–50 (1956).
[5] Berge Claude, *Teoria grafurilor și aplicațiile ei,* Buc. 1969.
[6] Tomescu, Ioan, *Introducere în combinatorică,* Buc. 195–196 (1972).

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii
Socialiste România

Primit la 27. XI. 1972.