REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 2, Fascicola 2, 1973, pp. 187–199

REPREZENTĂRI CONSTRUCTIVE PENTRU FUNCŢII POZITIVE SIMPLU SUMABILE (–NESUMABILE), RESPECTIV IMPROPRIU INTEGRABILE (–NEINTEGRABILE)

de

ANDREI NEY
(Cluj)

In §1 se pun în evidenţă *reprezentări analitice care caracterizează funcţiile pozitive simplu sumabile respectiv nesumabile pe şiruri*, precum şi *reprezentări care caracterizează funcţiile pozitive, continue, impropriu integrabile respectiv neintegrabile pe* $[a, +\infty[$. *Pe baza acestor formule se pot construi efectiv funcţiile din clasele amintite.*

În §2 se trec în revistă probleme similare în condiţii mai largi, dar totodată mai puţin complet rezolvabile.

Precizăm următoarele relativ la terminplogia utilizată:

O funcţie f reală, definită pe mulţimea $E \subseteq [a, +\infty[$ unde $a \in R$, va fi numită *funcţie simplu sumabilă* respectiv *simplu nesumabilă pe şirul crescător* $\{x_n \mid x_n \in E,\ x_n < x_{n+1}\ (n \in N)\}$ dacă şi numai dacă $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ este *finită* respectiv *infinită* sau *nu există*. Dacă (x_n) este dat prin $x_n = x + n\omega$ unde $n \in N$, ω o constantă pozitivă, iar x o valoare aleasă din $[a, +\infty[$, atunci se va vorbi de *sumabilitate simplă* respectiv *nesumabilitate simplă cu pasul* ω. *Integrabilitatea improprie* şi *neintegrabilitatea improprie* vor fi considerate pe $[a, +\infty[$ — pornind de la *integrala Riemann* pe $[a, b]$, $(a < b < +\infty)$.

§. 1

TEOREMA 1. *Orice funcţie* f *strict pozitivă şi simplu sumabilă pe şirul* $(x_n) = \{x_n \mid x_n \in R,\ x_n < x_{n+1}\ (n \in N)\}$ *este caracterizată pe acest şir prin reprezentarea*

$$(1)\qquad f(x_n) = \frac{f(x_1)\left(\dfrac{1}{\varphi(x_1)} + 1\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (1 + \varphi(x_\nu))}\,\varphi(x_n) \quad (n \in N),$$

unde φ este o funcție strict pozitivă pe (x_n) satisfăcînd împreună cu f ecuația funcțională (care le caracterizează concomitent),

$$(2)\qquad \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} - \frac{f(x_{n+1})}{\varphi(x_{n+1})} = f(x_{n+1}) \quad (n \in N).$$

Dacă funcția f este dată, atunci mulțimea $\{\varphi\}$ a cuplatelor lui f se reprezintă pe (x_n) prin

$$(3)\qquad \varphi(x_n) = \frac{f(x_n)}{C + \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} f(x_\nu)} \quad \forall C \geqslant 0 \ (n \in N)\,;$$

funcțiile φ fiind și ele simplu sumabile pe (x_n), exceptată funcția φ_0 obținută din (3) pentru $C = 0$, care nu este simplu sumabilă pe (x_n).

Demonstrație. Fie un *cuplu de funcții* pozitive pe (x_n), anume (f, φ), care satisface ecuația (2). Aplicînd lui (2) operația $\sum\limits_{n}^{n+p-1}$ se obține

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} f(x_\nu) = \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} - \frac{f(x_{n+p})}{\varphi(x_{n+p})} < \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)},$$

iar pentru $p \to \infty$ rezultă

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} f(x_\nu) \leqslant \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)},$$

ceea ce înseamnă, că f este simplu sumabilă pe (x_n); *pentru suma ei are loc evaluarea*:

$$\sum_{1}^{\infty} f(x_n) = f(x_1) + \sum_{n=2}^{\infty} f(x_n) \leqslant f(x_1)\left(1 + \frac{1}{\varphi(x_1)}\right).$$

Acum se va determina familia cuplatelor lui f, transformîndu-se ecuația (2) într-o ecuație cu diferențe finite, astfel

$$(4)\qquad \Delta \frac{1}{\varphi(x_n)} + \left(1 - \frac{f(x_n)}{f(x_{n+1})}\right)\frac{1}{\varphi(x_n)} = -1,$$

unde

$$\Delta \frac{1}{\varphi(x_n)} = \frac{1}{\varphi(x_{n+1})} - \frac{1}{\varphi(x_n)} \quad (n \in N).$$

Ecuația (4) este liniară și neomogenă în $\frac{1}{\varphi}$; o soluție particulară a lui (4) este

$$\frac{1}{\varphi(x_n)} = \frac{\sum\limits_{n+1}^{\infty} f(x_\nu)}{f(x_n)} \quad (n \in N),$$

în timp ce soluția generală a ecuației omogene în $\frac{1}{\varphi}$ este $\frac{c}{f(x_n)}$, de unde soluția generală a ecuației (4) pentru funcția φ — în condițiile unei funcții sumabile f, date — este

$$\varphi(x_n) = \frac{f(x_n)}{C + \sum\limits_{n+1}^{\infty} f(x_\nu)} \quad \forall C \geqslant 0$$

(C este o constantă nenegativă, arbitrară, pentru ca φ să fie strict pozitivă pe (x_n)). Dintre toate cuplatele lui f, date prin (3) se pune în evidență φ_0, care se obține pentru $C = 0$. După o teoremă clasică a lui Dini relativă la serii cu termeni pozitivi, are loc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_0(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_n)}{\sum\limits_{n+1}^{\infty} f(x_\nu)} = +\infty,$$

deci φ_0 nu este simplu sumbală pe (x_n); toate celelalte funcții ale familiei φ sînt simplu sumabile pe (x_n), în baza criteriului de comparare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = C > 0.$$

Pe de altă parte, dacă f este pozitivă și simplu sumabilă pe (x_n), i se poate atașa familia $\{\varphi\}$ reprezentată prin (3), astfel, ca cuplurile (f,φ) să satisfacă *ecuația funcțională* (2), *care* — în consecință — *caracterizează mulțimea $\{f\}$ a funcțiilor strict pozitive și simplu sumabile pe (x_n).*

Din (2) rezultă

$$\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = \frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)} \cdot \frac{1}{1 + \varphi(x_{n+1})} \quad (n \in N),$$

acestei egalități i se aplică operația $\prod\limits_{n}^{n+p-1}$ și se ajunge ușor la formula de reprezentare (1), pentru f.

Observaţia 1. *Din* (2) *rezultă descreşterea strictă a şirului* $\left(\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}\right)_{n\in N}$, *prin urmare şi existenţa limitei* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = C_0 \geqslant 0$.

Punînd

$$\frac{1}{\Phi(x_n)} = \frac{1}{\varphi(x_n)} - \frac{C_0}{f(x_n)},$$

se poate concepe ecuaţia funcţională cu o condiţie la limită, anume

$$(5) \qquad \frac{f(x_n)}{\Phi(x_n)} - \frac{f(x_{n+1})}{\Phi(x_{n+1})} = f(x_{n+1})\,; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{\Phi(x_n)} = 0,$$

avînd drept soluţii — după cum se constată uşor — cupluri (f, Φ) de funcţii strict pozitive, f fiind simplu sumabilă pe (x_n), iar Φ simplu nesumabilă pe (x_n). Pentru reprezentarea lui f fiind valabilă formula (1) în care se pune $\varphi = \Phi$, iar pentru reprezentarea lui Φ este valabilă (3) în care se pune $C = 0$; pentru sumă are loc

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_1) = f(x_1)\left(1 + \frac{1}{\Phi(x_1)}\right).$$

A se consulta [1] şi [3].

Procedeul 1, *pentru construirea funcţiilor f strict pozitive şi simplu sumabile.*

a) *Sumabilitate pe un şir* (x_n). Se consideră pe (x_n) o funcţie φ definită strict pozitiv, de altfel *oarecare*, şi prin intermediul formulei (1) — în care $f(1)$ este o constantă arbitrară — se construieşte f care satisface (2) cu cuplata φ, deci f va fi simplu sumabilă pe (x_n).

b) *Sumabilitate pe orice şir aritmetic din* $[a, +\infty[$, *cu un pas* ω *dat.* Intervalul $[a, +\infty[$ poate fi acoperit cu familie de şiruri aritmetice de forma:
$\{(x + n\omega)_{n=0,1,\ldots}\}$, $x \in [a, a + \omega[$, ω constantă pozitivă arbitrar aleasă. Dacă φ este definită strict pozitiv pe $[a, +\infty[$, atunci înlocuindu-se în (1) — în care constanta $f(1)$ se fixează arbitrar, x_n prin $x + n\omega$ $(n = 0, 1, \ldots)$ şi făcînd apoi ca x să ia orice valoare din $[a, a + \omega[$, se va obţine o funcţie f strict pozitivă pe $[a, +\infty[$ — a cărei restrîngere pe un anumit şir aritmetic de pasul ω se reprimeşte dînd lui x o valoare particulară fixată în $[a, a + \infty[$ —, f fiind simplu sumabilă cu pasul ω. Un exemplu imediat este dat de cuplul

$$\varphi_0(x) = \frac{\omega}{x}, \quad f(x) = \frac{k}{x(x+\omega)} \qquad (x \geqslant 1),$$

unde k este un parametru pozitiv arbitrar, iar $\omega > 0$ pasul ales.

Analogia teoremei 1 şi îndeosebi a formei sale (5), care apare în cadrul observaţiei 1, este

TEOREMA 1 bis. *Orice funcţie f, strict pozitivă şi nesumabilă simplu pe şirul* $(x_n) = \{x_n \mid x_n \in R,\ x_n < x_{n+1}\ (n \in N)\}$ *este caracterizată pe acest şir prin reprezentarea*

$$(1') \qquad f(x_n) = \frac{f(x_1)\left(\frac{1}{\varphi(x_1)} - 1\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (1 - \varphi(x_\nu))}\,\varphi(x_n) \qquad (n \in N),$$

unde φ *este o funcţie strict pozitivă pe* (x_n) *satisfăcînd cu f împreună ecuaţia funcţională* (care le caracterizează concomitent):

$$(2') \qquad \frac{f(x_{n+1})}{\varphi(x_{n+1})} - \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = f(x_{n+1}), \text{ cu } \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = +\infty,$$

Dacă funcţia f este dată, atunci mulţimea $\{\varphi\}$ *a cuplatelor lui f se reprezintă pe* (x_n) *prin*

$$(3') \qquad \varphi(x_n) = \frac{f(x_n)}{C + \sum\limits_{1}^{n} f(x_\nu)}, \quad \forall\, C > 0 \quad (n \in N)$$

funcţiile φ *fiind simplu nesumabile pe* (x_n). *Dacă în* (3′) *se adoptă* $C = 0$, φ_0 *astfel obţinut rămîne încă simplu nesumabilă, dar atunci reprezentarea* (1′) *se modifică — neesenţial — astfel*:

$$(1'') \qquad f(x_n) = \frac{f(x_2)\left(\frac{1}{\varphi(x_2)} - 1\right)}{\prod\limits_{\nu=2}^{n} (1 - \varphi(x_\nu))}\,\varphi(x_n) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Demonstraţia urmează o cale analogă celei parcurse cu ocazia demonstrării teoremei 1. Trecem în revistă momentele principale cu formulele corespunzătoare. Aplicînd $\sum\limits_{n}^{n+p-1}$ asupra ecuaţiei (2′) se ajunge la

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} f(x_\nu) = \frac{f(x_{n+p})}{\varphi(x_{n+p})} - \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$$

şi ţinînd seamă de condiţia la limită din (2′) se obţine prin trecere la limită

$(p \to \infty)$: $\sum_{n+1}^{\infty} f(x_\nu) = +\infty$, adică f nu este simplu sumabilă pe (x_n). Se obține ușor din egalitatea rezultată anterior, prin însumare,

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) = f(x_1)\left(1 - \frac{1}{\varphi(x_1)}\right) + \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)},$$

ca *formulă de reprezentare pentru o sumă parțială de rangul n*. Pentru determinarea familiei cuplatelor lui f, se ajunge de la (2') la ecuația

$$\Delta \frac{1}{\varphi(x_n)} + \left(1 - \frac{f(x_n)}{f(x_{n+1})}\right)\frac{1}{\varphi(x_n)} = 1,$$

a cărei soluție în $\frac{1}{\varphi}$ este

$$\frac{1}{\varphi(x_n)} = \frac{C}{f(x_n)} + \frac{\sum_{1}^{n} f(x_\nu)}{f(x_n)},$$

de unde rezultă imediat (3'). Totodată reiese ușor că $\varphi(x_n) < 1$ $(n \in N)$. Dacă în (3') se pune $C = 0$ se obține o soluție singulară

$$\varphi_0(x_n) = \frac{f(x_n)}{\sum_{1}^{n} f(x_\nu)} \qquad (n \in N),$$

unde $\varphi_0(x_1) = 1$ și $\varphi_0(x_n) < 1$ doar pentru $n = 2, 3, \ldots$. În conformitate cu teorema lui Dini amintită și mai sus, are loc $\sum_{1}^{\infty} \varphi_0(x_n) = +\infty$. Deoarece $\sum_{1}^{\infty} f(x_n) = +\infty$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x_n)}{\varphi_0(x_n)} = 1.$$

Astfel toate funcțiile φ date prin (3') pentru $C \geqslant 0$ sînt simplu nesumabile pe (x_n). Asemănătoar celor văzute pentru obținerea formulei (1), se obține și (1') din (2'), presupunînd cazul regular $C > 0$; pentru $C = 0$ rezultă necesitatea utilizării lui (1''). În sfîrșit, dacă se presupune că f nu este simplu sumabilă pe (x_n), construindu-se φ cu ajutorul formulei (3'), cuplul (f, φ) va

satisface (1'), iar din egalitatea ce figurează la începutul demonstrației, rezultă

$$\lim_{p\to\infty} \frac{f(x_{n+p})}{\varphi(x_{n+p})} = +\infty,$$

ceeace este cerută de (2').

P r o c e d e u l 1-bis *de construire de funcții nesumabile simplu pe* (x_n), are în vedere doar pornirea de la funcții nesumabile simplu, cunoscute, utilizîndu-se transformările (3') și (1') pentru a se ajunge la *noi* funcții simplu nesumabile.

TEOREMA 2. *Orice funcție f din clasa $C^{+}_{[a,+\infty[}$* (a funcții*lor strict pozitive și continue pe $[a, +\infty[$ și pentru care $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este convergentă, este caracterizată prin reprezentarea*

$$(5) \qquad f(x) = \frac{f(a)}{\varphi(a)} \varphi(x) e^{-\int_a^x \varphi(u)du}, \ x \in [a, +\infty[,$$

unde φ este tot o funcție din clasa $C^{+}_{[a,+\infty[}$, satisfăcînd impreună cu f ecuația integrală cu diferențe finite (care le caracterizează concomitent):

$$(6) \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{f(x+\omega)}{\varphi(x+\omega)} = \int_x^{x+\omega} f(u)du, \ x \in [a, +\infty[, \ \omega \text{ constantă pozitivă, arbitrară.}$$

Dacă f este dată, atunci mulțimea $\{\varphi\}$ a cuplatelor lui f se reprezintă prin

$$(7) \qquad \varphi(x) = \frac{f(x)}{C + \int_x^{\infty} f(u)\,du}, \ C \geqslant 0, \quad x \in [a, +\infty[;$$

funcțiile φ fiind și ele impropriu integrabile pe $[a, +\infty[$ pentru $C > 0$, iar pentru $C = 0$ integrala funcției φ_0 va diverge pe $[a, +\infty[$.

Demonstrație. Fie (f, φ) un cuplu de funcție din $C^{+}_{[a,+\infty[}$ satisfăcînd (6). Substituind în (6) x prin $x + \nu\omega$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ și aplicînd apoi operația $\sum_{\nu=0}^{n-1}$ asupra egalității obținute, rezultă

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{f(x+n\omega)}{\varphi(x+n\omega)} = \int_x^{x+n\omega} f(u)du,$$

de unde

$$\int_{x}^{x+n\omega} f(u)du < \frac{f(x)}{\varphi(x)},\quad x \in [a, +\infty[,$$

deci (pentru $n \to +\infty$):

$$\int_{x}^{\infty} f(u)du \leqslant \frac{f(x)}{\varphi(x)} \text{ sau } \int_{a}^{\infty} f(u)du \leqslant \frac{f(a)}{\varphi(a)};$$

prin urmare f este impropriu integrabilă pe $[a, +\infty[$. Aceasta fiind demonstrată, ecuația (6) se poate pune (după metoda intîlnită mai sus) sub forma

$$\Delta \frac{1}{\varphi(x)} + \left(1 - \frac{f(x)}{f(x+\omega)}\right)\frac{1}{\varphi(x)} = -\frac{1}{f(x+\omega)}\int_{x}^{x+\omega} f(u)du$$

(unde diferența Δ este concepută cu pasul ω). Soluția generală a ecuației omogene în $\frac{1}{\varphi}$ este $\frac{C}{f(x)}$, iar o soluție particulară a ecuației neomogene în $\frac{1}{\varphi}$ este $\frac{1}{f(x)}\int_{x}^{\infty} f(u)du$, de unde rezultă formula de reprezentare (7). Privitor la funcțiile familiei $\{\varphi\}$ distingem două cazuri:

1) *dacă* $C > 0$, atunci numitorul din expresia (7) a lui φ este o funcție pozitivă și continuă pe $[a, +\infty[$, deci φ este integrabilă pe orice interval $[a, b]$ unde $a < b, < +\infty$, iar relația la limită $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = C > 0$, ce se obține din (7), atrage după sine convergența integralei $\int_{a}^{\infty} \varphi(x)dx$.

2) *dacă* $C = 0$, atunci integrala impoprie a lui φ_0 pe $[a, +\infty[$ va fi divergentă (după cum rezultă dintr-o teoremă analoagă aceleia a lui Dini, mai sus amintită, adaptată la integrale, după cum urmează: fie $a < x_1 < x_2 < +\infty$, are loc

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi_0 (x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)\,dx}{\int_{x}^{\infty} f(u)\,du} \geqslant \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)\,dx}{\int_{x_1}^{\infty} f(u)\,du} = \frac{1}{\int_{x_1}^{\infty} f(x)\,dx}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx =$$

$$= \frac{\int_{x_1}^{\infty} f(x)\,dx - \int_{x_2}^{\infty} f(x)\,dx}{\int_{x_1}^{\infty} f(x)\,dx} = 1 - \frac{\int_{x_2}^{\infty} f(x)\,dx}{\int_{x_1}^{\infty} f(x)\,dx} > \frac{1}{2},$$

dacă x_2 se alege suficient de mare: prin urmare, oricît de mare ar fi x_1 i se va putea atașa un x_2 astfel, ca „segmentul Cauchy" $\int_{x_1}^{x_2} \varphi_0(x)\,dx$, să nu poată fi arbitrar de mic, — ceea ce trebuia arătat. Pe de altă parte, dacă, $f \in C^{+}_{[a+\infty[}$ este impropriu integrabilă pe $[a, +\infty[$, atunci considerînd funcția φ dată prin (7), cuplul (f, φ) satisface ecuația (6), după cum rezultă prin simplă înlocuire. Pentru a obține formula (5) de reprezentare a lui f, integrăm ambii membri ai egalității (7), după cum urmează:

$$\int_{a}^{x} \varphi(u)\,du = \int_{a}^{x} \frac{f(u)\,du}{C + \int_{u}^{\infty} f(t)\,dt},$$

substituim $v = C + \int_{u}^{\infty} f(t)dt$, de unde $dv = -f(u)du$, iar $v_a = C + \int_{a}^{\infty} f(t)\,dt$ și $v_x = C + \int_{x}^{\infty} f(t)\,dt$, — în continuare:

$$\int_{a}^{x} \varphi(u)\,du = -\int_{v_a}^{v_x} \frac{dv}{v} = -\ln \frac{C + \int_{x}^{\infty} f(t)\,dt}{v_a},$$

de unde

$$C + \int_{x}^{\infty} f(t)dt = v_a \cdot e^{-\int_{a}^{x} \varphi(u)\,du}.$$

Prin derivare în raport cu x se obține

$$-f(x) = -v_a\, e^{-\int_{a}^{x} \varphi(u)du} \cdot \varphi(x);$$

apoi se determină constanta v_a punînd $x = a$, de unde $-f(a) = -v_a \cdot \varphi(a)$, deci $v_a = \frac{f(a)}{\varphi(a)}$ și se obține ușor (5). A se consulta și [2].

P r o c e d e u l 2, *pentru construirea funcțiilor impropriu integrabile pe* $[a, +\infty[$, *făcînd parte din clasa* $C^+_{[a,+\infty[}$.

Se pornește de la o funcție φ *oarecare* din clasa $C^+_{[a,+\infty[}$ și i se aplică transformarea (5). Dăm două exemple simple:

a) Fie $\varphi(x) = 1$, $x \in [0, +\infty[$ (cu integrala improprie divergentă), se obține

$$f(x) = f(1)e^{-x} \quad x \in [0, +\infty[.$$

b) Fie $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in [1, +\infty[$, (cu integrala improprie convergentă), se obține

$$f(x) = \frac{f(1)}{e} e^{\frac{1}{x}} \cdot x^{-2} \qquad x \in [1, +\infty[.$$

TEOREMA 2. bis. *Orice funcție f din clasa* $C^+_{[a,+\infty[}$ *a funcțiilor strict pozitive și continue pe* $[a, +\infty[$ *pentru care* $\int_a^\infty f(x)dx$ *este divergentă, este caracterizată prin reprezentarea*

$$f(x) = \frac{f(a)}{\varphi(a)} \varphi(x) e^{\int_a^x \varphi(u)du}, \quad x \in [a, +\infty[, \tag{5'}$$

unde φ *este tot o funcție din* $C^+_{[a,+\infty[}$ *satisfăcînd împreună cu f ecuația integrală cu diferențe finite* (care le caracterizează concomitent):

$$\frac{f(x+\omega)}{\varphi(x+\omega)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \int_x^{x+\omega} f(u)du, \quad \text{cu} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty, \tag{6'}$$

ω constantă pozitivă arbitrară.

Dacă f este dată, atunci mulțimea $\{\varphi\}$ *a cuplatelor lui f se reprezintă prin*

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{C + \int_a^x f(u)\,du} \qquad C \geqslant 0, \ x \in [a, +\infty[; \tag{7'}$$

toate funcțiile din familia $\{\varphi\}$ *au integrala improprie divergentă pe* $[a, +\infty[$.

Demonstrația acestei teoreme folosește metoda întîlnită mai sus, — pentru deducerea formulei (5′) se urmează calea văzută la deducerea formulei (5). Singurul punct asupra căruia trebuie să insistăm în mod special este ultima afirmație din enunțul teoremei. În adevăr, dacă s-ar presupune o funcție φ din familia $\{\varphi\}$, ca avînd integrala improprie convergentă pe $[a, +\infty[$, atunci din (5′) ar rezulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(a)}{\varphi(a)} e^{\int_a^\infty \varphi(u)du} = k \qquad (k \text{ constantă pozitivă}),$$

ceea ce ar contrazice pe de o parte contiția la limită din (6′), pe de altă parte ar afirma — contrar premizelor — integrabilitatea improprie a lui f.

P r o c e d e u l 2. bis, *pentru construirea funcțiilor* $f \in C^+_{[a,+\infty[}$ *care sînt impropriu neintegrabile pe* $[a, +\infty[$, este o analogie a procedeului 1 bis.

§ 2.

Redăm, în cele ce urmează, enunțul a două cupluri de teoreme: 3 și 3 bis respectiv 4 și 4 bis, ale căror demonstrații urmează în linii mari metoda utilizată în §1, la demonstrarea teoremelor similiare.

TEOREMA 3. *În mulțimea funcțiilor strict pozitive, definite și aproape peste tot continue pe* $[a, +\infty[$, $(a \in R)$, *mărginite pe orice interval finit din* $[a, +\infty[$, *ecuația*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{f(x+\omega)}{\varphi(x+\omega)} = f(x+\omega) \qquad (a \leqslant x < +\infty, \ \omega \text{ constantă pozitivă}), \tag{8}$$

unde funcția $\frac{f}{\varphi}$ *este mărginită pe* $[a, a+\omega[$, *admite drept soluții cupluri de funcții* (f, φ), *legate între ele prin formulele de reprezentare*: (1) *respectiv* (3), *în care se substituie* x *prin* $x + n\omega$.

1° *Integrala improprie a funcției f este convergentă pe* $[a, +\infty[$,

2° *funcțiile* $\{\varphi\}$ — *cuplatele lui f — sînt simplu sumabile pe orice șir de forma* $(x + n\omega)_{n=0,1,\ldots}$ $\forall x \in [a, +\infty[$, *exceptînd aceea care se obține din formula* (3) *pentru* $C = 0$, *aceasta nefiind simplu sumabilă pe șirul considerat.*

3° *toate funcțiile de tip f, pozitive și necrescătoare avînd integrala improprie convergentă pe* $[a, +\infty[$ *satisfac ecuația* (8).

O b s e r v a ț i a. 2. *Se arată ușor, că punctul* 1° *din enunț rămîne valabil și pentru cazul în care in* (8) *se înlocuiește semnul egalității cu inegalitatea* $\geqslant$. *Acesta este cazul formei „inegalitate" a criteriului lui* Kummer. [1], *extins la integrale improprii de către* Gh. Bucur (*în Culegerea de probleme de calcul diferențial și integral vol. II. Ed. Tehnică, București* 1966) — *celelalte aspecte ale problemei tratate de noi nefiind atinse de autorul citat.*

TEOREMA 3 bis. *În mulțimea de funcții precizată în enunțul teoremei 3, ecuația*

$$(8') \quad \frac{f(x+\omega)}{\varphi(x+\omega)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)} = f(x+\omega) \quad (a \leqslant x < +\infty) \text{ și } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$$

unde $\frac{f}{\varphi}$ *este mărginită pe* $[a, a+\omega[$, *admite drept soluții, cupluri de funcții* (f, φ), *legate între ele prin formulele de reprezentare* (1′) *respectiv* (1″) *după cum* $C > 0$ *respectiv* $C = 0$, *precum și* (3′) — *înlocuindu-se amintitele formule* x_n *prin* $x + n\omega$.

1° *Integrala improprie pe* $[a, +\infty[$ *a funcției f diverge,*

2° *funcțiile* $\{\varphi\}$ *sînt simplu nesumabile cu pasul* ω *pentru* $C \geqslant 0$,

3° *dacă f este strict pozitivă, monotonă și avînd o integrală improprie divergentă pe* $[a, +\infty[$, *atunci i se poate atașa o cuplată* φ *dată prin* (3′) *astfel, ca* (f, φ) *să satisfacă* (8′).

TEOREMA 4. *În mulțimea funcțiilor strict pozitive definite și integrabile pe orice segment finit din* $[a, +\infty[$, *unde* $a \in R$, *ecuația integrală cu diferențe finite* (6) *în care* $\frac{f}{\varphi}$ *este mărginită pe* $[a, a+\omega[$, *caracterizează familia* $\{f\}$ *a funcțiilor impropriu integrabile pe* $[a, +\infty[$. *Funcțiile din familia* $\{\varphi\}$ *a cuplatelor lui f se reprezintă prin* (7); *pentru* $C > 0$ *integrala improprie a lui* φ *converge, iar pentru* $C = 0$ *funcția* φ_0 *are o integrală improprie divergentă pe* $[a, +\infty[$.

TEOREMA 4 bis. *În mulțimea de funcții precizată în enunțul teoremei 4, ecuația integrală cu diferențe finite* (6′) *unde* $\frac{f}{\varphi}$ *este mărginită pe* $[a, a+\omega[$, *caracterizează familia funcțiilor cu integrală improprie divergentă pe* $[a, +\infty[$. *Funcțiile din familia* $\{\varphi\}$ *a cuplatelor lui f se reprezintă prin* (7′); *toate funcțiile* $\{\varphi\}$ *avînd integrala improprie divergentă pe* $[a, +\infty[$.

Notă. Cele tratate în această lucrare, au fost prezentate de autor în anii 1970 și 1971 la ședințele de comunicări ale *Seminarului de teoria ecuațiilor funcționale* al Filialei din Cluj a Societății de Științe Matematice din R. S. România.

REPRÉSENTATIONS CONSTRUCTIVES POUR LES FONCTIONS POSITIVES SIMPLEMENT SOMMABLES (—NON-SOMMABLES), RESPECTIVEMENT IMPROPREMENT INTÉGRABLES (—NON-INTÉGRABLES)

RÉSUMÉ

L'auteur établit des formules de représentation analytique qui caractérisent les fonctions simplement sommables, (1), respectivement non-sommables, (1′), sur une suite, — ainsi que des représentations qui caractérisent les fonctions positives et continues qui sont improprement intégrables, (5), respectivement non-intégrables improprement, (5′), sur demi-droite $[a, +\infty[$. A l'aide de ces formules on peut effectivement construire les fonctions appartenant aux classes envisagées. On donne aussi les équations fonctionnelles qui caractérisent ces classes de fonctions, notamment: (2), (2′), (6), (6′), ainsi que d'autres, dans des cas particuliers remarquables.

BIBLIOGRAFIE

[1] Ney, A., *Contributions à l'étude de la rapidité de convergence des séries à termes positifs.* Mathematica, (Cluj), **4** (**27**), *1*, 77—105 (1962).

[2] Ney, A., *Nouvelles Méthodes pour l'étude des intégrales impropres.* Mathematica, (Cluj)-**8** (**31**), *2*, 335—344 (1966).

[3] Ney, A., *Éléments de la théorie constructive des séries de quaternions.* Mathematica, (Cluj), **12** (**35**), *1*, 127—147 (1970).

Catedra de Analiză Matematică a Facultății de Matematică — Mecanică a Universității „Babeș-Bolyai" din Cluj

Primit la 22. XII. 1972.