REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola 1, 1974, pp. 19—30

OBSERVAŢII ASUPRA DIFERENŢELOR DIVIZATE ŞI ASUPRA METODEI COARDEI

de

M. BALÁZS şi G. GOLDNER
(Cluj)

1. Introducere

Lucrarea de faţă îşi propune prezentarea unor rezultate ale discuţiilor autorilor asupra lucrărilor proprii precum şi ale altor autori privind diferenţele divizate şi metoda coardei. După expunerea cîtorva definiţii comentate şi a unor proprietăţi uzuale ale diferenţelor divizate [3], [29—30] se prezintă rezultatele autorilor referitoare la existenţa diferenţelor divizate [2], precum şi cele privind legătura între diferenţele divizate şi derivate Fréchet. Pe baza acestor observaţii autorii încearcă o reconsiderare a rezultatelor şi cercetărilor de diferenţe divizate şi de metoda coardei.

2. Diferenţe divizate şi unele proprietăţi ale lor.

Să considerăm aplicaţia $P: X \rightarrow Y$, unde X, Y sînt spaţii vectoriale, iar Hom (X, Y) mulţimea tuturor aplicaţiilor liniare definite pe X şi cu valori în Y.

D e f i n i ţ i a 2. 1. [2] *Aplicaţia* $[u,v,;P] \in$ Hom (X,Y) *se numeşte diferenţă divizată a aplicaţiei* P *în nodurile distincte* u *şi* $v \in X$, *dacă*

$$(1) \qquad [u, v; P](u - v) = P(u) - P(v).$$

Să observăm că dacă $u = v$, atunci egalitatea (1) are loc pentru orice aplicaţie din Hom (X,Y) alegerea diferenţei divizate în noduri confundate este o aplicaţie liniară arbitrară, dar cum se va vedea mai tîrziu, în anumite cazuri ea este precizată de condiţiile impuse.

Fie în continuare X, Y spaţii vectoriale topologice, iar $\mathfrak{L}(X,Y)$ mulţimea tuturor aplicaţiilor liniare şi continue definite pe X şi cu valori în Y.

Definiţia 2. 2. [27]. *Aplicaţia* $[u, v; P] \in \mathfrak{L}(X, Y)$ *se numeşte diferenţă divizată a aplicaţiei* P *în nodurile* $u, v \in X$, *dacă* $[u, v; P]$ *verifică* (1).

În cazul cînd X, Y sînt spaţii vectoriale normate, definiţia 2.2. a fost completată de diferiţi autori în funcţie de scopul urmărit de ei.

Definiţia 2. 3. [22—23]. *Aplicaţia* $[u, v; P] \in \mathfrak{L}(X, Y)$ *este diferenţă divizată a aplicaţiei* P *în nodurile* u, v, *dacă* $[u, v; P]$ *verifică condiţia* (1) *şi pentru orice* $u, v, w \in X$

$$(2) \qquad \|[u, v; P] - [v, w; P]\| < a\|u - w\| + b\|u - v\| + b\|v - w\|,$$

iar în cazul existenţei derivatei Fréchet

$$(3) \qquad \|[u, v; P] - P'(u)\| \leqslant (a + b)\|u - v\|.$$

În legătură cu această definiţie menţionăm că pe baza punctului 4 al acestei lucrări se poate arăta faptul că relaţia (2) implică atît existenţa derivatei Fréchet cît şi îndeplinirea condiţiei (3).

Definiţia 2. 4. [25]. *Aplicaţia* $[u, v; P] \in \mathfrak{L}(X, Y)$ *se numeşte diferenţă divizată a aplicaţiei* P *în nodurile* $u, v \in X$, *dacă verifică condiţia* (1) *şi*

$$(4) \qquad [u, v; P] = [v, u; P] \quad (\textit{simetrie})$$

pentru orice $u, v \in X$.

În legătură cu această definiţie observăm că orice operator are o diferenţă divizată simetrică [3].

Definiţia 2. 5. [4].*Aplicaţia* $[u, v; P] \in \mathfrak{L}(X, Y)$ *dată de formula*

$$[u, v; P] = \int_0^1 P'[v + t(u - v)]\,dt$$

integrala fiind considerată în sens Riemann, este o diferenţă divizată a aplicaţiei P *în nodurile* $u, v \in X$.

Se constată că găsirea efectivă a diferenţei divizate în acest caz necesită calculul derivatei Fréchet a aplicaţiei şi a unei integrale ceea ce complică calculele, lucru asupra căruia vom reveni în cadrul punctului 5.

În cele ce urmează vom înşira cîteva proprietăţi uzuale ale diferenţelor divizate [3].

TEOREMA 2. 1. *Dacă* $[u, v; P]$ *şi* $[u, v; Q]$ *sînt diferenţe divizate (definiţia* 2.1.) *pentru aplicaţia* P, *respectiv* Q, *atunci* $[u, v; P + Q] = [u, v; P] + [u, v; Q]$.

TEOREMA 2. 2. *Dacă* L *este o aplicaţie liniară, atunci* $[u, v; L] = L$ *pentru orice* $u, v \in X$.

TEOREMA 2. 3. *Dacă* $[u, v; P_1], [u, v; P_2], \ldots, [u, v; P_n]$ *sînt diferenţe divizate ale aplicaţiilor* P_i, $i = \overline{1, n}$ *iar* M *este o aplicaţie* n *— liniară, atunci*

$$[u, v; M(P_1, P_2, \ldots, P_n)] = \sum_{i=1}^{n} M(P_1(v), \ldots, P_{i-1}(v), [u, v; P_i], P_{i+1}(u), \ldots, P_n(u))$$

este diferenţă divizată a aplicaţiei $M(P_1 P_2, \ldots, P_n)$.

TEOREMA 2. 4. *Dacă* $[u, v; P]$ *şi* $[P(u), P(v); Q]$ *sînt diferenţe divizate ale aplicaţiilor* $P: X \to Y$, *respectiv* $Q; P(X) \to Z$, *atunci aplicaţia*

$$[u, v; Q \circ P] = [P(u), P(v); Q] \circ [u, v; P]$$

este diferenţă divizată a aplicaţiei $Q \circ P$ *în nodurile* u *şi* v.

3. Existenţa diferenţelor divizate

În lucrarea noastră [2] ne-am ocupat de stabilirea existenţei diferenţelor divizate a unei aplicaţii. Teoremele date în această lucrare constituie de fapt cazuri particulare ale unor teoreme cunoscute de prelungire a aplicaţiilor liniare fie în spaţii vectoriale, fie în spaţii vectoriale topologice sau chiar normate.

TEOREMA 3.1. *Pentru orice aplicaţie* $P: X \to Y$, *unde* X, Y *sînt spaţii vectoriale, există o diferenţă divizată* $[u, v; P]$ *în oricare noduri* $u, v \in X$.

Exemplu 3. 1. Fie $X = s$ mulţimea şirurilor, de numere reale dotată cu structura liniară uzuală, Y un spaţiu vectorial real oarecare şi $P: s \to Y$ o aplicaţie.

Dacă $u = v$, atunci considerăm $[u, v; P] = L$, unde $L \in \mathrm{Hom}(s, Y)$ *arbitrar*.

Fie $u = (u_n)_{n \in N}$, $v = (v_n)_{n \in N}$ două elemente distincte din s şi *fie* $i_0 = \min\{i \in N\ u_i \neq v_i\}$. Notăm cu $x = (x_n)_{n \in N}$, $x \in s$. În acest caz putem considera ca diferenţă divizată aplicată la $x \in s$ a aplicaţiei P în nodurile u şi v

$$[u, v; P](x) = \frac{P(u) - P(v)}{u_{i_0} - v_{i_0}} x_{i_0}.$$

TEOREMA 3.2. *Orice aplicaţie* $P: X \to Y$ *unde* X *este un spaţiu local convex separat şi* Y *un spaţiu vectorial topologic, are diferenţă divizată în oricare noduri* u, v *din* X.

Exemplu 3. 2. Fie $X = l^2 = \{x \in s;\ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty\}$ cu structura liniară şi normată uzuală, Y un spaţiu normat şi aplicaţia $P: l^2 \to Y$. Dacă $u = v$, atunci $[u, v; P] = L$, unde $L \in \mathfrak{L}(l^2, Y)$ arbitrar.

Să considerăm elementele distincte $u = (u_n)_{n \in N}$, $v = (v_n)_{n \in N}$, din l^2 şi un element arbitrar $x = (x_n)_{n \in N}$ din l^2. Atunci

$$[u,\ v;\ P]\,(x) = \frac{P(u) - P(v)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) x_n .$$

TEOREMA 3.3. *Dacă X şi Y sînt spaţii normate, atunci orice aplicaţie $P: X \to Y$ are în oricare două noduri distincte o diferenţă divizată cu norma.*

$$\| [u,\ v;\ P] \| = \frac{\|P(u) - P(v)\|}{\| u - v \|} .$$

Această teoremă arată existenţa în cazul general a unor diferenţe divizate care prezintă analogie cu diferenţele divizate în cazul funcţiilor reale (complexe) de o variabilă reală (complexă).

În mod natural urmează să ne punem problema cardinalului mulţimii diferenţelor divizate ce se pot ataşa la două noduri distincte. Evident că în general diferenţa divizată în două noduri distincte fixate nu este unică [1].

E x e m p l u 3.3. Fie $X = R^n$, $Y = R$, $P(x) = f(x^1,\ x^2, \ldots, x^n)$,

$$u = (u^1, u^2, \ldots,\ u^n),\ v = (v^1,\ v^2, \ldots, v^n).$$

Notînd

$$[u^i,\ v^i;\ f(x^1, \ldots, x^n)] = \frac{f(\cdots, u^i, \cdots) - f(\cdots, v^i \cdots)}{u^i - v^i}\ ,\ i = \overline{i, n},$$

o diferenţă divizată va fi matricea linie:

$$[u, v;\ P] = ([u^i, v^i; f(v^1, \ldots, v^{i-1}, x^i, u^{i+1}, \ldots, u^n)])_{i=\overline{1,n}} .$$

Matricea linie

$$[u, v;\ P]_1 = ([u^i, v^i; f(u^1, \ldots, u^{i-1}, x^i, v^{i+1}, \ldots, v^n)])_{i=\overline{1,n}},$$

va fi o altă diferenţă divizată.

În cazul unei aplicaţii $P: R^m \to R^p$ putem preciza numărul diferenţelor divizate în nodurile distincte fixate $u, v \in R^m$. Aceasta ne conduce la o problemă de interpolare lineară.

TEOREMA 3.4 *Fie X un spaţiu vectorial n dimensional, Y un spaţiu vectorial p dimensional $(x_i)_{i=\overline{1,n}}$ elemente liniar idependente din X şi $(y_i)_{i=\overline{1,n}}$ elemente nu toate nule din Y.* Atunci

1) *există $L_\alpha \in \mathfrak{L}(X, Y)$, $\alpha \in A$ unde A este o familie oarecare de indici, cu proprietatea că $L_\alpha(x_i) = y_i$, pentru orice $i = \overline{1, n}$ şi orice $\alpha \in A$;*

2) dim $(sp\,((L_\alpha)_{\alpha \in A})) = p\,(m - n) + 1$ *unde* sp $((L_\alpha)_{\alpha \in A})$ *este învelitoarea liniară a mulţimii $(L_\alpha)_{\alpha \in A}$.*

Demonstraţie. Să considerăm aceea bază algebrică a spaţiului X, care conţine elementele $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$, adică

$$X = \mathrm{sp}\,(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}, \ldots,\ x_m)$$

şi fie $x_j^* \in X^*$, $j = \overline{1, n}$ definite pe bază prin

$$x_j^*(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } i = j \\ 0 \text{ dacă } i \neq j,\ i = \overline{1, n} \\ b_{ij} \text{ dacă } i = \overline{n+1, m}, \end{cases}$$

b_{ij} fiind numere arbitrare. Atunci o aplicaţie L_α, poate fi scrisă sub forma

$$L_\alpha(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x)\, y_j$$

şi evident $L_\alpha(x_i) = y_i$ pentru $i = \overline{1, n}$.

Fie acum $Y = \mathrm{sp}\,(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ unde $e_i = (\delta_{ij})_{j=\overline{1,p}}$,

$$i = \overline{1, p} \text{ iar } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } i \neq j \\ 1 \text{ dacă } i = j. \end{cases}$$

Atunci $y_i = \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_{ij} e_j$ şi deci orice aplicaţie $L_\alpha \in \mathfrak{L}(X, Y)$ care verifică proprietatea 1) poate fi scrisă ca o combinaţie liniară de matrici cu p linii şi m coloane

$$L_\alpha = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,m}}} + \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=n+1}^{m} c_{lk}^{(\alpha)} (b_{ij}^{lk})_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,m}}},$$

unde

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} \text{ pentru } j = \overline{1, n} \\ 0 \text{ pentru } j = \overline{n+1, m} \end{cases}$$

$$b_{ij}^{lk} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } i = l \text{ şi } j = k \\ 0 \text{ pentru } i \neq l \text{ sau } j \neq k. \end{cases}$$

Cum toate matricile care intervin în membrul drept sînt liniar independente, ele fiind în număr de $p\,(m - n) + 1$ rezultă proprietatea.

Luînd în această teoremă $n = 1$, $x_1 = u - v$, $y_1 = P(u) - P(v)$ obţinem

TEOREMA 3.5. *Orice aplicaţie P definită pe spaţiul m dimensional X cu valori în spaţiul p dimensional Y are $p\,(m - 1) + 1$ diferenţe divizate liniar independente în oricare două noduri distincte u şi v pentru care $P(u) \neq P(v)$.*

Observaţie. *Se poate astfel constata că în cazul spaţiilor finit dimensionale nenule, diferenţa divizată în nodurile distincte u şi v pentru care* $P(u) \neq P(v)$, *este unică dacă şi numai dacă* $\dim X = \dim Y = 1$.

4. Diferenţe divizate si derivata Fréchet

Pornind de la cazul funcţiilor reale de o variabilă reală mai mulţi autori au fost preocupaţi de legarea noţiunii de diferenţă divizată cu derivata Fréchet [32]. În acest sens A. S. SERGEEV [26] postulează în definiţia pe care o propune condiţia

$$\frac{d}{dt}\{y^*[([u+t(v-u),u;\ P](t(x-u))]\} = y^*(P'(u+t(v-u))(x-u)),$$

unde $y^* \in Y^*$, $t \in R$, *iar* P' este derivata Fréchet.

În general nu cunoaştem condiţii necesare sau suficiente pentru ca această condiţie să fie satisfăcută pentru o diferenţă divizată.

O conexiune mai naturală între diferenţa divizată şi derivata Fréchet este postulată tot în cadrul unei definiţii de către S. Ulm [29—30]:

$$[x, x;\ P] = P'(x),$$

dacă $P'(x)$ există.

În cele ce urmează vom prezenta cîteva condiţii suficiente pentru existenţa derivatei Fréchet ca limită a unor diferenţe divizate.

TEOREMA 4.1. *Dacă există* $L \in \mathfrak{L}(X,Y)$ *astfel încît* $L = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [x, x + \Delta x;\ P]$ *în topologia mărginirii uniforme, atunci există* $P'(x)$ *şi* $P'(x) = L$.

Demonstraţie. L. fiind limita lui $[x, x+\Delta x;\ P]$ cînd $\Delta x \to 0$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încît din $\|\Delta x\| < \delta$ rezultă

$$\|[x, x+\Delta x;\ P] - L\| < \varepsilon.$$

Din definiţia diferenţei divizate avem

$$P(x+\Delta x] - P(x) - [x, x+\Delta x;\ P](\Delta x) = 0,$$

pentru orice Δx. De aici rezultă că pentru $\|\Delta x\| < \delta$ avem

$$\|P(x+\Delta x) - P(x) - L\Delta x\| = \|([x, x+\Delta x;\ P] - L)\Delta x\| \leqslant$$
$$\leqslant \|[x, x+\Delta x;\ P] - L\| \cdot \|\Delta x\| < \varepsilon\|\Delta x\|.$$

Această inegalitate împreună cu unicitatea derivatei Fréchet implică

$$L = P'(x).$$

Această teoremă generalizează teoremele lui V. M. CERNÎŞENKO [6] şi G. GOLDNER [10].

TEOREMA 4.2. [6] *Dacă diferenţa divizată* $[u, v;\ P]$ *este definită într-un domeniu oarecare* $D \subset X \times X$ *şi aplică continuu pe* $D \times D$ *în* $\mathfrak{L}(X, Y)$, *atunci există* $P'(x)$ *pentru orice* $x \in D$ *şi* $P'(x) = [x, x;\ P]$.

TEOREMA 4.3. [10]. *Fie X un spaţiu normat real, Y un spaţiu Banach real şi* $P: X \to Y$. *Dacă P are o diferenţă divizată cu proprietatea*:

$$\|[u, x;\ P] - [v, x;\ P]\| \leqslant M\|u - v\|,$$

pentru orice $u, v, w \in X$, *atunci*:

1) *există* $P'(x)$ *pentru orice* $x \in X$,
2) $\lim\limits_{u \to x} [u, x;\ P] = P'(x)$.

În cazul diferenţelor divizate simetrice această teoremă este o consecinţă a teoremei 4.2.

Se poate formula în acest cadru şi o problemă inversă, adică existenţa unor diferenţe divizate care să aibă ca limită derivata Fréchet în cazul existenţei acesteia. Această problemă are o soluţie evidentă în cazul aplicaţiilor $P: R^n \to R^m$. În cazul spaţiilor de dimensiune infinită problema are deocamdată o soluţie parţială.

TEOREMA 4.4. [10]. *Dacă* $P: X \to Y$, X, Y *fiind spaţii normate, este continuu derivabil Fréchet în orice punct* $x \in X$, *atunci există o diferenţă divizată cu proprietatea*

$$\lim_{u \to x} [x, u;\ P] = P'(x).$$

5. Despre metoda coardei

Fie ecuaţia $P(x) = 0$, unde $P: X \to Y$ este o aplicaţie a spaţiului Banach X în spaţiul Banach Y. Pentru rezolvarea acestei ecuaţii L. V. KANTOROVICI [17] generalizează cunoscuta metodă a lui Newton, obţinînd soluţia ecuaţiei cu ajutorul şirului $(x_n)_{n \in N}$ dat de formula

$$\text{(N)} \qquad x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1} P(x_n),$$

unde $P'(x_n)$ este derivata Fréchet în punctul x_n. Atît L. V. KANTOROVICI cît şi alţi continuatori ai acestei idei, cum ar fi I. FENYŐ [8], I. P. MÎOVSKI [18], R. H. MOORE [19], J. M. ORTEGA [20], V. A. VERTHEIM [33], B. JANKÓ şi M. BALÁZS [16], şi alţii au dat condiţii suficiente pentru existenţa soluţiei, pentru unicitatea ei, şi pentru convergenţa şirului de mai sus către această soluţie, obţinîndu-se ordinul de convergenţă doi.

În analogie cu generalizarea dată de Kantorovici a metodei lui Newton, numeroşi autori s-au ocupat de o metodă în care în locul derivatei Fréchet au folosit diferenţele divizate, obţinînd o metodă pe care au numit-o metoda coardei:

$$\text{(C)} \qquad x_{n+1} = x_n - [x_n,\ x_{n-1}\,;\ P]^{-1}(x_n).$$

Pentru obţinerea unor condiţii suficiente analoge cu cele amintite în cazul metodei Newton—Kantorovici se impun condiţii asupra diferenţelor divizate de ordinul întîi şi doi ale aplicaţiei P. Astfel se presupune uniform mărginirea diferenţei divizate de ordinul doi a lui P într-o sferă. Această ipoteză apare printre altele în lucrările [11], [25], [29]. În alte lucrări se presupune că diferenţele divizate de ordinul întîi verifică o condiţie de tip Lipschitz [25], [22—23], [16] sau uniform continuitatea lui $[u, v\,;\,P]: X \times X \to \mathfrak{L}(X, Y)$ [21] tot într-o sferă.

Din paragraful precedent rezultă că toate aceste ipoteze garantează existenţa derivatei Fréchet în sfera în care ele au loc. Se pune atunci problema în ce măsură este utilă folosirea diferenţelor divizate în construirea metodelor iterative de rezolvare a ecuaţiilor operaţionale în spaţii Banach, din moment ce ele furnizează metode cu ordin mai mic de convergenţă decît cele obţinute cu ajutorul derivatelor Fréchet.

În lucrarea de faţă nu ne propunem elucidarea difinitivă şi completă a acestei probleme, intenţionăm doar să prezentăm cîteva opinii asupra eventualei aplicabilităţi a acestor metode în diferite cazuri în lumina modificărilor dictate în concepţia noastră de către observaţiile precedente.

Trebuie să observăm că în cazul spaţiilor Banach aplicabilitatea metodei coardei nu implică teoretic aplicabilitatea metodei Newton—Kantorovici,deşi după cum am văzut mai sus condiţiile impuse diferenţelor divizate pentru convergenţa metodei coardei implică existenţa derivatei Fréchet. Acest lucru se datoreşte faptului că din injectivitatea diferenţelor divizate nu rezultă injectivitatea derivatei Fréchet. Menţionăm că această problemă s-ar clarifica dacă s-ar construi un exemplu de ecuaţie în cazul căreia sînt îndeplinite condiţiile de aplicabilitate a metodei coardei, iar derivata Fréchet nu este inversabilă în nici un punct dintr-o anumită vecinătate a soluţiei. Pînă în momentul de faţă autorii n-au reuşit să construiască şi n-au întîlnit în materialul bibliografic studiat un astfel de exemplu.

O altă justificare a utilizării metodei coardei este aceea că în unele cazuri calculul diferenţelor divizate revine la operaţii cu valorile aplicaţiei, care oricum trebuie calculate la aplicarea metodelor iterative, fără a introduce valorile unei alte aplicaţii cum ar fi derivata Fréchet. Rămîne de văzut în fiecare caz concret dacă evitarea eventualelor calcule complicate de folosirea derivatei Fréchet, care necesită utilizarea unei subrutine în calculator, justifică mişcorarea rapidităţii de convergenţă prin aplicarea metodei coardei. De asemenea, există cazuri, cînd în construirea diferenţei divizate nu se utilizează valorile aplicaţiei şi se obţin expresii mai complicate decît pentru derivata Fréchet.

Exemplul 5.1. Fie D $\subset R^2$ un compact, şi $P : C^1(D) \to R$ definită prin

$$P(u) = \iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) dx\, dy.$$

În acest caz se poate verifica uşor că $P'(u) \in \mathfrak{L}(C^1(D),\ R)$ dată prin

$$P'(u)\ \cdot = 2 \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \cdot}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \cdot}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, dy$$

este derivata Fréchet a aplicaţiei P în punctul u, iar $[u, v\,;\,P] \in \mathfrak{L}(C^1(D), R)$ dată prin

$$[u, v\,;\,P]\ \cdot = \iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \cdot}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial \cdot}{\partial y}\right) dx\, dy$$

este diferenţă divizată a aplicaţiei în punctele u şi v.

În cazul spaţiilor Fréchet însă aplicarea metodei coardei este deocamdată justificată. În aceste spaţii pe care le-a numit super metrice complete, L. COLLATZ [7] întroduce metoda lui Newton—Kantorovici, dar pentru a obţine formula lui Taylor utilizează o axiomă suplimentară obţinînd aşa numitele spaţii L-supermetrice.

D e f i n i ţ i a 5.1. [7]. *Spaţiul vectorial topologic real X. cu topologia dată de o metrică ρ invariantă faţă de translaţii se numeşte L-supermetric dacă oricare ar fi $x \in X$, există o funcţieonală liniară şi mărginită L_x cu $\| L_x \| = 1$ şi $L_x(x) = \rho(0, x)$.*

În legătur cu aceste spaţii are loc următoarea

TEOREMA 5.1. [9]. *Spaţiul supermetric X este normat prin norma dată de $\| \cdot \| = \rho\,(0, \cdot\,)$, dacă şi numai dacă X este un spaţiu L-supermetric.*

Această propoziţie arată de fapt că în condiţiile specifice spaţiilor Fréchet nu se poate deocamdată demonstra convergenţa metodei lui Newton—Kantorovici deoarece fără formula lui Taylor nu pot fi făcute delimitările necesare care intervin în demonstraţii. Astfel este pe deplin motivat studiul efectuat asupra metodei coardei în aceste spaţii. Menţionăm în acest sens rezultatele obţinute de S. GROZE, B. JANKÓ şi G. GOLDNER [12—15].

Considerăm că o posibilitate importantă de aplicarea metodei coardei apare în spaţiile local convexe ordonate. În aceste spaţii există rezultate referitoare la aplicarea metodei NEWTON-KANTOROVICI [31], [24] pentru obţinerea unor şiruri monotone de aproximaţii ale soluţiei unei ecuaţii operaţionale, dîndu-se chiar aplicaţii numerice pentru ecuaţii cu derivate parţiale. În analogie cu cazul funcţiilor reale de o variabilă reală este de aşteptat ca în aceste spaţii, dacă există un şir descrescător de exemplu obţinut prin metoda lui Newton—Kantorovici, să se poată construi prin metoda coardei un şir crescător care aproximează soluţia ecuaţiei studiate. Să observăm că formula (C) nu constituie de fapt o generalizare a metodei

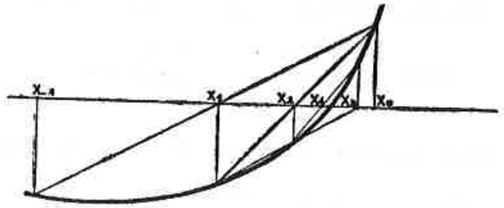

Fig. 1.

coardei cunoscută din cazul funcţiilor reale de o variabilă reală. De altfel, formula (C) nu poate servi la construirea metodei ,,combinate'' sus amintite, deoarece nici pentru cazul real şirul construit cu această formulă nu este monoton (vezi figura 1). Observînd acest lucru, pentru obţinerea unei metode combinate V. M. CERNIŞENKO [5] propune următoarea formulă pentru construirea celor două şiruri (vezi figura 2).

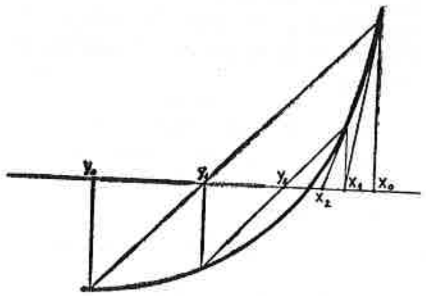

Fig. 2.

(N) $$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1} P(x_n),$$

(C') $$y_{n+1} = y_n - [y_n, x_n;\ P]^{-1} P(y_n).$$

Constatăm că nici această metodă nu generalizează de fapt metoda clasică a coardei. De aceea ne propunem studiul metodei combinate dată de formulele

(N) $$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - [P'(\bar{x}_n)]^{-1} P(\bar{x}_n),$$

(C) $$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - [\underline{x}_n, x_0;\ P]^{-1} P(\underline{x}_n),$$

(CN) $$x_{n+1} = \frac{\underline{x}_{n+1} + \bar{x}_{n+1}}{2}$$

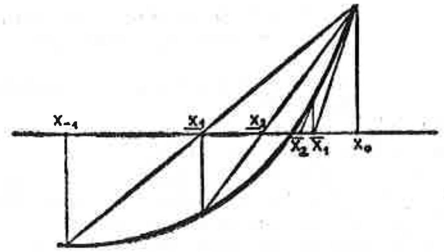

Fig. 3.

(vezi figura 3). Acest studiu şi aplicaţiile metodei pentru rezolvarea aproximativă a unor ecuaţii cu derivate parţiale vor fi conţinute în teza de doctorat al celui de al doilea autor.

REMARKS ON DIVIDED DIFFERENCES AND METHOD OF CHORDS

ABSTRACT

The present paper is an expositorial survey of some results on divided differences and metod of chords. After disscutions on some definitions and properties of the divided differences [3], [29—30], the results of the authors on the existence of divided difference [2] and on its connection with Fréchet derivatives are presented. Based on this results' the authors give some new considerations on the method of chords.

BIBLIOGRAFIE

[1] Balázs, M., *On the divided differences*, sub tipar.
[2] Balázs M. and Goldner G,. *On existence of divided differences in linear spaces*, Rev. d'anal. Num. et de la Théorie de l'approx. **2**, 5—9 (1973),.
[3] Balázs M. şi Goldner G., *Diferenţe divizate în spaţii Banach şi unele aplicaţii ale lor*, St. Cerc. Mat. **7**, 21, pp. 985—996 (1969),.
[4] Belostoţki, A. I. *Cîteva metode de rezolvare a ecuaţiilor funcţionale*, Usp. Mat. Nauk, **XVII**,5(107), 192—193 (1962) (l. rusă)
[5] Cernîşenko, V. M. , *Metoda combinată a metodelor tangentei şi coardei pentru ecuaţii operaţionale*. Vîcis. i Prik. Mat. **10**, 125—130 (1970) (l. rusă).
[6] — *Teoria generală a metodelor de rezolvare a ecuaţiilor funcţionale*, Dnepropetrovsk (1970) (l. rusă).
[7] Collatz L., *Funcţionalanalysis und Numerische Matematik*, Springer, 1965.
[8] Fenyő, *I. Uber die Lösung der im Banachsen-Räume definierten nichtlinearen Gleichungen*, Acta. Math. Hung. **5**, 85—93 (1954).
[9] Goldner G., *Remark on L-Supermetric Spaces*, ZAMM. **52**, 496—497 (1972).
[10] — *,On divided differences and Fréchet derivativee*, sub tipar.
[11] Goldner G. Balázs M., *Asupra metodei coardei şi a unei modificări a ei pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare*, St. Cer. Mat. **7**, 20, 981—990 (1968).

[12] Goldner G. şi Groze S., *Metoda lui Steffensen aplicată la rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare definite în spaţii supermetrice*, St. Cerc. Mat. **5**, 23, 711—717 (1971).
[13] Groze S., *Contribuţii la studiul rezolvării ecuaţiilor operaţionale în spaţii supermetrice*, teză de doctorat, Cluj (1970).
[14] — *Asupra condiţiilor de convergenţă la metoda coardei în spaţii supermetrice*, Stud. Univ. Babeş—Bolyai, **1**, 55—59. (1973).
[15] Groze S., Goldner G,. Jankó B,. *Asupra metodei coardei în rezolvarea ecuaţiilor operaţionale definite în spaţii supermetrice*, St. Cerc. Mat. **23**, 5, 719—725 (1971).
[16] Jankó B. şi Balázs, *Despre metoda coardei pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare în spaţii normate*, St. Cerc. Mat. **10**, 19, 1433—1436 (1967).
[17] Kantorovici, L. V. *Despre metoda lui Newton*, Trud. Mat. Inst. Steklova, **28**, 104—144 (1949) (l. rusă).
[18] Mîsovski, I.P. *Despre convergenta metodei lui Newton*, Trud. Mat. Inst. Steklova, **28**, 145—147, (1949) (l. rusă).
[19] Moore R. H., *Approximations to nonlinear operator equations and Newton's method*, Num. Math. **12**, 23—24 (1968).
[20] Ortega J. M., *The Newton—Kantorovich theorem*, Amer. Math. Monthly, **75**, 6 658—660 (1968).
[21] Potra F. A., *Asupra unor procedee de rezolvare aproximativă a ecuaţiilor operaţionale*, Bul. Stiinţ. Studenţesc, 123—132 (1972).
[22] Schmidt I. W., *Eine Ubertragung der Regula Falsi auf gleichungen in Banchyämen* I, ZAMM. **43**, 1/2, 1—8 (1968).
[23] — *Eine Ubertragungen der Regula Falsi auf Gleichungen in Banachräumen* II, ZAMM. **43**, **3**, 97—110 (1963).
[24] Schryer N. L, *Newton's method for convex nonlinear elliptic boundary value problems*, Numer. Math. **17**, 4(1971).
[25] Sergheev, A. S., *Despre metoda coardei*, Sib. Mat. Jur. II. **2**, 282—289 (1961) (l. rusă).
[26] — *Despre convergenţa unor variante ale metodei coardei*, Sbor. Nauci. Trud. Perskovo. Polit **13**, 43—54 (1963) (l. rusă).
[27] Schröder, J *Nichtlineare Majoranten beim Verfahren der schrittweisen Näherung*, Arch. Math. **7**, 6, 471—484 (1956).
[28] Ulm S., *Metode iterative cu diferenţe divizate de ordinul doi*, D.A.N. **157**, 1, 56—58 (1964) (l. rusă).
[29] — *Despre diferenţe divizate generalizate* I, Eesti Nsv. Tead. Akad. Toim. Füüs. Mat. ja. Tehn. seria **XVI**. 1 13—26, (1967) (l. rusă).
[30] — *Despre diferenţe divizate generalizate*, Idem **XVI**. 2, 146—155 (1967) (l. rusă).
[31] Vandegraft J. S., *Newton's method for convex operators in partially ordered spaces*, Siam Jour. Numer. Anal. **4**, 3, 403—432 (1967).
[32] Veinberg M. M., *Metode variaţionale pentru studiul operatorilor neliniari*, Moskva, 1959. (l. rusă).
[33] Vertheim V. A., *Despre condiţii de aplicabilitate ale metodei lui Newton*, D.A.N. **110**, 5 (1956) (l. rusă).

Universitatea,,Babeş—Bolyai" Cluj, Facultatea de Matematică-Mecanică, Catedra de Analiză

Primit la 17. XII. 1973.