REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola 1, 1974, pp. 31–34

OPERAŢIILE ∨ ŞI ∧ DIN ARITMETICA INTERVALELOR

de

ŞTEFAN N. BERŢI

(Cluj)

În aritmetica intervalelor pe lîngă operaţiile de tip complex $+, -, \cdot$ şi $:$ (definite prin $A \circ B = \{u \circ v | \ u \in A \ \& \ v \in B\}$ se mai introduc şi alte operaţii speciale. În cele ce urmează ne vom fixa atenţia asupra operaţiilor

$$A \wedge B = \begin{cases} [\max a_1, b_1), \min (a_2, b_2)] & \text{dacă } \max (a_1, b_1) \leqslant \min (a_2, b_2) \\ \emptyset & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

şi

$$A \vee B = \{\xi \mid \exists \zeta, \eta : \zeta \in A, \eta B, \ \zeta \leqslant \xi < \eta\}$$

deci

$$A \vee B = \begin{cases} [a_1, b_2] & \text{dacă } a_1 \leqslant b_2 \\ \emptyset & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

TEOREMA. *Dacă $A + (B \vee C)$ şi $(A + B) \vee (A + C)$ sînt ambele mulţimi nevide sau ambele mulţimi vide, atunci*

$$A + (B \vee C) = (A + B) \vee (A + C)$$

iar dacă una din aceste mulţimi este vidă şi cealaltă nevidă, atunci

$$A + (B \vee C) = \emptyset \text{ şi } (A + B) \vee (A + C) \neq \emptyset.$$

Cu alte cuvinte, notînd $S = A + (B \vee C)$ şi $T = (A + B) \vee (A + C)$, avem

$$S = T \vee (S = \emptyset \ \& \ T \neq \emptyset).$$

Demonstraţie. Avem.

$$A+(B\vee C)=[a_1,a_2]+\begin{cases}[b_1,c_2] & \text{dacă } b_1\leqslant c_2\\ \varnothing & \text{dacă } b_1>c_2\end{cases}=\begin{cases}[a_1+b_1,\ a_2+c_2] & \text{dacă } b_1<c_2\\ \varnothing & \text{dacă } b_1>c_2\end{cases}$$

şi

$$(A+B)\vee(A+C)=[a_1+b_1,\ a_2+b_2]\vee[a_1+c_1,\ a_2+c_2]$$

$$=\begin{cases}[a_1+b_1,\ a_2+c_2] & \text{dacă } a_1+b_1\leqslant a_2+c_2\\ \varnothing & \text{în caz contrar.}\end{cases}$$

Dacă $A+(B\vee C)\neq\varnothing$ atunci $b_1\leqslant c_2$ şi astfel $a_1+b_1\leqslant a_2+c_2$, deci în acest caz

$$(A+B)\vee(A+C)\neq\varnothing \text{ şi } (A+(B\vee C))=(A+B)\vee(A+C)=$$

$$=[a_1+b_1,\ a_1+c_2].$$

Astfel am demonstrat imposibilitatea cazului

$$(S\neq\varnothing\ \&\ S\neq T)$$

deci

$$S\neq\varnothing\Rightarrow S=T.$$

Faptul că este posibil ca

$$S=\varnothing \text{ şi } T\neq\varnothing$$

rezultă din următorul exemplu:

$$A=[1,4],\ B=[5,8],\ C=[1,3] \text{ şi}$$

$$A+(B\vee C)=\varnothing,\ (A+B)\vee(A+C)=[6,7].$$

Teorema este demonstrată.

În lucrarea [1] se afirmă că

$$A+(B\vee C)=(A+B)\vee(A+C),$$

egalitatea a cărei valabilitate este asigurată cu rezervele de mai sus.

Mai introducem următoarea operaţie:

$$A\cup B=\{\xi\mid\exists\zeta,\eta;\ \zeta\in A,\ \eta\in B,\ (\zeta\leqslant\xi\leqslant\eta \text{ sau } \eta\leqslant\xi\leqslant\zeta)\}$$

deci

$$A\cup B=[\min(a_1,\ b_1),\ \max(a_2,\ b_2)].$$

$A\cup B$ este învelitoarea convexă a lui $A\cup B$ (reuniunea în sensul teoriei mulţimilor).

TEOREMA. *Are loc egalitatea*

$$A+(B\cup C)=(A+B)\cup(A+C).$$

Demonstraţie.

$$A+B\cup C)=[a_1,\ a_2]+[\min(b_1,\ c_1),\ \max(b_2,\ c_2)]=$$

$$=[a_1+\min(b_1,\ c_1),\ a_2+\max(b_2,\ c_2)].$$

Pe de altă parte avem

$$(A+B)\cup(A+C)=[a_1+b_1,\ a_2+b_2]\cup[a_1+c_1,\ a_2+c_2]=$$

$$=[\min(a_1+b_1,\ a_1+c_1),\ \max(a_2+b_2,\ a_2+c_2)]=$$

$$=[a_1+\min(b_1,\ c_1),\ a_2+\max(b_2,\ c_2)].$$

Astfel

$$A+(B\cup C)=(A+B)\cup(A+C)$$

şi teorema este demonstrată.

THE OPERATIONS ∨ AND ∧ IN INTERVAL ARITHMETIC

SUMMARY

In the present article we consider the binary operations $\vee\cdot\wedge$ and $\cup$ defined for the real closed intervals

$$A=[a_1,\ a_2],\ B=[b_1,\ b_2]$$

as

$$A\wedge B=\begin{cases}[\max(a_1,\ b_1),\ \min(a_2,\ b_2)] & \text{if } \max(a_1,\ b_1)\leqslant\min(a_2,\ b_2)\\ \varnothing & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$A\vee B=\begin{cases}[a_1,\ b_2] & \text{if } a_1<b_2\\ \varnothing & \text{otherwise}\end{cases}$$

and

$$A\cup B=[\min(a_1,\ b_1),\ \max(a_2,\ b_2)].$$

In the paper is studied for different interval systems A, B, C the relation between

$$A+(B\vee C) \text{ and } (A+B)\vee(A+C).$$

As general result we have the subdistributive law

$$A + (B \vee C) \subseteqq (A + B) \vee (A + C).$$

The complex sum $+$ is distributive related to the operation $\bigcup$, therefore

$$A + (B \cup C) = (A + B) \cup (A + C).$$

BIBLIOGRAFIE

[1] Naas Josef, Schmid Hermann Ludwig, Mathematisches Wörterbuch Intervall-Algebra. 1 p. 830 (1961).

Institutul de calcul din Cluj, al Academiei R. S. România

Primit la 16 VII 1973.