REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 2, Fascicola 2, 1973, pp. 201–209

CERCETĂRI PRIVIND PROBLEMA TRANSPORTULUI, II.

de

PAUL NEY

(Cluj)

§ 1. Definiţii şi notaţii

1.1. *Spaţiul matricilor* p-*dimensionale*.

Vom nota cu $\mathfrak{M}(n_1, \ldots, n_p)$ spaţiul matricilor p-dimensionale de tipul $(n_1, \ldots, n_p)$, adică mulţimea matricilor de tipul

$$X = ||x_{i_1}, \ldots, {}_{i_p}|| \; i_k = \overline{1, n_k}, \; k = \overline{1, p},$$

unde $x_{i_1}, \ldots, {}_{i_p} \in \mathbf{R}$. Această mulţime este izomorfă cu $\mathbf{R}^{\prod_{k=1}^{n} n_k}$. În $\mathfrak{M}(n_1, \ldots, n_p)$ vom considera următoarele submulţimi $\mathfrak{M}^+(n_1, \ldots, n_p)$, $\mathfrak{M}^{+,0}(n_1, \ldots, n_p)$, $\mathfrak{M}^-(n_1, \ldots, n_p)$, $\mathfrak{M}^{-,0}(n_1, \ldots, n_p)$, care sînt respectiv mulţimea matricilor cu elemente pozitive, nenegative, negative, nepozitive. Matricea care are toate elementele egale cu x se va nota $\mathbf{x}$.

Fie $A = ||a_{i_1, \ldots, i_p}||$ şi $B = ||b_{i_1, \ldots, i_p}||$ două matrici din $\mathfrak{M}(n_1, \ldots, n_p)$. Vom nota cu

$A * B$ matricea $||a_{i_1, \ldots, a_p} \cdot b_{i_1, \ldots, i_p}||$

$(A|B)$ numărul $\Sigma a_{i_1, \ldots, i_p} \cdot b_{i_1, \ldots, i_p}$

A^B matricea $||a_{i_1, \ldots, i_p}^{b_{i_1, \ldots, i_p}}||$

1.2. *Algebra booleană* $\mathfrak{B}_p$.

Vom nota cu $\mathfrak{B}_p$ algebra booleană a cărei elemente sînt p-uple ordonate cu elemente din mulţimea {0, 1}. Folosim operaţiile „$\bigcup$" reuniunea, „$\bigcap$" intersecţia, „—" negarea, conform tabelelor:

$$
\begin{array}{c|cc} \cup & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc} \cap & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \bar{0} = 1 \\ \\ \bar{1} = 0 \end{array}
$$

Fie $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ şi $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$ elemente din $\mathcal{B}_p$. Prin definiţie

$$\alpha \cup \beta = (\alpha_1 \cup \beta_1, \ldots, \alpha_p \cup \beta_p)$$

$$\alpha \cap \beta = (\alpha_1 \cap \beta_1, \ldots, \alpha_p \cap \beta_p)$$

$$\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_p)$$

$\mathcal{B}_p$ are 2^p elemente; acestora li pot pune în corespondenţă numerele întregi de la 0 la $2^p - 1$, prin corespondenţa dintre reprezentările în baza 2 a acestor numere şi elementele mulţimii $\mathcal{B}_p$.

Vom nota cu $(\beta)_{10}$ numărul scris în baza 10 corespunzător lui β.

1.3. *Operatori de comprimare.*

Fiecărui $\beta \in \mathcal{B}_p$ *i* se poate ataşa un operator după cum urmează: Fie $\beta \in \mathcal{B}_p$ şi considerăm vectorul $\beta \cdot (1, \ldots, p)$. Notăm cu i_β mulţimea componentelor diferite de zero, ale vectorului $\beta \cdot (1, \ldots, p)$. Mai considerăm şi vectorul $(n_1, \ldots, n_p)\ \bar{\beta}$.

D e f i n i ţ i a 1.3.1. *Numim operator de comprimare ataşat vectorului* $\beta \in \mathcal{B}_p$, *funcţia* $\mathcal{C}_{(\beta)_{10}}$ *de la mulţimea* $\mathcal{M}_p$ *a matricilor* p-*dimensionale la* $\mathcal{M}_p$ *astfel că matricei* $X = \|x_{i_1, \ldots, i_p}\|\ i_k = \overline{1, n_k}\ k = \overline{1, p}$ *îi ataşează matricea*

$$\mathcal{C}_{(\beta)_{10}}(x) = \left\| \sum_{\substack{i_k = \overline{1, n_k} \\ k \in i_p}} x_{i_1, \ldots, i_p} \right\| \ i_k = \overline{1, n_l}\ l \notin i_p$$

X fiind de tipul $(n_1, \ldots, n_p)$, $\mathcal{C}_{(\beta)_{10}}(X)$ *este de tipul* $(n_1, \ldots, n_n)^{\bar{\beta}}$

Exemplu:

Fie $M = \|x_{i_1 i_2 i_3 i_4}\|\ i_1 = \overline{1,6},\ i_2 = \overline{1,10},\ i_3 = \overline{1,9},\ i_4 = \overline{1,20}$. Deci matricea M e de dimensiunea 4 şi de tipul (6, 10, 9, 20). B_4 este mulţimea $\{0, 1\}^4$; fie $\beta = (0, 1, 1, 0) \in \mathcal{B}_4$. Vom descrie operatorul $\mathcal{C}_{(\beta)_{10}}$, $(\beta)_{10} = 5$ deci scriem $\mathcal{C}_5 .\ \beta \cdot (1, 2, 3, 4) = (0, 2, 3, 0)$ deci $i_\beta = \{2, 3\}$. Aplicînd pe $\mathcal{C}_5$ lui M obţinem matricea

$$\mathcal{C}_5(M) = \left\| \sum_{\substack{i_2 = \overline{1,10} \\ i_3 = \overline{1,9}}} x_{i_1, \ldots, i_4} \right\| i_1 = \overline{1,6},\ i_4 = \overline{1,20}$$

$\bar{\beta}$ fiind egal cu (1, 0, 0, 1), tipul lui $\mathcal{C}_5(M)$ este $(6, 10, 9, 20)^{(1,0,0,1)} = (6, 1, 1, 20)$.

Se poate demonstra

P r o p o z i ţ i a 1.3.1. *Operatorul de comprimare definit prin definiţia* 1.3.1. *este liniar şi continuu faţă de fiecare element al matricei.*

D e f i n i ţ i a 1.3.2. *Mulţimea*

$$\mathfrak{L}_p = \{\mathcal{C}_{(\beta)_{10}} | \beta \in \mathcal{B}_p\}$$

se va numi mulţimea comprimărilor ataşate mulţimii matricelor p-*dimensionale* $\mathcal{M}_p$. *Se numesc comprimări elementare, comprimările* $\mathcal{C}_{2^k}$ *pentru* $k = 1, p - 1$. *Operatorul identitate în* $\mathcal{M}_p$ *este de fapt* $\mathcal{C}_0$.

Se poate verifica

P r o p o z i ţ i a 1.3.2. *Operaţia de compunere* ,,o'' *determină pe* $\mathfrak{L}_p$ *o structură de semigrup comutativ cu element unitate, elementul unitate fiind* $\mathcal{C}_0$. *Mai are loc* $\mathcal{C}_{(\beta)_{10}} \circ \mathcal{C}_{(\beta)_{10}} = \mathcal{C}_{(\beta)_{10}}$

Să considerăm aplicaţia $\varphi: \mathcal{B}_p \to \mathfrak{L}_p$ determinată de corespondenţa $\beta \to \mathcal{C}_{(\beta)_{10}}$. Are loc

P r o p o z i ţ i a 1.3.3. *Aplicaţia* φ *este un omomorfism de la* $(\mathcal{B}_p, \cup)$ la $(\mathfrak{L}_p \circ)$.

Demonstraţie. Trebuie arătat că $\varphi(\alpha \cup \beta) = \varphi(\alpha) \circ \varphi(\beta)$ pentru $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_p$. $\varphi(\alpha \cup \beta) = \mathcal{C}_{(\alpha \cup \beta)_{10}}$, $\varphi(\alpha) = \mathcal{C}_{(\alpha)_{10}}$ şi $\varphi(\beta) = \mathcal{C}_{(\beta)_{17}} \cdot \mathcal{C}_{(\alpha)_{10}}$ şi $\mathcal{C}_{(\beta)_{10}}$ se pot dezvolta după comprimările elementare şi în baza propoziţiei 1.3.2., vom grupa astfel comprimările, încît comprimările elementare care apar de două ori să se reducă, astfel vom obţine dezvoltarea lui $\mathcal{C}_{(\alpha \cup \beta)_{10}}$.

§ 2. Problema de transport p–dimensională

2.1. *Definirea problemei.*

Fie $\mathfrak{L} = \{\mathcal{C}_{a_1}, \ldots, \mathcal{C}_{a_q}\}$ şi $\mathcal{M} = \{M_1. \ldots, M_q\} \subset \mathcal{M}_p$. Mai considerăm matricea $C \in \mathcal{M}^+(n_1, \ldots, n_p)$ cu $C = \|c_{i_1, \ldots, i_p}\|\ \ i_k = \overline{1, n_k},\ \ k = \overline{1,p}$. Vom nota cu $\mathcal{S}(\mathfrak{L}, \mathcal{M})$ mulţimea

$$\{X | X \in \mathcal{M}^{+,0}(n_1, \ldots, n_p)\ \mathcal{C}_{a_i}(X) = M_i\ \ i = \overline{1, q}\}$$

În general problema de transport p-dimensională se poate defini în felul următor:

D e f i n i ţ i a 2.1.1. *Se numeşte problemă de transport p-dimensională problema găsirii unei matrici* $S = \|s_{i_1, \ldots, i_p}\|\ \overline{i_k = 1, n_k}\ \overline{k = 1, p}$ *din* $\mathcal{S}(\mathfrak{L}, \mathcal{M})$ *astfel ca să aibă loc relaţia*:

$$(C|S) = \min_{x \in \mathcal{S}(\mathfrak{L}, \mathcal{M})} (C|X)$$

Problema, care se poate reprezenta prin tripletul $(C, \mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ *se numește corect formulată dacă* $\mathcal{S}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) \neq \emptyset$ *respectiv incorect formulată dacă* $\mathcal{S}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) = \emptyset$.

Dacă $\mathcal{S}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) \neq \emptyset$, atunci oricum am aplica operatori asupra celor din $\mathfrak{L}$, și asupra matricilor corespunzătoare, la operatori egali corespund matrici egale. Astfel dacă $\mathcal{C}_a$ și $\mathcal{C}_b \in \mathfrak{L}$ și $\mathcal{C}_m$, $\mathcal{C}_n \in \mathfrak{L}_p$, sînt astfel că $\mathcal{C}_m \circ \mathcal{C}_a = \mathcal{C}_n \circ \mathcal{C}_b$ atunci are loc $(\mathcal{C}_m \circ \mathcal{C}_a)(M_a) = (\mathcal{C}_n \circ \mathcal{C}_b)(M_b)$. De aici rezultă

P r o p o z i ț i a 2.1.1. *O condiție necesară pentru ca problema prezentată în Definiția* 2.1.1. *să fie corect formulată, este următoarea: pentru orice* $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b \in \mathfrak{L}$ *și* $\mathcal{C}_m, \mathcal{C}_n \in \mathfrak{L}_p$ *astfel că* $\mathcal{C}_m \circ \mathcal{C}_a = \mathcal{C}_n \circ \mathcal{C}_b$ *are loc egalitatea*

$$\mathcal{C}_m(M_a) = \mathcal{C}_n(M_b)$$

O b s e r v a ț i a 2.1.1. Rămîne o problemă deschisă problema suficienței condiției prezentate în propoziția de mai sus.

Exemplu:

Fie $X = ||x_{ijkl}||$ și $||U = u_{ijkl}||$ două matrici de tipul (n_1, n_2, n_3, n_4) astfel că $x_{ijkl} \geqslant 0$ și $u_{ijkl} > 0$ pentru toți indicii.

Considerăm tabelul:

i	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
j	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
k	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
l	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_4$ $\mathcal{C}_8$

$\mathcal{C}_3$ $\mathcal{C}_7$ $\mathcal{C}_8$ $\mathcal{C}_{10}$ $\mathcal{C}_{12}$

Pe penultima linie apar comprimările elementare, iar pe ultima linie apar comprimările alese drept elementele lui $\mathfrak{L}$. Fie $\mathfrak{M} = \{A, B, C, D, E\}$.

Restricțiile problemei sînt:

$$\mathcal{C}_3(X) = ||\sum_{k,l} x_{ijkl}|| = ||a_{ij}|| = A$$

$$\mathcal{C}_7(X) = ||\sum_{ijkl} x_{j,k,l}|| = ||b_i|| = B$$

$$\mathcal{C}_8(X) = ||\sum_{i} x_{ijkl}|| = ||c_{jke}|| = C$$

$$\mathcal{C}_{10}(X) = ||\sum_{i,k} x_{ijkl}|| = ||d_{jl}|| = D$$

$$\mathcal{C}_{12}(X) = ||\sum_{i,j} x_{ijkl}|| = ||e_{kl}|| = E$$

Tabelul următor se compune din:

— *coloana* 1 indicii după care se efectuează însumarea în cazul fiecărui operator de comprimare din $\mathfrak{L}$

— *coloana* 2 grupările de indici, care includ grupările de pe aceeași linie din coloana 1.

— *coloana* 3 în ordine, comprimările ce se atașează indicilor adăugați,

— *coloana* 4 matricile din $\mathfrak{M}$ corespunzătoare fiecărei comprimări din $\mathfrak{L}$.

$\{k, l\}$	$\{k, l, i\}$ $\{k, l, j\}$ $\{k, l, i, j\}$
$\{j, k, l\}$	$\{j, k, l, i\}$
$\{i\}$	$\{i, j\}$, $\{i, k\}$, $\{i, l\}$, $\{i, j, k\}$, $\{i, j, l\}$ $\{i, k, l\}$ $\{i, j, k, l\}$
$\{i, k\}$	$\{i, k, j\}$, $\{i, k, l\}$, $\{i, k, l, j\}$
$\{i, j\}$	$\{i, j, k\}$, $\{i, j, l\}$, $\{i, j, k, l\}$

$\mathcal{C}_8$, $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_{12}$	A
$\mathcal{C}_8$	B
$\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_6$, $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_7$	C
$\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_5$	D
$\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$	E

Deci, în baza propoziţiei 2.1.1. e necesar ca matricile din coloana 4 să satisfacă relaţiile

$$\mathcal{C}_8(A) = \mathcal{C}_3(B) = \mathcal{C}_1(C),\ \mathcal{C}_4(A) = B$$

$$\mathcal{C}_4(C) = D,\ \mathcal{C}_2(C) = E,\ \mathcal{C}_5(C) = \mathcal{C}_1(E),$$

$$\mathcal{C}_6(C) = \mathcal{C}_4(D) = \mathcal{C}_1(E),$$

$$\mathcal{C}_{12}(A) = \mathcal{C}_8(B) = \mathcal{C}_7(C) = \mathcal{C}_5(D) = \mathcal{C}_3(E).$$

2.2. *O caracterizare a problemei de transport.*

Să considerăm problema de transport reprezentată prin tripletul $(C, \mathfrak{L}, \mathfrak{M})$. Fie $M \in \mathfrak{M}\ (n_1, \ldots, n_p)$. Putem considera că avem un operator care lui M îi ataşează vectorul $(\mathcal{C}_{a_1}(M), \ldots, \mathcal{C}_q(M))$. Acest operator mai poate fi considerat ca şi plecînd de la spaţiul euclidean de dimensiunea $\tau(M)$ la spaţiul eculidean de dimensiune $\sum_{i=1}^{q} \tau(M_i)$ unde $\tau(M)$ înseamnă produsul numerelor din vectorul ce indică tipul matricii M. Să notăm cu Φ acest operator. Astfel putem scrie

$$\Phi : \underbrace{\mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}}_{\tau(M)} \to \underbrace{\mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}}_{\sum_{i=1}^{q} \tau(M_i)}$$

Pentru necesităţile problemei de transport, Φ trebuie restrîns la mulţimea vectorilor de elemente nenegative. Putem continua cu abstractizarea problemei de transport după cum urmează: fie $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ spaţii vectoriale reale topologice, K un con din $\mathfrak{X}$ şi $y_0 \in \mathfrak{Y}$, $c \in K$. Fie $\Gamma : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un operator liniar şi continuu, iar $F : \mathfrak{X}^2 \to R$, o funcţională continuă.

Aici conul K corespunde la $\mathbf{R}_+ \times \ldots \times \mathbf{R}_+$ de $\tau(M)$ de ori, Γ la aplicaţia Φ de mai sus, $c \in K$ corespunde matricei C din 2.1., $y_0 \in \mathfrak{Y}$ corespunde la vectorul $(M_1, \ldots, M_q)$ iar F reprezintă funcţia de scop (produsul scalar). Mulţimea $\mathfrak{S}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ va fi $\Gamma^{-1}(y_0) \cap K$; astfel problema de transport se va enunţa astfel:

P r o b l e m a 2.2.1. *Să se determine $x_0 \in \mathfrak{X}$ astfel ca*

$$F(c, x_0) = \min_{x \in \Gamma^{-1}(y_0) \cap K} F(c, x)$$

Vom arăta că în condiţiile noastre mulţimea $\Gamma^{-1}(y_0) \cap K$ este convexă şi compactă.

P r o p o z i ţ i a 2.2.1. *Mulţimea $\mathfrak{S}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ este convexă şi compactă.*

D e m o n s t r a ţ i e. Operatorul Γ fiind liniar, mulţimea $\mathfrak{S}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ este convexă, deci dacă A, $B \in \mathfrak{S}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ atunci $\alpha A + \beta B \in \mathfrak{S}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ unde $\alpha + \beta = 1$ şi $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Fie acum $M \in \mathfrak{M}$ şi $\mathcal{C}_{2^p-1}$ comprimarea totală din $\mathfrak{L}_p$. E clar că dacă $X = ||x_{i_1, \ldots, i_q}|| \in \mathfrak{S}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ atunci are loc $\forall i_1, \ldots, i_p\ 0 \leqslant x_{i_1, \ldots, i_p} < \mathcal{O}_{2_p-1}(M)$. Aceasta înseamnă că $\mathfrak{S}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ este o mulţime mărginită. În fine, să considerăm $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un şir din $\mathfrak{S}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ astfel încît şirurile pe componente $||x^{(n)}_{i_1, \ldots, i_p}||_{n \in \mathbf{N}}$ să fie şiruri Cauchy. Să notăm cu $\lim X_n$ matricea de elemente $\lim_{n \to \infty} x^{(n)}_{i_1, \ldots, i_p}$. Din cauza continuităţii lui Γ rezultă că $\lim_{n \to \infty} X_n \in \mathfrak{S}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$. De aici rezultă imediat că funcţionala $F(c, x)$ îşi atinge extremele în $\mathfrak{S}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ ca fiind continuă pe o mulţime compactă.

2.3. *Invarianţi faţă de restricţii.*

Vom trata această problemă în general, considerînd operatorul $\Gamma : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ unde Γ este liniar şi continuu, $\mathfrak{X}$ şi $\mathfrak{Y}$ sînt spaţii vectorial topologice complete de dimensiune finită, $F : \mathfrak{X} \to \mathbf{R}$ este o funcţională liniară şi continuă depinzînd de parametrul $y_0 \in \mathfrak{Y}$, $K \subset \mathfrak{X}$ un con din $\mathfrak{X}$. Notăm cu $O_{\mathfrak{X}}$ respectiv $O_{\mathfrak{Y}}$ elementele zero din $\mathfrak{X}$ respectiv $\mathfrak{Y}$. Elementele din $\mathfrak{X}$ invariante faţă de restricţia $\Gamma(x) = y_0$ formează mulţimea $\Gamma^{-1}(y_0)$.

O b s e r v a ţ i a 2.3.1. În cazul nostru, matricile ce anulează operatorul Φ din § 2.2. se vor numi nul-matrici referitoare la sistemul de comprimări $\mathfrak{L}$.

Fie $x \in \Gamma^{-1}(y_0) \cap K$. Pentru ca $\theta \in \Gamma^{-1}(O_y)$ să fie astfel ca $x + \theta \in \Gamma^{-1}(y_0) \cap K$ e necesar să verificăm dacă $x + \theta \in K$. Vom nota cu $\theta(x)$ mulţimea

$$\{\theta | \theta \in \Gamma^{-1}(y_0),\ x + \theta \in K\}$$

P r o p o z i ţ i a 2.3.1. *Dacă $x_1, x_2 \in \Gamma^{-1}(y_0) \cap K$ atunci există $\theta_1 \in \theta(x_1)$ şi $\theta_2 \in \theta(x_2)$ astfel ca $x_1 + \theta_1 = x_2$ şi $x_2 + \theta_2 = x_1$.*

D e m o n s t r a ţ i e. θ_1 este $x_2 - x_1$, iar θ_2 este $x_1 - x_2$. În particular propoziţia are loc şi pentru $x_1 \in \Gamma^{-1}(y_0) \cap K$ şi $s \in \Gamma^{-1}(y_0) K \cap$ astfel încît $F(c, s) = \min F(c, x)$ pentru $x \in \Gamma^{-1}(y_0) \cap K$.

P r o b l e m a 2.3.1. *Să se determine θ^* astfel ca*

$$F(c, \theta^*) = \min_{\theta \in \Theta(x)} F(c, \theta)$$

P r o p o z i ţ i a 2.3.2. *Problema 2.2.1. este echivalentă cu problema 2.3.1.*

D e m o n s t r a ţ i e. Se aplică propoziţia 2.3.1. x_0 fiind soluţia problemei 2.2.1., $\theta^* = x_0 - x$ invers $F(c, \theta^*) = \min_{\theta \in \Theta(x)} F(c, \theta)$ implică $F(c, \theta^*) +$

$+ F(c, x) = \min_{\theta \in \Theta(x)} (F(c, \theta) + F(x, x))$ de unde $x + \theta^*$ este o soluţie pentru problema 2.2.1.

A îmbunătăţi elementul $x \in \Gamma^{-1}(y_0) \cap k$ înseamnă a găsi $\theta \in \theta(x)$ astfel ca $F(c, \theta) < 0$. În acest caz $F(c, x + \theta) = F(c, x) + F(c, \theta) < F(c, x)$. Fie $\theta_1, \ldots, \theta_r$ o bază a lui $\Gamma^{-1}(O_y)$ şi $\theta \in \Gamma^{-1}(0_y)$ vom scrie

$$\theta = \sum_{i=1} \lambda_i \theta_i$$

Astfel putem formula o nouă problemă:

P r o b l e m a 2.3.2. *Să se determine* $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*)$ *numere reale, astfel ca* $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^* F(c, \theta_i) = \min_{\Sigma \lambda_i \theta_i \in \Theta(x)} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i F(c, \theta_i)$.

Are loc evident (e doar o transcriere simplă a propoziţiei 2.3.)

P r o p o z i ţ i a 2.3.3. Sînt echivalente problemele 2.3.1 şi 2.3.2.

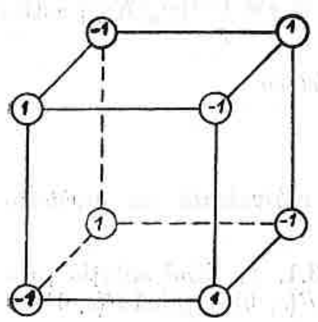
În formularea noastră un algoritm pentru determinarea soluţiei optimale a problemei de transport înseamnă un şir de instrucţiuni care să conducă de la un element $\theta_1 \in \Gamma^{-1}(\theta y)$ la altul $\theta_2 \in \Gamma^{-1}(\theta_y)$, pînă cînd în număr finit de paşi se ajunge la $\theta^* \in \Gamma^{-1}(\theta\ )$ astfel că $x + \theta^+$ este soluţie optimală, x fiind o soluţie oarecare dată.

Determinarea unui astfel de algoritm depinde efectiv de forma elementelor din $\Gamma^{-1}(O_y)$ şi de dimensiunea spaţiului liniar $\Gamma^{-1}(O_y)$. Determinarea unei baze a lui $\Gamma^{-1}(O_y)$ este deasemenea o problemă dificilă.

Continuarea cercetărilor privind tratarea în acest cadru general al problemelor de transport, va constitui obiectul unei lucrări ulterioare.

O b s e r v a ţ i a 2.3.1. Partea întîia a lucrării constituie o exemplificare a acestor idei, prezentîndu-se în acest cadru, problema de transport de dimensiunea 2, cu matrici de tipul (m, n). În acest caz $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2\}$.

E x e m p l u 2.3.1. Vom indica spaţiul nul-matricilor referitori la restricţiile $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_4\}$ pentru problema de transport de dimensiunea 3.



Se consideră matricea elementară şi se consideră toate translaţiile posibile ale acestei matrici în matricea cu toate elementele o, de tipul (n_1, n_2, n_3). În desen matricea din urmă apare ca şi un paralelipiped de dimensiunile (n_1, n_2, n_3). Fiecare poziţie a matricii elementare, înseamnă o matrice de tipul (n_1, n_2, n_3) şi există $(n_1 - 1)(n_2 - 1)(n_3 - 1)$ poziţii distincte. Matricile astfel obţinute, formează o bază pentru spaţiul matricilor ce anulează fiecare operator din $\mathfrak{L}$.

RECHERCHES SUR LE PROBLÈME DU TRANSPORT, II.

RÉSUMÉ

On présente des considérations sur le problème du transport multi-dimensionnel, à l'aide des *opérateurs de comprimation* définis pour les matrices.

BIBLIOGRAFIE

[1] C o r b a n, A., *A multidimensional transportation problem.* Rev. Roumaine de Math. pures et appl. **9**, 721–735 (1964).
[2] M i h o c, G h. - N ă d e j d e, I., *Programarea matematică.* Vol. 1, 2. Editura Ştiinţifică, Bucureşti (1967).
[3] M i h u C e r c h e z, *Programare tridimensională.* Ed. Tehnică, Bucureşti (1970).
[4] S i m o n n a r d, M. *Programmation linéaire.* Ed. Dunod, Páris, (1962).

Primit la 26. IV. 1973.

Academia Republicii Socialiste România
Filiala din Cluj
Institutul de Calcul