REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 2, Fascicola 2, 1973, pp. 211–222

ASUPRA FUNCŢIEI LUI LAGRANGE GENERALIZATE PENTRU PROBLEMELE DE OPTIMIZARE CU RESTRICŢII

de

ŞTEFAN ŢIGAN
(Cluj)

1. Introducere

Fie X o mulţime arbitrară nevidă, Y o mulţime semi-ordonată* nevidă (cu relaţia de semi-ordonare „$\leqslant_Y$") şi Z un grup ordonat** (cu relaţia de ordine „$\leqslant$" şi operaţia „$+$").

Fie z_1, z_2 două elemente arbitrare din Z. Dacă au loc relaţiile $z_1 \leqslant z_2$ şi $z_1 \neq z_2$ atunci se va scrie prescurtat $z_1 < z_2$. Faptul, că z_1 şi z_2 nu se află în relaţia $z_1 < z_2$ se va nota prin $z_1 \overline{<} z_2$ şi în mod analog se va srie $y_1 \overline{\leqslant}_Y y_2$ dacă elementele y_1 şi y_2 din Y nu se află în relaţia $y_1 \leqslant_Y y_2$.

Fie f o funcţie definită pe o mulţime $D(D \subset X$, D nevidă), cu valori în Z şi g o funcţie definită pe D cu valori în Y.

În cele ce urmează vom considera următoarea problemă de optimizare.

P(b). Să se determine $x' \in D, g(x') \leqslant_Y b$, astfel încît pentru orice $x \in D$ care verifică condiţia:

(1.1) $$g(x) \leqslant_Y b,$$

să aibă loc relaţia:

(1.2) $$f(x') \overline{<} f(x).$$

---

* O mulţime A se numeşte semiordonată dacă în A s-a întrodus o relaţie binară (relaţie de semi-ordonare) reflexivă şi tranzitivă.

** Despre o mulţime F se spune că este ordonată dacă în F s-a întrodus o relaţie binară (relaţie de ordine) reflexivă tranzitivă şi antisimetrică. Fie mulţimea F grup în raport cu o operaţie binară „$+$" şi în acelaşi timp să presupunem că F este ordonată în raport cu o relaţie de ordine „$\leqslant$". Atunci F se numeşte grup ordonat, dacă oricare ar fi elementele f_1, f_2, f_3 din F relaţia $f_1 \leqslant f_2$ implică relaţiile $f_3 + f_1 \leqslant f_3 + f_2$ şi $f_1 + f_3 \leqslant f_2 + f_3$.

Mulţimea elementelor $x' \in D$ care verifică condiţiile, $g(x') \leqslant_Y b$, (1.1) şi (1.2) se va nota prin $E(b)$ şi orice element din $E(b)$ se va numi soluţie pentru problema P(b).

În lucrare, utilizînd o funcţie Lagrange generalizată se extind la cazul problemei P(b) unele rezultate din [1], [2], [3] asupra multiplicatorilor lui Lagrange generalităţi pentru programarea nelineară şi de asemenea se generalizează rezultatele din [4] obţinute pentru cazul cînd $Z = R$ (R mulţimea numerelor reale).

2. Notaţii şi definiţii

Mulţimea ordonată Z (care este un grup ordonat) se extinde prin adăugarea a două elemente z' şi z'' care prin definiţie pentru orice $z \in Z$ verifică condiţia:

$$z'' \leqslant z \leqslant z'.$$

Operaţia „ + ” a grupului Z o vom extinde la mulţimile $Z' = Z \cup \{z'\}$ şi $Z'' = Z \cup \{z''\}$ astfel: $z' + z = z + z' = z'$ pentru orice $z \in Z$,

$$z' + z' = z'$$

$$z'' + z = z + z'' = z'' \text{ pentru orice } z \in Z,$$

$$z'' + z'' = z''.$$

Inversul unui element z din grupul Z îl vom nota prin $-z$. Prin definiţie vom lua $-z' = z''$ şi $-z'' = z'$. Pentru simplitate convenim să notăm sumele: $z_1 + (-z_2)$ prin $z_1 - z_2$ şi $(-z_1) + z_2$ prin $-z_1 + z_2$ pentru orice z_1, z_2 din Z.

Fie u o funcţie definită pe Y cu valori în Z'. Vom spune că funcţia u este nedescrescătoare dacă pentru orice elemente y_1, y_2 din Y, relaţia $y_1 \leqslant_Y y_2$ implică

$$u(y_1) \leqslant u(y_2).$$

Fie M mulţimea funcţiilor nedescrescătoare definite pe Y cu valori în Z', atunci pentru orice $b \in B$ prin $M(b)$ vom nota mulţimea:

$$\{u \in M \mid u(b) \in Z\},$$

unde

$$B = \{b \in Y \mid S(b) \neq \emptyset\},$$

iar

$$S(b) = \{x \in D \mid g(x) \leqslant_Y b\}.$$

Funcţia L (definită pe $X \times M(b)$ cu valori în Z'') definită prin formula:

$$L(x, u) = f(x) - u(g(x))$$

se numeşte funcţia lui Lagrange generalizată asociată problemei P(b).

Fie $z \in Z$, $z > 0$ (0 este elementul neutru din grupul Z) şi y_1, y_2 din Y astfel încît $y_1 \overline{\leqslant}_Y y_2$. Atunci vom spune că elementele y_1, y_2 sînt z — separate prin funcţia u (din $M(b)$) dacă avem:

$$u(y_1) - u(y_2) \geqslant z. \tag{2.1}$$

Se poate arăta că oricare ar fi $z \in Z$, $z > 0$, $b \in B$ şi $y' \in Y$ astfel încît $y' \overline{\leqslant}_Y b$ există cel puţin un element u_0 în $M(b)$ astfel încît y' şi b sînt z—separate prin u_0. Într-adevăr, dacă se ia u_0 în modul următor:

$$u_0(y) = \begin{cases} z & \text{dacă} \quad y \leqslant_Y b \\ 0 & \text{dacă} \quad y \overline{\leqslant}_Y b, \end{cases}$$

atunci u_0 verifică (2.1), cu $y_1 = y'$ şi $y_2 = b$, şi $u_0 \in M(b)$.

O submulţime $C(b)$ a mulţimii $M(b)$ se va numi submulţime separatoare dacă verifică condiţiile:

a) funcţia identic nulă θ ($\theta(y) = 0$ pentru orice $y \in Y$) aparţine mulţimii $C(b)$;

b) oricare ar fi $z > 0$ şi oricare ar fi $y \in Y$ astfel încît $y \overline{\leqslant}_Y b$, există un element $u \in C(b)$ încît y şi b sînt z-separate prin u.

În continuare asupra grupului ordonat Z se vor face următoarele ipoteze:

i) Z este o mulţime ordonată dirijată,

ii) mulţimea $Z^+ = \{z \mid z \in Z, z > 0\}$ este nevidă.

3. Probleme asociate

Fie $b' \in B$. Atunci vom nota în continuare problema P(b') prin P1. Problemei P1 i se asociază următoarele patru probleme.

P2. Să se determine $x' \in D$ astfel încît pentru orice $x \in D$ să aibă loc relaţia:

$$f(x') - u(g(x')) \overline{<} f(x) - u(g(x)), \tag{3.1}$$

unde u este din M şi are proprietatea că există cel puţin un element x^0 în D astfel încît $u(g(x_0)) \in Z$.

Un element $x' \in D$ care verifică relaţia (3.1) pentru orice $x \in D$ se numeşte soluţie pentru problema P2. Pentru un element u fixat mulţimea soluţiilor problemei P2 se va nota prin $L(u)$.

În continuare fie U o submulţime (a lui $M(b')$) care conţine o submulţime separatoare din $M(b')$.

P3. Să se determine $x' \in D$ şi $u' \in U$ astfel încît:

$$x' \in L(u'), \tag{3.2}$$

$$g(x') \leqslant_Y b', \tag{3.3}$$

$$u'(g(x')) = u'(b'). \tag{3.4}$$

Un cuplu $[x', u']$ care verifică condiţiile (3.2) — (3.4) se numeşte soluţie a problemei P3.

Să considerăm operatorul H (definit pe $X \times U$ cu valori în Z'') dat prin formula

$$H(x, u) = f(x) - u(g(x)) + u(b') \tag{3.5}$$

pentru orice $(x, u) \in X \times U$.

Vom spune că $(x', u') \in X \times U$ este punct şea pentru operatorul H dacă sînt verificate condiţiile:

$$H(x, u') \overline{>} H(x', u'), \text{ oricare ar fi } x \in D, \tag{3.6}$$

$$H(x', u') > H(x', u), \text{ oricare ar fi } u \in U, \tag{3.7}$$

$$H(x', u') \in Z. \tag{3.8}$$

P4. Să se determine $x' \in D$ şi $u' \in U$ astfel încît (x', u') să fie punct şea pentru operatorul H.

P5. Fie $b' \in B$. Să se determine $u' \in U$ astfel încît pentru orice soluţie x' a problemei P1 să aibă loc relaţia:

$$f(x') - u'(b') + u'(b) \overline{<} f(x'') \tag{3.9}$$

oricare ar fi $b \in B$ şi $x'' \in S(b)$. Un element $u' \in U$ care verifică (3.9) se va numi soluţie pentru problema P5.

4. Rezultate

Teoremele următoare generalizează rezultate similare obţinute în [3], pentru programarea neliniară, sau în [4] pentru cazul cînd $Z = R$.

TEOREMA 1. *Cuplul* $[x', u']$, $x' \in D$ *şi* $u' \in U$ *este soluţie pentru problema* P3, *dacă şi numai dacă:*

(i) $x' \in E(b')$

(ii) u' *este soluţie pentru problema* P5.

Demonstraţie. Să demonstrăm mai întîi că din faptul că x' şi u' verifică condiţiile (i) şi (ii) rezultă că sînt verificate condiţiile (3.2)—(3.4).

Într-adevăr deoarece $x' \in E(b')$ rezultă că relaţia (3.3) are loc. Acum din (3.3) şi din faptul că u' este nedescrescătoare, se obţine relaţia:

$$u'(g(x')) \leqslant u'(b'). \tag{4.1}$$

Să presupunem că nu are loc (3.4) adică:

$$u'(g(x')) \neq u'(b'). \tag{4.2}$$

Atunci din (4.1) şi (4.2) rezultă că are loc relaţia:

$$u'(g(x')) < u'(b'). \tag{4.3}$$

Dar adunînd la stînga în ambii membrii ai inegalităţii (4.3) $f(x') - u'(b')$ se obţine:

$$f(x') - u'(b') + u'(g(x')) < f(x')$$

inegalitate care contrazice (ii), adică faptul că u' este soluţie pentru problema P5, deoarece există $b = g(x') \in B$ şi $x'' = x' \in S(b)$ astfel încît relaţia (3.9) nu are loc.

Prin urmare, are loc egalitatea

$$u'(g(x')) = u'(b').$$

Să demonstrăm acum că $x' \in L(u')$. Presupunem contrarul, adică există $x^\circ \in D$ astfel încît:

$$f(x') - u'(g(x')) < f(x^\circ) - u'(g(x^0)). \tag{4.5}$$

Din (4.5) rezultă că $u'(g(x^\circ)) \in Z$.

Acum, dacă ţinem seamă de egalitatea (3.4) (care s-a arătat că are loc) adunînd la dreapta $u'(g(x^0))$ în ambele părţi ale inegalităţii (4.5) se obţine:

$$f(x') - u'(b') + u'(g(x^0)) < f(x^0),$$

inegalitate care contrazice condiţia (ii), deoarece există $b^0 = g(x^0) \in B$ şi $x'' = x^0 \in S(b^\circ)$ astfel încît (3.9) nu are loc. Prin urmare $x' \in L(u')$ şi deci $[x', u']$ este soluţie pentru problema P3.

Să demonstrăm, că dacă cuplul $[x', u']$ este soluţie pentru problema P3 atunci condiţiile (i) şi (ii) sînt verificate de x' şi u'.

Presupunem că $x' \notin E(b')$. Aceasta înseamnă că există un element $x^\circ \in S(b')$ astfel încît:

$$f(x') < f(x^0). \tag{4.6}$$

Pe de altă parte, ţinînd seama de (3.3)—(3.4) şi de faptul că u' este nedescrescătoare se obţine:

$$u'(g(x^0)) \leqslant u'(b') = u'(g(x')). \tag{4.7}$$

Dar din (4.6) şi (4.7) rezultă inegalitatea

$$f(x') - u'(g(x')) < f(x^0) - u'(g(x^0)),$$

care contrazice (3.2). Rezultă deci că $x' \in E(b')$.

Mai rămîne de demonstrat că dacă $[x', u']$ este soluţie pentru problema P3, atunci u' este soluţie pentru problema P5. Să presupunem că u' nu este soluţie pentru problema P5. Atunci există $b \in B$ şi $x'' \in S(b)$ încît:

$$f(x') - u'(b') + u'(b) < f(x''). \tag{4.8}$$

Dar pentru că $x'' \in S(b)$ şi $u' \in M$ rezultă că:

$$u'(g(x'')) \leqslant u'(b). \tag{4.9}$$

Acum dacă se ţine seamă de (3.4) şi (4.9), din (4.8) rezultă că

$$f(x') - u'(g(x')) < f(x'') - u'(g(x''))$$

inegalitate ce contrazice (3.2). Deci u' este soluţie pentru problema P5.

TEOREMA 2. *Cuplul $[x', u']$ este soluţie pentru problema P3 dacă şi numai dacă (x', u') este punct şea pentru operatorul H.*

Demonstraţie. Vom demonstra mai întîi că dacă $[x', u']$ este soluţie pentru problema P3, atunci (x', u') este punct şea pentru H. Într-adevăr, pentru că $x' \in L(u')$ rezultă că:

$$f(x') - u'(g(x')) \overline{<} f(x) - u'(g(x)) \tag{4.10}$$

oricare ar fi $x \in D$ şi deoarece $u(b') \in Z$, din (4.10) se obţine relaţia:

$$f(x') - u'(g(x')) + u'(b') \overline{<} f(x) - u'(g(x)) + u'(b')$$

sau altfel scris:

$$H(x', u') \overline{<} H(x, u')$$

oricare ar fi $x \in D$. Deci condiţia (3.6) este verificată.

Pentru a arăta că (3.7) este îndeplinită procedăm prin reducere la absurd. Deci presupunem că există $u'' \in U$ astfel încît:

$$H(x', u'') < H(x', u'),$$

sau

$$f(x') - u''(g(x')) + u''(b') < f(x') - u'(g(x')) + u'(b'),$$

de unde rezultă, adunînd la stînga — $f(x')$, inegalitatea:

$$-u''(g(x')) + u''(b') < -u'(g(x')) + u'(b'). \tag{4.11}$$

Dar pentru că:

$$-u''(g(x')) + u''(b') \geqslant 0$$

rezultă din (4.11) că are loc inegalitatea:

$$0 < -u'(g(x')) + u'(b'),$$

care contrazice condiţia (3.4). Prin urmare (3.7) are loc.

Mai rămîne, de verificat condiţia (3.8). Pentru aceasta este suficient să se arate că deoarece:

$$u'(b') = u'(g(x'))$$

rezultă că:

$$H(x', u') = f(x')$$

şi pentru că $f(x')$ este element din Z, evident şi $H(x', u')$ aparţine lui Z.

Vom demonstra acum că dacă (x', u') este punct şea pentru H, atunci $[x', u']$ este soluţie pentru problema P3. Într-adevăr din (3.6) rezultă că $x' \in L(u')$. Să arătăm acum că $g(x') \leqslant_Y b'$. Din (3.7) şi (3.8) rezultă că:

$$-u'(g(x')) + u'(b') \in Z. \tag{4.12}$$

De asemenea deoarece Z este un grup ordonat dirijat, $Z^+ \neq \emptyset$ şi are loc (4.12), rezultă că există în Z cel puţin un element z_0 care verifică inegalităţile:

$$z_0 > -u'(b') + u'(g(x')) \tag{4.13}$$
$$z_0 > 0.$$

Presupunem acum că $g(x') \overline{\leqslant}_Y b'$. Atunci deoarece mulţimea U conţine o submulţime separatoare rezultă că există o funcţie $u'' \in U$ astfel încît elementele $g(x')$ şi b' sînt z_0-separate prin u'', unde z_0 verifică (4.13).

Luînd în (3.7) $u = u''$ se obţine relaţia:

$$f(x') - u'(g(x')) + u'(b') \overline{>} f(x') - u''(g(x')) + u''(b')$$

sau

$$-u'(g(x')) + u'(b') \overline{>} - u''(g(x')) + u''(b'). \tag{4.14}$$

Dar, deoarece $g(x')$ şi b' sînt z_0—separate prin u'', are loc inegalitatea:

$$-u''(b') + u''(g(x')) \geqslant z_0$$

sau

$$-u''(g(x')) + u'(b') \leqslant - z_0. \tag{4.15}$$

Din (4.14) şi (4.15) se obţine însă relaţia:

$$-u'(g(x')) + u'(b') \overline{>} - z_0,$$

care este în contradicţie cu (4.13). Deci $g(x') \leqslant_Y b'$.

Mai trebuie demonstrat că:

$$u'(b') = u'(g(x')).$$

Deoarece $u' \in M$ şi pentru că $g(x') \leqslant_Y b'$ rezultă că:

$$u'(g(x')) \leqslant u'(b').$$

Să presupunem că:

$$u'(g(x')) < u'(b').$$

Atunci adunînd la stînga în ambele părţi ale inegalităţii $-u'(g(x'))$, se obţine:

$$-u'(g(x')) + u'(b') > 0 \tag{4.16}$$

Pe de altă parte condiţia (3.7) revine la faptul că pentru orice $u \in U$ are loc relaţia:

$$f(x') - u'(g(x')) + u'(b') \overline{>} f(x') - u(g(x')) + u(b'), \tag{4.17}$$

şi deoarece $\theta \in U$ relaţia (4.17) are loc şi pentru $u = \theta$, cînd devine:

$$-u'(g(x')) + u'(b') \overline{>} 0. \tag{4.18}$$

Dar (4.18) este în contradicţie cu (4.16). Rezultă deci că:

$$u'(g(x')) = u'(b').$$

Din teoremele 1 şi 2 rezultă următoarele corolare.

C o r o l a r u l 1. Dacă (x', u') este punct şea pentru H atunci x' este soluţie pentru problema P1.

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă (x', u') este punct şea pentru H atunci din teorema 2 rezultă că $[x', u']$ este soluţie pentru problema P3. Atunci din teorema 1 se obţine că x' este soluţie pentru problema P1.

Acum luînd în problemele P3, P4 şi P5 mulţimea $U = M(b')$, în corolarul 2 se va arăta că mulţimea $M(b')$ este suficient de largă pentru a permite caracterizarea soluţiilor problemei P1 cu ajutorul punctelor şea a operatorului H fără a pune condiţii suplimentare asupra funcţiilor f şi g.

C o r o l a r u l 2. Un element $x' \in D$ este soluţie pentru problema P1 dacă şi numai dacă există un element $u'(u' \in M(b'))$ astfel încît (x', u') să fie punct şea pentru H.

Demonstraţie. Deoarece în corolarul 1 s-a arătat deja că dacă (x', u') este punct şea pentru H atunci x' este soluţie pentru problema P1, mai rămîne de demonstrat numai că din $x' \in E(b')$ rezultă că există $u' \in M(b')$ astfel încît (x', u') este punct şea pentru H. Mai mult, din teoremele 1 şi 2 rezultă că este suficient să se arate că există $u' \in M(b')$ care să fie soluţie pentru problema P5.

Într-adevăr, deoarece $x' \in E(b')$, are loc inegalitatea:

$$g(x') \leqslant_Y b',$$

de unde rezultă că $b' \in B$. Deci problema P5 are sens.

Fie $u' = u_0$, unde

$$u_0(y) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad y \leqslant_Y b' \\ z' & \text{dacă} \quad y \not\leqslant_Y b'. \end{cases}$$

Se poate arăta că $u_0 \in M(b')$. Vom demonstra în continuare că u_0 este soluţie pentru problema P5. Pentru aceasta trebuie să se arate că pentru orice $x \in E(b')$ are loc relaţia :

$$f(x) - u_0(b') + u_0(b) \not< f(x'') \tag{4.19}$$

oricare ar fi $b \in B$ şi $x'' \in S(b)$.

Într-adevăr, dacă $b \leqslant_Y b'$, atunci, deoarece $u_0(b) = u_0(b') = 0$, relaţia (4.19) se reduce la următoarea relaţie :

$$f(x) \not< f(x''). \tag{4.20}$$

Dar relaţia (4.20) se constată uşor că este adevărată dacă ţinem seama de faptul că $x'' \in S(b) \subset S(b')$ (pentru că $b \leqslant_Y b'$) şi $x \in E(b')$.

În cazul cînd $b \not\leqslant_Y b'$, relaţia (4.19) se reduce la :

$$f(x) + z' \not< f(x''),$$

realţie care se vede că este adevărată totdeauna, deoarece $f(x)$ şi $f(x'')$ sînt elemente din Z.

Prin urmare u_0 este soluţie pentru problema P5, şi deci (x', u') este punct şea pentru H.

Prin teorema următoare se stabileşte o legătură între problema $P(b)$ şi problema P2.

TEOREMA 3. *Dacă $x' \in L(u)$, atunci x' este soluţie pentru orice problemă* P(b), *pentru care b verifică condiţiile:*

$$g(x') \leqslant_Y b, \tag{4.20}$$

$$u(b) = u(g(x')). \tag{4.21}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, pentru că $x' \in L(u)$, pentru orice $x \in D$, are loc relaţia :

$$(x') - u(g(x'))f \not< f(x) - u(g(x)). \tag{4.22}$$

Acum, deoarece există un element $x^0 \in D$ astfel încît $u(g(x^0)) \in Z$, din (4.22) rezultă că :

$$u(g(x')) \in Z. \tag{4.23}$$

Să presupunem acum că teorema nu este adevărată. Aceasta înseamnă că există $b'' \in B$ astfel încît

$$g(x') \leqslant_Y b''$$

$$u(b'') = u(g(x')) \tag{4.24}$$

şi x' nu este soluţie pentru P(b''). Adică există $x'' \in S(b'')$ încît are loc inegalitatea :

$$f(x') < f(x''). \tag{4.25}$$

Acum, deoarece $x'' \in S(b'')$ $(g(x'') \leqslant_Y b'')$ şi pentru că $u \in M$, se obţine inegalitatea :

$$u(g(x'')) \leqslant u(b''),$$

de unde, ţinînd seamă de (4.23) şi (4.24), rezultă inegalitatea :

$$u(g(x'')) \leqslant u(g(x')). \tag{4.26}$$

Dar din (4.25) şi (4.26) se obţine:

$$f(x') - u(g(x')) < f(x'') - u(g(x''))$$

inegalitate care contrazice relaţia (4.22). Deci x' este soluţie pentru orice problemă P(b), pentru care b verifică condiţiile (4.20) şi (4.21).

SUR LA FONCTION DE LAGRANGE GÉNÉRALISÉE POUR LE PROBLÈME D'OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES

RÉSUMÉ

Dans ce travail, en utilisant une fonction de Lagrange généralisée, on étend certains résultats de [1], [2], [3] sur les multiplicateurs de Lagrange généralisés pour la programmation non linéaire, au problème $P(b)$ et aussi on généralise les résultats de [4] obtenus pour le cas $Z = R$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Evans, J. P., Gould, F. J., Howe, S. M., *A note on extended GLM*, Opns. Res., **19**, 4, 1079–1080 (1971).
[2] Everett, H., *Generalized Lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources*, Opns. Res., 11, 399–417 (1963).
[3] Gould, F. J., *Extensions of Lagrange multiplier in nonlinear programming*, SIAM J, Appl. Math., **17**, *6*, 1280–1297 (1969).
[4] Tigan, I, S., *Sur la fonction de Lagrange généralisée pour les problèmes d'optimisation*, SEMA (Metra International) Note de travail **152**, Juin 1971.

Institutul de calcul din Cluj al Academiei Republicii Socialiste România

Primit la 9. XII. 1972.