REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 2, Fascicola 2, 1973, pp. 167—172

ELEMENTE EXTREMALE ALE UNOR CONURI DE FUNCŢII

de

LUCIANA LUPAŞ
(Cluj)

1. Ne vom referi în cele ce urmează la conuri de funcţii stelare pe un interval I. Funcţiile stelare au fost studiate de A. M. BRUCKNER şi E. OSTROW [2] şi de alţi autori (vezi [1]). Definiţia dată în lucrările citate pentru funcţiile stelare este următoarea: O funcţie $f: I \to R$ se numeşte *stelară* pe I dacă oricare ar fi $x \in I$ şi $\alpha \in [0, 1]$, cu $\alpha x \in I$, are loc inegalitatea

$$f(\alpha x) \leqq \alpha f(x). \tag{1}$$

Se observă că dacă $0 \in I$ şi f este stelară pe I, atunci $f(0) \leqq 0$.

Deasemenea are loc următoarea lemă [1]:

Lema 1.1. *Dacă* $0 \in \operatorname{int}(I)$, *o funcţie* $f: I \to R$ *este stelară pe* I *atunci şi numai atunci cînd au loc următoarele proprietăţi*

(a) $f(0) \leqq 0$

(b) $\frac{f(x)}{x}$ este nedescrescătoare pe $\{x \in I | x > 0\}$

(c) $\frac{f(x)}{x}$ este nedescrescătoare pe $\{x \in I | x < 0\}$.

Din lema 1.1. deducem

Lema 1.2. *Dacă* $f: I \to R$, $0 \in \operatorname{int}(I)$ *şi*

(a′) $f(0) \leqq 0$

(b′) $[0, x_1, x_2; f] \geqq 0$ *pentru orice* $x_1 \neq x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ *din* I

(c′) $[0, x_1, x_2; f] \geqq 0$ *pentru orice* $x_1 \neq x_2$, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ *din* I

atunci f *este stelară pe* I.

În enunţul lemei, am notat prin simbolul $[t_1, t_2, t_3; F]$ diferenţa divizată a unei funcţii F pe punctele t_i, $i = 1, 2, 3$.

Demonstraţie. Se observă că $(b') \Rightarrow (b)$ şi $(c') \Rightarrow (c)$, deci f este stelară pe I.

TEOREMA 1.1. *Fie $f: I \to R$ şi $0 \in I$. Dacă există $c \in R$ astfel încît $f(x) \geqq cx$, oricare ar fi $x \in I$, atunci o condiţie necesară şi suficientă pentru ca f să fie stelară pe I este*

(2)
$$[0, x_1, x_2; f] \geqq 0$$

pentru orice $x_1, x_2 \in I$, distincte şi diferite de zero.

Demonstraţie. Fie f stelară pe I. Se observă că dacă f verifică ipotezele teoremei, atunci $f(0) = 0$. Din lema 1.1. rezultă că $\frac{f(x)}{x}$ este nedescrescătoare pe fiecare dintre mulţimile $\{x \in I | x > 0\}$ şi $\{x \in I | x < 0\}$, deci au loc (b') şi (c').

Fie $x_1 < 0 < x_2$. Funcţia g definită prin $g(x) = f(x) - cx$ este stelară pe I, deci $\frac{g(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - c$ este nedescrescătoare pentru $x > 0$ din I şi este nedescrescătoare pentru $x < 0$ din I. Dar $\frac{g(x)}{x} \leqq 0$ pentru $x < 0$ şi $\frac{g(x)}{x} \geqq 0$ pentru $x > 0$. Deci oricare ar fi $x_1 < 0 < x_2$ din I avem

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \leqq c \leqq \frac{f(x_2)}{x_2}$$

şi prin urmare $[0, x_1, x_2; f] \geqq 0$.

Suficienţa condiţiei din enunţul teoremei rezultă din lema 1.2.

Pornind de la consideraţiile de mai sus, vom generaliza noţiunea de funcţie stelară [4].

Definiţia 1.1. Fie I un interval care conţine originea. O funcţie $f: I \to R$, cu $f(0) = 0$, se numeşte *stelară de ordinul n* pe I dacă oricare ar fi punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ distincte şi diferite de zero din I, are loc inegalitatea

(3)
$$[0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] \geqq 0.$$

Din definiţia de mai sus deducem că orice funcţie neconcavă de ordinul n pe I, în sensul definiţiei date de T. POPOVICIU [6], cu $f(0) = 0$ este stelară de ordinul n pe I, dar nu şi reciproc.

TEOREMA 1.2. *Fie $I = [0, a]$, $a > 0$. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o funcţie $f: I \to R$, cu $f(0) = 0$, să fie stelară de ordinul n pe I*

este ca funcţia φ definită prin $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$, să fie neconcavă de ordinul $n - 1$ pe $]0, a]$.

Demonstraţia rezultă din identitatea

(4)
$$[0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; \varphi]$$

care are loc oricare ar fi punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, distincte şi diferite de zero din I.

2. În cele ce urmează considerăm intervale de forma $I = [0, a]$, $a > 0$.

Fie $C_0(I) = \{f: I \to R | f(0) = 0, f \text{ continuă pe } I\}$, normat cu $\|\cdot\| = \max\{|\cdot(x)| | x \in [0, a]\}$.

Notăm cu

$$S_0(I) = \{f \in C_0(I) | [0, x; f] \geqq 0,\ x \in I\},$$

şi

$$S_n(I) = \{f \in S_{n-1}(I) | f \text{ stelară de ordinul } n \text{ pe } I\},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Mulţimile $S_n(I)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sînt conuri convexe şi închise în $C_0(I)$.

În continuare, vom determina elementele extremale ale conurilor $S_n(I)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Un element $f \in S_n(I)$ se numeşte *extremal* dacă oricare ar fi o descompunere $f = f_1 + f_2$ a funcţiei f, cu $f_i \in S_n(I)$, $i = 1, 2$, există $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$ astfel încît $f = \lambda_i f_i$, $i = 1, 2$. Funcţia $f = 0$ nu se consideră element extremal al nici unui con $S_n(I)$.

Notăm cu

$$E_n = \{f \in S_n(I) | f \text{ element extremal al conului } S_n(I)\}.$$

Lema 2.1. *Conul $S_0(I)$ nu are elemente extremale.*

Demonstraţie. Într-adevăr, oricare ar fi $f \in S_0(I)$, $f \neq 0$, o descompunere neproporţională se obţine alegînd $f_1, f_2 \in S_0(I)$ astfel

$$f_1(x) = \frac{x}{a} f(x) \text{ şi } f_2(x) = f(x) - f_1(x),\ x \in I.$$

Lema 2.2. *Mulţimea elementelor extremale ale conului $S_1(I)$ este $E_1 = \{f_\lambda: I \to R | f_\lambda(x) = \lambda x,\ x \in I,\ \lambda > 0\}$.*

Demonstraţie. a) Conul $S_1(I)$ conţine o singură funcţie constantă şi anume $f = 0$, care nu este element extremal.

b) Funcţiile liniare din $S_1(I)$ sînt $\{f_\lambda | \lambda > 0\}$ definite prin $f_\lambda(x) = \lambda x$, $x \in I$. Ele sînt elemente extremale.

Fie $f_\lambda = f_1 + f_2$, $f_i \in S_1(I)$, $i = 1, 2$ o descompunere a lui f_λ. Avem pentru orice x_1 şi x_2 distincte din $[0, a]$

$$0 = [0, x_1, x_2; f_\lambda] = [0, x_1, x_2; f_1] + [0, x_1, x_2; f_2].$$

Rezultă că $[0, x_1, x_2; f_i] = 0$, $i = 1, 2$, sau $\left[x_1, x_2; \frac{f_i(x)}{x}\right] = 0$, $i = 1, 2$, de unde deducem că

$$\frac{f_i(x)}{x} = \lambda_i, \; i = 1, 2, \; \lambda_i > 0.$$

Deci $f_i(x) = \lambda_i x$, $x \in I$ şi $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$.

c) Dacă $f \in S_1(I)$ şi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0, \lambda[\\ g(x), & \text{dacă } x \in [\lambda, a] \end{cases}$$

$0 < \lambda < a$, atunci există o descompunere neproporţională a lui f în $S_1(I)$.

Într-adevăr, fie

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in [0, \lambda[\\ \frac{g(x)}{2} - h(x), \text{ dacă } x \in [\lambda, a] \end{cases}$$

şi

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in [0, \lambda[\\ \frac{g(x)}{2} + h(x), \text{ dacă } x \in [\lambda, a] \end{cases}$$

unde h este continuă pe $[\lambda, a]$, $h(\lambda) = 0$ şi

$$-\frac{g(x)}{2} \leqq h(x) \leqq \frac{g(x)}{2}, \; h(x) \neq kg(x), \; k > 0, \text{ pe } [\lambda, a].$$

Se observă că $f_i \in S_1(I)$, $i = 1, 2$ şi f_1, f_2 nu sînt proporţionale cu f.

d) Dacă $f \in S_1(I)$, $f(0) = 0$ şi $f(x) > 0$, $x \neq 0$, iar $\frac{f(x)}{x} \neq C$, $x \neq 0$, atunci $f \notin E_1$.

Fie $m = \inf\left\{\frac{f(x)}{x} \mid x > 0\right\}$

şi

$$\varphi(x) = \begin{cases} m, \text{ dacă } x = 0 \\ \frac{f(x)}{x}, \text{ dacă } x \in]0, a]. \end{cases}$$

Din lema 1.1. rezultă că φ este nedescrescătoare pe $[0, a]$. Avem o descompunere neproporţională a lui φ dacă alegem

$$\varphi_1(x) = \min\left\{\varphi(x), \frac{\varphi(0) + \varphi(a)}{2}\right\}, \; x \in [0, a]$$

şi

$$\varphi_2(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x).$$

Pentru f obţinem descompunerea neproporţională corespunzătoare

$$f = f_1 + f_2, \text{ cu } f_1(x) = x\varphi_1(x) \text{ şi } f_2(x) = x\varphi_2(x), \; x \in I.$$

Cu aceasta lema 2.2. este demonstrată.

L e m a 2.3. *O funcţie $f \in S_n(I)$ aparţine mulţimii E_n, $n = 2, 3, \ldots$ dacă şi numai dacă funcţia φ definită astfel*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \inf\left\{\frac{f(x)}{x} \mid x \neq 0\right\}, \text{ dacă } x = 0 \\ \frac{f(x)}{x}, \text{ dacă } x \in]0, a] \end{cases} \tag{5}$$

este element extremal al conului funcţiilor neconcave de ordinul 1, 2, ..., $n - 1$ *pe* I.

Demonstraţie. Fie $f \in E_n$ şi presupunem că funcţia φ definită prin (5) nu este element extremal al conului funcţiilor neconcave de ordinul $1, 2, \ldots, n - 1$. Atunci φ admite o descompunere neproporţională

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Din teorema 1.2. rezultă că funcţiile $f_1(x) = x\varphi_1(x)$ şi $f_2(x) = x\varphi_2(x)$ sînt din $S_n(I)$. Deci $f = f_1 + f_2$ admite o descompunere neproporţională şi deci $f \notin E_n$. Contradicţia obţinută demonstrează necesitatea condiţiei din enunţul teoremei.

Suficienţa se demonstrează analog utilizînd formula (4).

Ţinînd cont de rezultatele lui E. K. McLACHLAN [5] şi de lemele din acest paragraf, vom determina mulţimile E_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Fie $f_{\lambda,k}: I \to R$ astfel definite:

$$f_{\lambda,k}(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0, \lambda[\\ mx(x-\lambda)^k, & \text{dacă } x \in [\lambda, a],\ m > 0. \end{cases}$$

pentru orice $x \in I$, $\lambda \in [0, a[$, $k = 1, 2, \ldots$.

TEOREMA 2.1. *Conul $S_0(I)$ nu are elemente extremale. Elementele extremale ale conului $S_1(I)$ sînt funcțiile liniare de forma $f_\lambda(x) = \lambda x$, $x \in I$, $\lambda > 0$, iar*

$$E_n = E_1 \cup \{f_{\lambda,k} \mid \lambda \in [0, a[,\ k = 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

EXTREMAL ELEMENTS OF SOME CONES OF FUNCTIONS

ABSTRACT

Let $C_0(I)$ be the space of all real valued functions which are defined and continuous on $I = [0, a]$, $a > 0$, vanishing at the point $x = 0$, normed with the usual uniform norm. A function $f: I \to R$ is called *starshaped of the order n* on I if for any distinct points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ from I, $x_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$, the following inequality is valid

$$[0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1};\ f] \geqslant 0.$$

In this paper we give the extremal elements of the cones

$$S_0(I) = \{f \in C_0(I) : [0, x; f] \geqslant 0,\ x \in I \setminus \{0\}\}$$

and

$$S_n(I) = \{f \in S_{n-1}(I) : f \text{ starshaped of the order } n \text{ on } I\}\ n = 1, 2, \ldots$$

BIBLIOGRAFIE

[1] Barlow, R. E., Marshall, A. W., Proschan, F., *Some inequalities for starshaped and convex functions*. Pacific J. Math. **29**, 19–42 (1969).
[2] Bruckner, A. M., Ostrow, E., *Some function classes related to the class of convex functions*. Pacific J. Math. **12**, 1203–1215 (1962).
[3] Choquet, G., *Theory of capacites*. Annales de l'Institut Fourier, **5**, 131–296 (1953 și 1954).
[4] Lupaş, L., *Some approximation theorems*. Revue d'analyse numérique et de la théorie de l'approximation, **2**, 55–60 (1973).
[5] McLachlan, E. K., *Extremal elements of the convex cone B_n of functions*. Pacific J. Math. **14**, 987–993 (1964).
[6] Popoviciu, T., *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*. Mathematica (Cluj) **8**, 1–85 (1934).

Primit la 30. V. 1973.