REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 1, Fascicola 1, 1972, pp. 41–48

ASUPRA UNEI GENERALIZĂRI A PROBLEMEI CELEI MAI BUNE APROXIMAŢII

de

WOLFGANG W. BRECKNER
(Cluj)

1. Fie V şi Z două submulţimi nevide ale unui spaţiu vectorial normat Y real sau complex, T o aplicaţie a lui Z în Y şi y_0 un element din Y cu proprietatea că $V - y_0 \subseteq Z$.

Un element v_0 din V se numeşte element de cea mai bună T-aproximaţie locală al elementului y_0 prin elementele mulţimii V, dacă există o vecinătate

$$\mathcal{U}_\lambda(v_0) = \{y \in Y : \|y - v_0\| < \lambda\}, \qquad (\lambda > 0),$$

a lui v_0, astfel ca să aibă loc egalitatea

$$\|T(v_0 - y_0)\| = \inf \{\|T(v - y_0)\| : v \in \mathcal{U}_\lambda(v_0) \cap V\}.$$

Elementul $v_0 \in V$ se numeşte element de cea mai bună T-aproximaţie al elementului y_0 prin elementele mulţimii V, dacă are loc egalitatea

$$\|T(v_0 - y_0)\| = \inf \{\|T(v - y_0)\| : v \in V\}.$$

[11] au arătat că este avantajos ca la procedeul lui Newton-Raphson calcul al inversei unei funcţii reale continue, funcţia de pornire să nu aleasă în mod arbitrar, ci să fie soluţia unei anumite probleme de cea bună T-aproximaţie. În lucrările [8], [10], [12] ei au studiat şi unele aspe teoretice ale problemei celei mai bune T-aproximaţii, în cazul cînd Y spaţiul funcţiilor reale continue pe o mulţime compactă şi V o mulţime polinoame de grad fixat sau de funcţii raţionale generalizate. Precizări completări la aceste lucrări au fost făcute de WUYTACK L. [14], [15], [1 [17] şi NINOMIYA I. [13].

În cazul unui spaţiu vectorial normat Y arbitrar, problema celei bune T-aproximaţii a fost studiată pentru prima dată de BRECKNER W. [2] în ipotezele că $Z = Y$ şi că aplicaţia T se bucură de următoar trei proprietăţi:

(P_1) T este continuă;

(P_2) $T(\theta) = \theta$, unde cu θ s-a notat elementul nul al spaţiului Y;

(P_3) egalitatea

$$\operatorname{sgn} \operatorname{Re} y^*(T(y_1) - T(y_2)) = \operatorname{sgn} \operatorname{Re} y^*(y_1 - y_2)$$

are loc oricare ar fi elementele y_1, y_2 din Y şi oricare ar fi funcţionala y^* d $\sigma(Y^*, Y)$-închiderea mulţimii punctelor extremale ale sferei unitate a sp ţiului dual Y^* al lui Y.

Ideea de bază din lucrarea [2] a constat în definirea unei noţiuni d regularitate faţă de o mulţime de conuri şi în demonstrarea pentru asemene mulţimi a unui criteriu care generalizează criteriul lui Markov-Kolmog rov din teoria celei mai bune aproximaţii în sens Cebîşev (a se vede MARKOFF W. [7], KOLMOGOROV A. N. [5]). Aplicînd apoi acest criteriu s-a dedus în [2] şi alte criterii de caracterizare a elementelor de cea ma bună T-aproximaţie analoge unor criterii cunoscute din teoria celei ma bune aproximaţii.

În lucrarea de faţă se continuă aceste cercetări din [2]. Fără a se cer verificarea proprietăţilor (P_2) şi (P_3) de către aplicaţia T, se stabileşte î secţiunea a treia o teoremă, care indică o condiţie necesară pentru elemen tele de cea mai bună T-aproximaţie locală şi care constituie o generalizar a criteriului de bază obţinut în lucrarea [2].

2. În cele ce urmează notăm cu Y întotdeauna un spaţiu vectorial norma peste cîmpul numerelor reale sau complexe care nu se reduce la elementu nul şi cu Y^* dualul său algebric-topologic. Sfera unitate închisă a spaţiulu Y^* se notează cu S_{Y^*}, iar mulţimea punctelor extremale ale unei mulţim $M \subseteq Y^*$ cu $Ep(M)$.

T va fi ca în secţiunea precedentă o aplicaţie a unei mulţimi nevide $Z \subseteq Y$ în Y. Dacă y este un element din Z, atunci se notează cu

$$E(y) = \{y^* \in Ep(S_{Y^*}) : y^*(T(y)) = \|T(y)\|\}.$$

Sensul noţiunilor de analiză funcţională folosite în lucrare este cel tratatul lui KÖTHE G. [6].

3. Dăm mai întîi

Definiţia 1. *O mulţime $S \subseteq Ep(S_{Y^*})$ se numeşte signatură a ele- entului $y \in Z$, dacă $E(y) \subseteq S$.*

În cazul particular cînd T este aplicaţia identică a spaţiului Y pe el suşi, definiţia signaturii a fost dată de BRECKNER W. W. [1, Definiţia 1] şi este asemănătoare cu cea dată de BROSOWSKI B. [3, Definition care în locul lui $Ep(S_{Y^*})$ a considerat însă o anumită submulţime $\sigma(Y^*, Y)$- chisă a mulţimii S_{Y^*}.

Definiţia 2. *Fie V o submulţime nevidă a spaţiului Y şi φ o apli- aţie a lui V în mulţimea părţilor $\mathcal{P}(Y)$ a lui Y, astfel ca pentru fiecare element din V mulţimea $\varphi(v)$ să fie un con ascuţit cu vîrful în θ. Mulţimea V se umeşte φ-regulară, dacă pentru orice $y \in Y$ cu $V - y \subseteq Z$, orice $v_0 \in V$, rice $w \in \varphi(v_0)$, orice signatură S a lui $v_0 - y$ cu proprietatea că*

$\operatorname{Re} y^*(w) \geqslant a > 0$ şi $\operatorname{Re} y^*(T(v_0 - y)) \geqslant b > 0$ pentru orice $y^* \in S$ i pentru orice număr $\lambda > 0$ există un element v_λ în V, astfel încît să fie atisfăcute relaţiile:

(R_1) $\|v_\lambda - v_0\| < \lambda$;

(R_2) $\operatorname{Re} y^*(T(v_\lambda - y)) < \|T(v_0 - y)\|$ *pentru orice* $y^* \in S$.

Observăm că această noţiune de mulţime φ-regulară generalizează noţiunea de mulţime φ-regulară din teoria celei mai bune aproximaţii, noţiune introdusă de BRECKNER W. W. [1, Definiţia 2.2].

Rezultatul principal al lucrării este următoarea teoremă:

TEOREMĂ. *Dacă V, Z sînt două submulţimi nevide ale spaţiului vectorial normat Y şi $T : Z \to Y$ o aplicaţie continuă, atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

1° *V este o mulţime φ-regulară.*

2° *Oricare ar fi y_0 un element din Y cu $V - y_0 \subseteq Z$ şi $v_0 \in V$ un element de cea mai bună T-aproximaţie locală al elementului y_0 prin elementele mulţimii V, inegalitatea*

$$\min\{\operatorname{Re} y^*(w) : y^* \in E(v_0 - y_0)\} \leqslant 0 \tag{1}$$

are loc pentru orice element w din $\varphi(v_0)$.

Demonstrație. Presupunem că mulțimea V este φ-regulară și că v_0 este un element de cea mai bună T-aproximație locală al elementulu prin elementele mulțimii V. Dacă $T(v_0 - y_0) = \theta$, atunci avem $E(v_0 - y$ $=Ep(S_{Y*})$ și în acest caz inegalitatea (1) este evidentă. Fie deci $T(v_0 - y$ $\neq \theta$. Conform ipotezei există o vecinătate

$$\mathcal{U}_\lambda(v_0) = \{y \in Y : ||y - v_0|| < \lambda\}$$

a elementului v_0, astfel ca să avem

$$\text{(2)} \qquad ||T(v_0 - y_0)|| = \inf\{||T(v - y_0)|| : v \in \mathcal{U}_\lambda(v_0) \cap V\}.$$

Presupunem că în conul $\varphi(v_0)$ există un element w_0 pentru care

$$a = \min \{\mathrm{Re}\ y^*(w_0) : y^* \in E(v_0 - y_0)\} > 0.$$

Mulțimea

$$S = \{y^* \in Ep(S_{Y*}) : \mathrm{Re}\ y^*(w_0) \geqslant 2^{-1}a,\ \mathrm{Re}\ y^*(T(v_0 - y_0)) \geqslant 2^{-1}||T(v_0 - y_0$$

este atunci o signatură a lui $v_0 - y_0$. Să arătăm că

$$\text{(3)} \qquad \mu = \sup \{\mathrm{Re}\ y^*(T(v_0 - y_0)) : y^* \in Ep(S_{Y*}) \setminus S\} < ||T(v_0 - y_0)||.$$

Dacă am avea egalitatea $\mu = ||T(v_0 - y_0)||$, atunci ar exista un $(y_n^*)_{n\in N}$ de funcționale din $Ep(S_{Y*}) \setminus S$, astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\ y_n^*(T(v_0 - y_0)) = ||T(v_0 - y_0)||.$$

S_{Y*} fiind o mulțime $\sigma(Y^*, Y)$-compactă, există un subșir generalizat $(y_\nu^*)_{\nu\in}$ al șirului $(y_n^*)_{n\in N}$ care converge în topologia $\sigma(Y^*, Y)$ a spațiului Y^* căt o funcțională y_0^* din S_{Y*}. Atunci avem

$$\lim_\nu \mathrm{Re}\ y_\nu^*(T(v_0 - y_0)) = \mathrm{Re}\ y_0^*(T(v_0 - y_0)) = ||T(v_0 - y_0)||.$$

Ținînd seamă de inegalitatea

$$\mathrm{Re}\ y_0^*(T(v_0 - y_0)) \leqslant |y_0^*(T(v_0 - y_0))| \leqslant ||T(v_0 - y_0)||,$$

se deduce că $\mathrm{Im}\ y_0^*(T(v_0 - y_0)) = 0$. Deci y_0^* este un subgradient al norme $||\cdot||$ în punctul $T(v_0 - y_0)$. Dar atunci avem $\mathrm{Re}\ y_0^*(w_0) \geqslant a$, deoarece mulțimea subgradienților normei $||\cdot||$ în punctul $T(v_0 - y_0)$ coincide în baza teoremei lui Krein-Milman (a se vedea KÖTHE G. [6, pag. 335]) cu

(Y^*, Y)-închiderea convexă a mulțimii $E(v_0 - y_0)$. Prin urmare există indice $\nu_0 \in I$ în așa fel încît

$$\mathrm{Re}\ y_\nu^*(w_0) \geqslant 2^{-1}a \ \text{ și } \ \mathrm{Re}\ y_\nu^*(T(v_0 - y_0)) \geqslant 2^{-1}||T(v_0 - y_0)||$$

ntru orice $\nu \in I$, $\nu_0 < \nu$. Aceasta înseamnă însă că funcționalele y_ν^* cu $\in I$, $\nu_0 < \nu$, aparțin mulțimii S, ceea ce contrazice ipoteza noastră. Prin rmare are loc inegalitatea (3).

Alegem acum un număr real λ_0 în așa fel ca

$$0 < \lambda_0 < ||T(v_0 - y_0)|| - \mu.$$

plicația T fiind continuă există un număr $\delta > 0$, astfel ca

$$\text{4)} \qquad ||T(y) - T(v_0 - y_0)|| < \lambda_0$$

pentru orice element y din Z cu $||y - v_0 + y_0|| < \delta$. Pe de altă parte mulțimea V fiind φ-regulară, există un element $v_\lambda \in V$ în așa fel încît să avem negalitățile

$$||v_\lambda - v_0|| < \min\{\lambda, \delta\},$$

$$\mathrm{Re}\ y^*(T(v_\lambda - y_0)) < ||T(v_0 - y_0)|| \ \text{ pentru orice } \ y^* \in S.$$

Dacă $y^* \in Ep(S_{Y*}) \setminus S$, atunci avem în baza relației (4)

$$\mathrm{Re}\ y^*(T(v_\lambda - y_0)) \leqslant |y^*(T(v_\lambda - y_0) - T(v_0 - y_0))| + \mathrm{Re}\ y^*(T(v_0 - y_0)) \leqslant$$
$$\leqslant ||T(v_\lambda - y_0) - T(v_0 - y_0)|| + \mu < \lambda_0 + \mu < ||T(v_0 - y_0)||.$$

Prin urmare

$$\mathrm{Re}\ y^*(T(v_\lambda - y_0)) < ||T(v_0 - y_0)|| \ \text{ pentru orice } \ y^* \in Ep(S_{Y*}).$$

Alegînd acum o funcțională y^* din $Ep(S_{Y*})$ cu

$$y^*(T(v_\lambda - y_0)) = ||T(v_\lambda - y_0)||,$$

rezultă deci

$$||T(v_\lambda - y_0)|| < ||T(v_0 - y_0)||.$$

Deoarece v_λ aparține mulțimii $\mathcal{U}_\lambda(v_0) \cap V$, această inegalitate este în contradicție cu relația (2). În consecință afirmația 1° implică afirmația 2°.

Presupunem acum că are loc afirmația 2° și să demonstrăm că mulț
V este atunci φ-regulară. Fie y un element din Y cu $V - y \subseteq Z$, v_0 di
w din $\varphi(v_0)$, S o signatură a lui $v_0 - y$ cu proprietatea că

(5) $\operatorname{Re} y^*(w) \geqslant a > 0$ și $\operatorname{Re} y^*(T(v_0 - y)) \geqslant b > 0$ pentru orice y^*

și $\lambda > 0$. Din relația (5) se deduce că

$$\min \{\operatorname{Re} y^*(w) : y^* \in E(v_0 - y)\} \geqslant a > 0.$$

Prin urmare v_0 nu este un element de cea mai bună T-aproximație locală
lui y prin elementele mulțimii V. Rezultă că există un element v_λ în
astfel încît să avem (R_1) și

$$\|T(v_\lambda - y)\| < \|T(v_0 - y)\|.$$

Ținînd seamă de relația

$$\operatorname{Re} y^*(T(v_\lambda - y)) \leqslant \|T(v_\lambda - y)\|,$$

adevărată pentru orice $y^* \in S$, rezultă atunci și (R_2). Prin urmare V es
o mulțime φ-regulară.

Ținînd seamă de lema 4.2 și de lema 4.3 din lucrarea [1], se obțin d
această teoremă următoarele consecințe:

Consecința 1. *Fie V o submulțime φ-regulară a spațiului vect
rial normat Y, T o aplicație continuă a mulțimii $Z \subseteq Y$ în Y și y_0 un eleme
din Y cu $V - y_0 \subseteq Z$. Dacă $v_0 \in V$ este un element de cea mai bună T-aprox
mație locală al elementului y_0 prin elementele mulțimii V și $\varphi(v_0)$ este o mulțim
circulară*[1], *atunci*

$$0 \in \operatorname{co} \{y^*(w) : y^* \in E(v_0 - y_0)\} \textit{ pentru orice } w \in \varphi(v_0).$$

Consecința 2. *Fie V o submulțime φ-regulară a spațiului vecto
rial normat Y, T o aplicație continuă a mulțimii $Z \subseteq Y$ în Y și y_0 un elemen
din Y cu $V - y_0 \subseteq Z$. Dacă $v_0 \in V$ este un element de cea mai bună T-aproxi
mație locală al elementului y_0 prin elementele mulțimii V și $\varphi(v_0)$ este un sub
spațiu vectorial care admite baza algebrică $\{w_1, \ldots, w_n\}$, atunci*

$$(0, \ldots, 0) \in \operatorname{co} \{(y^*(w_1), \ldots, y^*(w_n)) : y^* \in E(v_0 - y_0)\}.$$

---

[1] Pentru mulțimile circulare se folosește uneori și denumirea de mulțimi cercuite. Definiția lor este dată și în lucrarea [1, Definiția 4.2].

Consecința 3. *Fie V o submulțime φ-regulară a spațiului vecto-
l normat Y, T o aplicație continuă a mulțimii $Z \subseteq Y$ în Y și y_0 un ele-
nt din Y cu $V - y_0 \subseteq Z$. Dacă $v_0 \in V$ este un element de cea mai bună
-aproximație locală al elementului y_0 prin elementele mulțimii V și $\varphi(v_0)$
te un subspațiu vectorial care admite baza algebrică $\{w_1, \ldots, w_n\}$, atunci
istă k funcționale y_i^* din $E(v_0 - y_0)$, unde $1 \leqslant k \leqslant n + 1$ dacă spațiul
este real și $1 \leqslant k \leqslant 2n + 1$ dacă spațiul Y este complex, și k numere
> 0 cu $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$, astfel încît să avem*

$$\lambda_1 y_1^*(w_j) + \ldots + \lambda_k y_k^*(w_j) = 0 \textit{ pentru } j = 1, \ldots, n.$$

În cazul particular cînd aplicația $\varphi : V \to \mathcal{P}(Y)$ este definită prin

$$\varphi(v) = \{\lambda(v - z) : \lambda > 0,\ z \in V\} \text{ pentru orice } v \in V$$

T este aplicația identică a spațiului Y pe el însuși, inegalitatea (1)
devine tocmai condiția care intervine în generalizarea criteriului lui Markov-
Kolmogorov pentru problema celei mai bune aproximații într-un spațiu
vectorial normat arbitrar (a se vedea BRECKNER W. W. [1], BROSOWSKI B.
și R. WEGMANN [4]). Implicația „Afirmația 1° ⇒ Afirmația 2°" din enunțul
teoremei din această lucrare constituie prin urmare o generalizare a părții
de necesitate a criteriului lui Markov-Kolmogorov.

Universitatea „Babeș-Bolyai" din Cluj,
Facultatea de Matematică-Mecanică,
Catedra de Analiză.

EINE VERALLGEMEINERUNG DES APPROXIMATIONSPROBLEMS IN NORMIERTEN VEKTORRÄUMEN

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit werden die Ergebnisse von BRECKNER W. W. [2] verallgemeinert und ein notwendiges Kriterium für die Lösungen der folgenden Approximationsaufgabe angegeben:

V und Z seien zwei nichtleere Teilmengen eines normierten Vektorraumes Y, $T : Z \to Y$ eine stetige Abbildung und y_0 ein Element aus Y mit $V - y_0 \subseteq Z$; bestimme ein v_0 aus V für das es eine Umgebung

$$\mathcal{U}_\lambda(v_0) = \{y \in Y : \| y - v_0 \| < \lambda\}$$

gibt, so dass

$$\|T(v_0 - y_0)\| = \inf \{\|T(v - y_0)\| : v \in \mathcal{U}_\lambda(v_0) \cap V\}$$

gilt.