EVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ȘI TEORIA APROXIMAȚIEI
Volumul 1, Fascicola 1, 1972, pp. 41—48

ASUPRA UNEI GENERALIZĂRI A PROBLEMEI CELEI MAI BUNE APROXIMAȚII

de

WOLFGANG W. BRECKNER
(Cluj)

1. Fie V și Z două submulțimi nevide ale unui spațiu vectorial normat Y real sau complex, T o aplicație a lui Z în Y și y_0 un element din Y cu proprietatea că $V - y_0 \subseteq Z$.

Un element v_0 *din* V *se numește element de cea mai bună T-aproximație locală al elementului* y_0 *prin elementele mulțimii* V, *dacă există o vecinătate*

$$\mathcal{U}_\lambda(v_0) = \{y \in Y : \| y - v_0 \| < \lambda\}, \qquad (\lambda > 0),$$

a lui v_0, *astfel ca să aibă loc egalitatea*

$$\|T(v_0 - y_0)\| = \inf \{\|T(v - y_0)\| : v \in \mathcal{U}_\lambda(v_0) \cap V\}.$$

Elementul $v_0 \in V$ *se numește element de cea mai bună T-aproximație al elementului* y_0 *prin elementele mulțimii* V, *dacă are loc egalitatea*

$$\|T(v_0 - y_0)\| = \inf \{\|T(v - y_0)\| : v \in V\}.$$

[11] au arătat că este avantajos ca la procedeul lui Newton-Raphson calcul al inversei unei funcţii reale continue, funcţia de pornire să nu aleasă în mod arbitrar, ci să fie soluţia unei anumite probleme de cea bună T-aproximaţie. În lucrările [8], [10], [12] ei au studiat şi unele aspe teoretice ale problemei celei mai bune T-aproximaţii, în cazul cînd Y spaţiul funcţiilor reale continue pe o mulţime compactă şi V o mulţime polinoame de grad fixat sau de funcţii raţionale generalizate. Precizări completări la aceste lucrări au fost făcute de WUYTACK L. [14], [15], [1 [17] şi NINOMIYA I. [13].

În cazul unui spaţiu vectorial normat Y arbitrar, problema celei bune T-aproximaţii a fost studiată pentru prima dată de BRECKNER W. [2] în ipotezele că $Z = Y$ şi că aplicaţia T se bucură de următoar trei proprietăţi :

(P$_1$) T este continuă ;

(P$_2$) $T(\theta) = 0$, unde cu θ s-a notat elementul nul al spaţiului Y ;

(P$_3$) egalitatea

$$\operatorname{sgn} \operatorname{Re} y^*(T(y_1) - T(y_2)) = \operatorname{sgn} \operatorname{Re} y^*(y_1 - y_2)$$

are loc oricare ar fi elementele y_1, y_2 din Y şi oricare ar fi funcţionala y^* d $\sigma(Y^*, Y)$-închiderea mulţimii punctelor extremale ale sferei unitate a sp ţiului dual Y^* al lui Y.

Ideea de bază din lucrarea [2] a constat în definirea unei noţiuni regularitate faţă de o mulţime de conuri şi în demonstrarea pentru asemene mulţimi a unui criteriu care generalizează criteriul lui Markov-Kolmog rov din teoria celei mai bune aproximaţii în sens Cebîşev (a se vede MARKOFF W. [7], KOLMOGOROV A. N. [5]). Aplicînd apoi acest criteriu s-a dedus în [2] şi alte criterii de caracterizare a elementelor de cea ma bună T-aproximaţie analoge unor criterii cunoscute din teoria celei ma bune aproximaţii.

În lucrarea de faţă se continuă aceste cercetări din [2]. Fără a se cer verificarea proprietăţilor (P$_2$) şi (P$_3$) de către aplicaţia T, se stabileşte î secţiunea a treia o teoremă, care indică o condiţie necesară pentru elemen tele de cea mai bună T-aproximaţie locală şi care constituie o generalizar a criteriului de bază obţinut în lucrarea [2].

2. În cele ce urmează notăm cu Y întotdeauna un spaţiu vectorial norma peste cîmpul numerelor reale sau complexe care nu se reduce la elementu nul şi cu Y^* dualul său algebric-topologic. Sfera unitate închisă a spaţiulu Y^* se notează cu S_{Y^*}, iar mulţimea punctelor extremale ale unei mulţim $M \subseteq Y^*$ cu $Ep(M)$.

T va fi ca în secţiunea precedentă o aplicaţie a unei mulţimi nevide $Z \subseteq Y$ în Y. Dacă y este un element din Z, atunci se notează cu

$$E(y) = \{y^* \in Ep(S_{Y^*}) : y^*(T(y)) = \|T(y)\|\}.$$

Sensul noţiunilor de analiză funcţională folosite în lucrare este cel tratatul lui KÖTHE G. [6].

3. Dăm mai întîi

Definiţia 1. *O mulţime* $S \subseteq Ep(S_{Y^*})$ *se numeşte signatură a elentului* $y \in Z$, *dacă* $E(y) \subseteq S$.

În cazul particular cînd T este aplicaţia identică a spaţiului Y pe el suşi, definiţia signaturii a fost dată de BRECKNER W. W. [1, Definiţia 1] şi este asemănătoare cu cea dată de BROSOWSKI B. [3, Definition care în locul lui $Ep(S_{Y^*})$ a considerat însă o anumită submulţime $\sigma(Y^*,Y)$-chisă a mulţimii S_{Y^*}.

Definiţia 2. *Fie* V *o submulţime nevidă a spaţiului* Y *şi* φ *o aplicaţie a lui* V *în mulţimea părţilor* $\mathcal{P}(Y)$ *a lui* Y, *astfel ca pentru fiecare element din* V *mulţimea* $\varphi(v)$ *să fie un con ascuţit cu vîrful în* θ. *Mulţimea* V *se umeşte* φ*-regulară, dacă pentru orice* $y \in Y$ *cu* $V - y \subseteq Z$, *orice* $v_0 \in V$, *rice* $w \in \varphi(v_0)$, *orice signatură* S *a lui* $v_0 - y$ *cu proprietatea că*

Re $y^*(w) \geqslant a > 0$ *şi* Re $y^*(T(v_0 - y)) \geqslant b > 0$ *pentru orice* $y^* \in S$ *i pentru orice număr* $\lambda > 0$ *există un element* v_λ *în* V, *astfel încît să fie atisfăcute relaţiile*:

(R$_1$) $\|v_\lambda - v_0\| < \lambda$;

(R$_2$) Re $y^*(T(v_\lambda - y)) < \|T(v_0 - y)\|$ *pentru orice* $y^* \in S$.

Observăm că această noţiune de mulţime φ-regulară generalizează oţiunea de mulţime φ-regulară din teoria celei mai bune aproximaţii, oţiune introdusă de BRECKNER W. W. [1, Definiţia 2.2].

Rezultatul principal al lucrării este următoarea teoremă :

TEOREMĂ. *Dacă* V, Z *sînt două submulţimi nevide ale spaţiului vectorial normat* Y *şi* $T : Z \to Y$ *o aplicaţie continuă, atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

1° V *este o mulţime* φ*-regulară.*

2° *Oricare ar fi* y_0 *un element din* Y *cu* $V - y_0 \subseteq Z$ *şi* $v_0 \in V$ *un element de cea mai bună* T*-aproximaţie locală al elementului* y_0 *prin elementele mulţimii* V, *inegalitatea*

$$\min \{\operatorname{Re} y^*(w) : y^* \in E(v_0 - y_0)\} \leqslant 0 \tag{1}$$

are loc pentru orice element w *din* $\varphi(v_0)$.

Demonstrație. Presupunem că mulțimea V este φ-regulară și că v_0 este un element de cea mai bună T-aproximație locală al elementulu prin elementele mulțimii V. Dacă $T(v_0 - y_0) = \theta$, atunci avem $E(v_0 - y$ $=Ep(S_{Y*})$ și în acest caz inegalitatea (1) este evidentă. Fie deci $T(v_0-y$ $\neq \theta$. Conform ipotezei există o vecinătate

$$\mathcal{U}_\lambda(v_0) = \{y \in Y : ||y - v_0|| < \lambda\}$$

a elementului v_0, astfel ca să avem

$$||T(v_0 - y_0)|| = \inf\{||T(v - y_0)|| : v \in \mathcal{U}_\lambda(v_0) \cap V\}. \tag{2}$$

Presupunem că în conul $\varphi(v_0)$ există un element w_0 pentru care

$$a = \min\{\mathrm{Re}\, y^*(w_0) : y^* \in E(v_0 - y_0)\} > 0.$$

Mulțimea

$$S = \{y^* \in Ep(S_{Y*}) : \mathrm{Re}\, y^*(w_0) \geqslant 2^{-1}a, \mathrm{Re}\, y^*(T(v_0 - y_0)) \geqslant 2^{-1}||T(v_0 - y_0$$

este atunci o signatură a lui $v_0 - y_0$. Să arătăm că

$$\mu = \sup\{\mathrm{Re}\, y^*(T(v_0 - y_0)) : y^* \in Ep(S_{Y*}) \setminus S\} < ||T(v_0 - y_0)||. \tag{3}$$

Dacă am avea egalitatea $\mu = ||T(v_0 - y_0)||$, atunci ar exista un $(y_n^*)_{n \in N}$ de funcționale din $Ep(S_{Y*}) \setminus S$, astfel ca

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Re}\, y_n^*(T(v_0 - y_0)) = ||T(v_0 - y_0)||.$$

S_{Y*} fiind o mulțime $\sigma(Y^*, Y)$-compactă, există un subșir generalizat $(y_\nu^*)_{\nu\in}$ al șirului $(y_n^*)_{n \in N}$ care converge în topologia $\sigma(Y^*, Y)$ a spațiului Y^* căt o funcțională y_0^* din S_{Y*}. Atunci avem

$$\lim_{\nu} \mathrm{Re}\, y_\nu^*(T(v_0 - y_0)) = \mathrm{Re}\, y_0^*(T(v_0 - y_0)) = ||T(v_0 - y_0)||.$$

Ținînd seamă de inegalitatea

$$\mathrm{Re}\, y_0^*(T(v_0 - y_0)) \leqslant |y_0^*(T(v_0 - y_0))| \leqslant ||T(v_0 - y_0)||,$$

se deduce că $\mathrm{Im}\, y_0^*(T(v_0 - y_0)) = 0$. Deci y_0^* este un subgradient al norme $|| \cdot ||$ în punctul $T(v_0 - y_0)$. Dar atunci avem $\mathrm{Re}\, y_0^*(w_0) \geqslant a$, deoarece mulțimea subgradienților normei $|| \cdot ||$ în punctul $T(v_0 - y_0)$ coincide în baza teoremei lui Krein-Milman (a se vedea KÖTHE G. [6, pag. 335]) cu

$Y^*, Y)$-închiderea convexă a mulțimii $E(v_0 - y_0)$. Prin urmare există indice $\nu_0 \in I$ în așa fel încît

$$\mathrm{Re}\, y_\nu^*(w_0) \geqslant 2^{-1}a \text{ și } \mathrm{Re}\, y_\nu^*(T(v_0 - y_0)) \geqslant 2^{-1}||T(v_0 - y_0)||$$

ntru orice $\nu \in I$, $\nu_0 < \nu$. Aceasta înseamnă însă că funcționalele y_ν^* cu $\in I$, $\nu_0 < \nu$, aparțin mulțimii S, ceea ce contrazice ipoteza noastră. Prin mare are loc inegalitatea (3).

Alegem acum un număr real λ_0 în așa fel ca

$$0 < \lambda_0 < ||T(v_0 - y_0)|| - \mu.$$

plicația T fiind continuă există un număr $\delta > 0$, astfel ca

4) $$||T(y) - T(v_0 - y_0)|| < \lambda_0$$

entru orice element y din Z cu $||y - v_0 + y_0|| < \delta$. Pe de altă parte mulți- nea V fiind φ-regulară, există un element $v_\lambda \in V$ în așa fel încît să avem negalitățile

$$||v_\lambda - v_0|| < \min\{\lambda, \delta\},$$

$$\mathrm{Re}\, y^*(T(v_\lambda - y_0)) < ||T(v_0 - y_0)|| \text{ pentru orice } y^* \in S.$$

Dacă $y^* \in Ep(S_{Y*}) \setminus S$, atunci avem în baza relației (4)

$$\mathrm{Re}\, y^*(T(v_\lambda - y_0)) \leqslant |y^*(T(v_\lambda - y_0) - T(v_0 - y_0))| + \mathrm{Re}\, y^*(T(v_0 - y_0)) \leqslant$$
$$\leqslant ||T(v_\lambda - y_0) - T(v_0 - y_0)|| + \mu < \lambda_0 + \mu < ||T(v_0 - y_0)||.$$

Prin urmare

$$\mathrm{Re}\, y^*(T(v_\lambda - y_0)) < ||T(v_0 - y_0)|| \text{ pentru orice } y^* \in Ep(S_{Y*}).$$

Alegînd acum o funcțională y^* din $Ep(S_{Y*})$ cu

$$y^*(T(v_\lambda - y_0)) = ||T(v_\lambda - y_0)||,$$

rezultă deci

$$||T(v_\lambda - y_0)|| < ||T(v_0 - y_0)||.$$

Deoarece v_λ aparține mulțimii $\mathcal{U}_\lambda(v_0) \cap V$, această inegalitate este în contradicție cu relația (2). În consecință afirmația 1° implică afirmația 2°.

Presupunem acum că are loc afirmaţia 2° şi să demonstrăm că mulţi
V este atunci φ-regulară. Fie y un element din Y cu $V - y \subseteq Z$, v_0 di
w din $\varphi(v_0)$, S o signatură a lui $v_0 - y$ cu proprietatea că

(5) $\operatorname{Re} y^*(w) \geqslant a > 0$ şi $\operatorname{Re} y^*(T(v_0 - y)) \geqslant b > 0$ pentru orice y^*

şi $\lambda > 0$. Din relaţia (5) se deduce că

$$\min \{\operatorname{Re} y^*(w) : y^* \in E(v_0 - y)\} \geqslant a > 0.$$

Prin urmare v_0 nu este un element de cea mai bună T-aproximaţie local
lui y prin elementele mulţimii V. Rezultă că există un element v_λ în
astfel încît să avem (R_1) şi

$$||T(v_\lambda - y)|| < ||T(v_0 - y)||.$$

Ţinînd seamă de relaţia

$$\operatorname{Re} y^*(T(v_\lambda - y)) \leqslant ||T(v_\lambda - y)||,$$

adevărată pentru orice $y^* \in S$, rezultă atunci şi (R_2). Prin urmare V es
o mulţime φ-regulară.

Ţinînd seamă de lema 4.2 şi de lema 4.3 din lucrarea [1], se obţin d
această teoremă următoarele consecinţe:

Consecinţa 1. *Fie V o submulţime φ-regulară a spaţiului vect*
rial normat Y, T o aplicaţie continuă a mulţimii $Z \subseteq Y$ în Y şi y_0 un eleme
din Y cu $V - y_0 \subseteq Z$. Dacă $v_0 \in V$ este un element de cea mai bună T-aprox
maţie locală al elementului y_0 prin elementele mulţimii V şi $\varphi(v_0)$ este o mulţim
circulară1), atunci

$$0 \in \operatorname{co} \{y^*(w) : y^* \in E(v_0 - y_0)\} \textit{ pentru orice } w \in \varphi(v_0).$$

Consecinţa 2. *Fie V o submulţime φ-regulară a spaţiului vecto*
rial normat Y, T o aplicaţie continuă a mulţimii $Z \subseteq Y$ în Y şi y_0 un elemen
din Y cu $V - y_0 \subseteq Z$. Dacă $v_0 \in V$ este un element de cea mai bună T-aproxi-
maţie locală al elementului y_0 prin elementele mulţimii V şi $\varphi(v_0)$ este un sub-
spaţiu vectorial care admite baza algebrică $\{w_1, \ldots, w_n\}$, atunci

$$(0, \ldots, 0) \in \operatorname{co} \{(y^*(w_1), \ldots, y^*(w_n)) : y^* \in E(v_0 - y_0)\}.$$

---

1) Pentru mulţimile circulare se foloseşte uneori şi denumirea de mulţimi cercuite. Definiţia lor este dată şi în lucrarea [1, Definiţia 4.2].

Consecinţa 3. *Fie V o submulţime φ-regulară a spaţiului vecto-*
l normat Y, T o aplicaţie continuă a mulţimii $Z \subseteq Y$ în Y şi y_0 un ele-
nt din Y cu $V - y_0 \subseteq Z$. Dacă $v_0 \in V$ este un element de cea mai bună
-aproximaţie locală al elementului y_0 prin elementele mulţimii V şi $\varphi(v_0)$
te un subspaţiu vectorial care admite baza algebrică $\{w_1, \ldots, w_n\}$, atunci
istă k funcţionale y_i^* din $E(v_0 - y_0)$, unde $1 \leqslant k \leqslant n + 1$ dacă spaţiul
este real şi $1 \leqslant k \leqslant 2n + 1$ dacă spaţiul Y este complex, şi k numere
> 0 cu $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$, astfel încît să avem

$$\lambda_1 y_1^*(w_j) + \ldots + \lambda_k y_k^*(w_j) = 0 \textit{ pentru } j = 1, \ldots, n.$$

În cazul particular cînd aplicaţia $\varphi : V \to \mathcal{P}(Y)$ este definită prin

$$\varphi(v) = \{\lambda(v - z) : \lambda > 0,\ z \in V\} \text{ pentru orice } v \in V$$

i T este aplicaţia identică a spaţiului Y pe el însuşi, inegalitatea (1)
levine tocmai condiţia care intervine în generalizarea criteriului lui Markov-
Kolmogorov pentru problema celei mai bune aproximaţii într-un spaţiu
vectorial normat arbitrar (a se vedea BRECKNER W. W. [1], BROSOWSKI B.
şi R. WEGMANN [4]). Implicaţia „Afirmaţia 1° ⇒ Afirmaţia 2°" din enunţul
teoremei din această lucrare constituie prin urmare o generalizare a părţii
de necesitate a criteriului lui Markov-Kolmogorov.

Universitatea „Babeş-Bolyai" din Cluj,
Facultatea de Matematică-Mecanică,
Catedra de Analiză.

EINE VERALLGEMEINERUNG DES APPROXIMATIONSPROBLEMS IN NORMIERTEN VEKTORRÄUMEN

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit werden die Ergebnisse von BRECKNER W. W. [2] verallgemeinert und ein notwendiges Kriterium für die Lösungen der folgenden Approximationsaufgabe angegeben:

V und Z seien zwei nichtleere Teilmengen eines normierten Vektorraumes Y, $T : Z \to Y$ eine stetige Abbildung und y_0 ein Element aus Y mit $V - y_0 \subseteq Z$; bestimme ein v_0 aus V für das es eine Umgebung

$$\mathcal{U}_\lambda(v_0) = \{y \in Y : ||y - v_0|| < \lambda\}$$

gibt, so dass

$$||T(v_0 - y_0)|| = \inf \{||T(v - y_0)|| : v \in \mathcal{U}_\lambda(v_0) \cap V\}$$

gilt.

BIBLIOGRAFIE

[1] Breckner, W. W., *Asupra caracterizării elementelor de cea mai bună aproxima* *spații vectoriale normate*. Studii Cerc. Mat., **22**, 957–982 (1970).

[2] — *Teoreme de caracterizare a soluțiilor anumitor probleme de optimizare*. Te doctorat. Cluj, Universitatea „Babeș-Bolyai", 1970.

[3] Brosowski, B., *Einige Bemerkungen zum verallgemeinerten Kolmogoroffschen Krite* Apărut în volumul Collatz L. și H. Unger (red.), *Funktionalanaly* *Methoden der numerischen Mathematik*. Basel-Stuttgart, Birkhäuser Ve 1969, 25–34.

[4] Brosowski, B., Wegmann, R., *Charakterisierung bester Approximationen in* *mierten Vektorräumen*. J. Approximation Theory, **3**, 369–397 (1970).

[5] Колмогоров, А. Н., *Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева наим* *уклоняющихся от заданной функции*. Успехи Мат. Наук, **3**, *1(23)*, 216– (1948).

[6] Köthe, G., *Topologische lineare Räume*. I. 2. Aufl. Berlin-Heidelberg-New York, Sp ger-Verlag, 1966.

[7] Markoff, W., *Über Polynome die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von* *abweichen*. Math. Ann., **77**, 213–258 (1916).

[8] Moursund, D. G., *Chebyshev approximation using a generalized weight function*. SI J. Numer. Anal., **3**, 435–450 (1966).

[9] — *Optimal starting values for Newton-Raphson calculation of $\sqrt{x}$*. Comm. A **10**, 430–432 (1967).

[10] — *Computational aspects of Chebyshev approximation using a generalized weight fu* *tion*. SIAM J. Numer. Anal., **5**, 126–137 (1968).

[11] Moursund, D. G., Taylor, G. D., *Optimal starting values for the Newton-Raphson* *culation of inverses of certain functions*. SIAM J. Numer. Anal., **5**, 138–150 (196

[12] — *Uniform rational approximation using a generalized weight function*. SIAM Numer. Anal., **5**, 882–889 (1968).

[13] Ninomiya, I., *Generalized rational Chebyshev approximation*. Math. Comp., 159–169 (1970).

[14] Wuytack, L., *The existence of a solution in constrained rational approximation proble* Simon Stevin, **43**, 83–99 (1969/1970).

[15] — *Some remarks on a paper of D. G. Moursund*. SIAM J. Numer. Anal., **7**, 233 237 (1970).

[16] — *On a theorem concerning best constrained approximation*. Simon Stevin, **44**, 97–1 (1970/1971).

[17] — *Kolmogoroff's criterion for constrained rational approximation*. J. Approximati Theory, **4**, 120–136 (1971).

Primit la 16. X. 1971.