REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola 1, 1974, pp. 53—59

ASUPRA TEOREMEI LUI KOROVKIN

de

GH. CIMOCA
(Cluj)

1. Introducere

Prezenta lucrare urmăreşte extinderea teoremei lui Korovkin [2], privind convergenţa şirurilor de operatori liniari şi pozitivi, pentru cazul unor mulţimi neliniare de funcţii, care generalizează mulţimile de funcţii interpolatoare [5] (unisolvente [3] sau n-parametrice [6]).

Se pot obţine astfel în particular, teorema lui Korovkin în cazul mulţimilor liniare cu proprietatea $I_3\{[a, b]\}$ şi rezultatul lui A. B. NÉMETH [4] în cazul mulţimilor neliniare cu proprietatea $I_3\{[a, b]\}$.

2. Definiţii şi notaţii

Sensul noţiunilor folosite, precum şi unele notaţii sînt cele din monografia [5]. Se notează prin $C[a, b]$ spaţiul funcţiilor cu valori reale, definite şi continue pe intervalul $[a, b] \subset R$, înzestrat cu norma uniformă şi prin $B[a, b]$ spaţiul funcţiilor cu valori reale, definite şi mărginite pe $[a, b]$ normat cu norma supremum. Mulţimea numerelor naturale se notează prin N.

D e f i n i ţ i a 1 [5]. *Se spune că mulţimea $F \subset C[a, b]$, este de tipul $I_n\{[a, b]\}$, $n \in N$, dacă pentru orice sistem de n puncte distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din $[a, b]$ şi oricare ar fi numerele reale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ există în mulţimea F o funcţie φ şi una singură care satisface relaţiile: $\varphi(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Fie $k \in N$ şi se fixează în continuare un sistem de k puncte distincte din $[a, b]$:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_k \tag{1}$$

și k numere reale oarecari:

$$y_1, y_2, \ldots, y_k. \tag{2}$$

Fie X reuniunea intervalelor $[a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{k-1}, x_k), (x_k, b]$, primul dintre aceste intervale fiind omis cînd $a = x_1$, iar ultimul fiind omis cînd $x_k = b$.

Definiția 2 [5]. *Dacă F este o mulțime de tipul $I_n\{[a, b]\}$, $n \geq \max\{2, k + 1\}$, se numește spic interpolator de ordinul $n - k$ mulțimea nevidă:*

$$S_n = \{\varphi | \varphi \in F, \quad \varphi(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Recent, E. H. KAUFMAN și G. G. BELFORD [1] au introdus noțiunea de familie S-unisolventă ca o generalizare a noțiunii de mulțime de tipul $I_n\{[a, b]\}$.

Definiția 3 [1]. *O mulțime $F \subset B[a, b]$ se numește S-familie în raport cu punctele (1) și numerele (2), dacă pentru fiecare element $\varphi \in F$ sînt satisfăcute relațiile: $\varphi(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots k$.*

Definiția 4 [1]. *O mulțime $F \subset C[a, b]$ se numește familie S-unisolventă de ordinul n, $n \in N$, pe $[a, b]$, dacă F este o S-familie în raport cu punctele (1) și numerele (2) și în plus F este o mulțime de tipul $I_n\{X\}$.*

Definiția 5 [1]. *Dacă funcția $\varphi \in C\,[a, b]$ se anulează pe punctul $x_0 \in [a, b]$, atunci:*

1° *Punctul x_0 se numește rădăcină simplă a funcției φ dacă este verificată una din următoarele două condiții:*

— *$x_0 \in X$, iar dacă x_0 nu coincide ca a sau b, funcția φ schimbă semnul în acest punct.*

— *x_0 coincide cu unul din punctele sistemului (1) diferit de a sau b.*

2° *Punctul x_0 se numește rădăcină dublă a funcției φ dacă $x_0 \in X \setminus \{a, b\}$ și φ nu schimbă semnul în acest punct.*

3. Rezultate ajutătoare

Această secțiune este consacrată unor rezultate pe care se bazează demonstrațiile afirmațiilor din ultima secțiune a notei.

Lema 1 [5]. *Spicul interpolator S_n este o mulțime de tipul $I_{n-k}\{X\}$.*

Lema 2. *Spicul interpolator S_n este o familie S-unisolventă de ordinul $n - k$ pe $[a, b]$.*

Observație. Ca rezultat al lemei 2 se poate pune următoarea întrebare: fiind dată o familie F presupusă a fi S-unisolventă de ordinul n pe $[a, b]$, nu există oare o mulțime G de tipul $I_{n+k}\{[a, b]\}$ astfel încît F este spic interpolator de ordinul n al mulțimii G? În cazul liniarității familiei F, se constată că răspunsul la această întrebare nu este în general afirmativ. Pentru cazul neliniar problema rămîne deschisă.

Lema 3 [1]. *Dacă φ_1 și φ_2 sînt două elemente distincte dintr-o familie F presupusă a fi S-unisolventă de ordinul n pe $[a, b]$, atunci diferența $\varphi_1 - \varphi_2$ are cel mult $n - 1$ rădăcini, rădăcinile duble socotindu-se de două ori.*

Lema 4. *Dacă F este o familie S-unisolventă de ordinul n pe $[a, b]$ și $g \in C[a, b]$ verifică condițiile: $g(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, atunci mulțimea de funcții: $G = \{\varphi - g | \varphi \in F\}$ este o S-familie relativ la punctele (1) și numerele $y_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$ și în plus G este o mulțime de tipul $I_n\{X\}$.*

TEOREMA 1 [1]. *Fie F o familie S-unisolventă de ordinul n pe $[a, b]$ și presupunem satisfăcute condițiile:*

(i) *Șirurile de puncte $(z_\nu^{(1)})_{\nu=1}^\infty, (z_\nu^{(2)})_{\nu=1}^\infty, \ldots, (z_\nu^{(n)})_{\nu=1}^\infty$ în care $z_\nu^{(i)} \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $\nu = 1, 2, \ldots$, sînt convergente și au limitele distincte $z_1, z_2, \ldots, z_n$.*

(ii) *Șirurile de numere: $(w_\nu^{(1)})_{\nu=1}^\infty, (w_\nu^{(2)})_{\nu=1}^\infty, \ldots, (w_\nu^{(n)})_{\nu=1}^\infty$ sînt convergente și au limitele $w_1, w_2, \ldots, w_n$.*

Dacă $\varphi \in F$ și $\varphi(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ iar $\varphi_\nu \in F$ și $\varphi_\nu(z_\nu^{(i)}) = w_\nu^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $\nu = 1, 2, \ldots$, atunci șirul de funcții $(\varphi_\nu)_{\nu=1}^\infty$ este uniform convergent pe intervalul $[a, b]$ și are funcția limită φ.

TEOREMA 2 [4]. *Fie $\mathfrak{F} \subset C[a, b]$ o mulțime cu proprietățile:*

(iii) *Pentru orice punct $z_0 \in (a, b)$ există un element $\psi \in \mathfrak{F}$ astfel încît: $\psi(z_0) = 0$ și $\psi(x) > 0$, $x \in [a, b] \setminus \{z_0\}$.*

(iv) *Există un element $\psi_0 \in \mathfrak{F}$ astfel încît: $\psi_0(a) = \psi_0(b) = 0$ și $\psi_0(x) > 0$ pentru $x \in (a, b)$.*

(v) *Pentru două numere w_1, w_2 arbitrare există un element $\psi_1 \in \mathfrak{F}$ astfel încît $\psi_1(a) = w_1$ și $\psi_1(b) = w_2$.*

Fie $(A_n)_{n=1}^\infty$ un șir de operatori liniari și pozitivi definiți pe $C[a, b]$ și cu valori în $B[a, b]$. Dacă șirul de funcții $(A_n(\psi))_{n=1}^\infty$ converge uniform pe $[a, b]$ către ψ, pentru fiecare element $\psi \in \mathfrak{F}$, atunci oricare ar fi $f \in C[a, b]$, șirul de funcții $(A_n(f))_{n=1}^\infty$ converge uniform pe $[a, b]$, către f.

4. Extinderea teoremei lui Korovkin

În scopul simplificării enunțurilor teoremelor din această secțiune, vom mai face cîteva notații.

Să presupunem pentru început că sistemul de puncte (1) este în așa fel ales încît $a \neq x_1$ și $x_k \neq b$. Să notăm $a = x_0$ și $b = x_{k+1}$. Fie $\mu = \min\{x_{i+1} - x_i, \ i = 0, 1, \ldots, k\} > 0$.

Dacă $0 < \varepsilon < \frac{\mu}{2}$, fie $v_0^+ = x_0$, $v_{k+1}^- = x_{k+1}$ și $v_i^+ = x_i + \varepsilon$, $v_i^- = x_i - \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, k$ iar V_ε reuniunea intervalelor $[v_i^+, v_{i+1}^-]$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Rezultatul principal al acestei note este:.

TEOREMA 3. *Fie $k \in N$ fixat și F o familie S-unisolventă de ordinul $3(k+1)$ pe $[a, b]$. Fie $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ un șir de operatori liniari și pozitivi definiți pe $C[a, b]$ și cu valori în $B[a, b]$. Dacă șirul de funcții $(A_n(\varphi))_{n=1}^{\infty}$ converge uniform pe $[a, b]$ către φ, pentru fiecare element $\varphi \in F$, atunci oricare ar fi numărul ε, $0 < \varepsilon < \frac{\mu}{2}$ și oricare ar fi $f \in C[a, b]$, șirul de funcții $(A_n(f))_{n=1}^{\infty}$ converge uniform pe V_ε către $f|_{V_\varepsilon}$.*

Demonstrație. Vom demonstra această teoremă prin aplicarea simultană a teoremei 2, pentru fiecare din intervalele reuniunii V_ε.

Dacă F este familia din ipoteza teoremei și $g \in F$, pe baza lemei 4, familia $G = \{\varphi - g | \varphi \in F\}$ este tot o familie S-unisolventă de același ordin cu F, dar ale cărei elemente au rădăcini comune punctele sistemului (1). Fie ε, $0 < \varepsilon < \frac{\mu}{2}$ dat.

Se constată imediat, pe baza proprietății de interpolare a familiei G și pe baza lemei 3, că există un element $\psi_0 \in G$ astfel încît $\psi_0(v_i^+) = \psi_0(v_{i+1}^-) = 0$ și $\psi_0(x) > 0$, $x \in (v_i^+, v_{i+1}^-)$, $i = 0, 1, \ldots, k$ și pe de altă parte, oricare ar fi perechile de numere $\{w_i^+, w_{i+1}^-\}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, există un element $\psi_1 \in G$ care îndeplinește condițiile: $\psi_1(v_i^+) = w_i^+$, $\psi_1(v_{i+1}^-) = w_{i+1}^-$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Cu alte cuvinte, condițiile (iv) și (v) din teorema 2 sînt satisfăcute simultan pe fiecare din intervalele $[v_i^+, v_{i+1}^-]$, $i = 0, 1, \ldots k$.

Vom arăta acum că și condiția (iii) este satisfăcută de o funcție $\psi \in G$, simultan pe fiecare din intervalele reuniunii V_ε. Să considerăm punctele $z_i \in (v_i^+, v_{i+1}^-)$, $i = 0, 1, \ldots k$, numerele pozitive α_i, $i = 0, 1, \ldots, k$ și mulțimea:

$$S = \{\psi | \psi \in G,\ \psi(v_i^+) = \alpha_i,\ \psi(z_i) = 0,\ i = 0, 1, \ldots, k\}.$$

Mulțimea S fiind de tipul $I_{k+1}\{V_\varepsilon\}$, se constată imediat că, oricare ar fi punctele $u_i \in (z_i, v_{k+1}^-]$, $i = 0, 1, \ldots, k$, există o funcție în S care se anulează în aceste puncte. Vom considera acum șirurile de puncte $(z_\nu^{(0)})_{\nu=1}^{\infty}$, $(z_\nu^{(1)})_{\nu=1}^{\infty}, \ldots, (z_\nu^{(k)})_{\nu=0}^{\infty}$ în care $z_\nu^{(i)} \in (z_i, v_{i+1}^-]$, $i = 0, 1, \ldots, k$; $\nu = 1, 2, \ldots$, convergente și $\lim\limits_{\nu \to \infty} z_\nu^{(i)} = z_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Dacă $\psi_\nu \in S$ și $\psi_\nu(z_\nu^{(i)}) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$; $\nu = 1, 2, \ldots$, atunci șirul de funcții $(\psi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$, pe baza teoremei 1, converge uniform către o funcție ψ din G care se anulează pe punctele z_i, $i = 0, 1, \ldots, k$ și care pentru funcția ψ sînt rădăcini duble. Prin construcție și pe baza lemei 3, care ne asigură faptul că mulțimea rădăcinilor funcției ψ este formată din rădăcinile duble z_i, $i = 0, 1, \ldots, k$ și din rădăcinile simple x_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, rezultă că funcția ψ este pozitivă pe mulțimile $[v_i^+, v_{i+1}^-] \setminus \{z_i\}$ $i = 0, 1, \ldots, k$. Cu aceasta proprietatea (iii) este demonstrată.

Înainte de aplicarea teoremei 2 pe fiecare din intervalele $[v_i^+, v_{i+1}^-]$, $i = 0, 1, \ldots, k$, prin care demonstrația se încheie, să mai arătăm că șirul de funcții $(A_n(\psi))_{n=1}^{\infty}$, converge uniform pe V_ε către $\psi|_{V_\varepsilon}$, pentru fiecare element ψ din G.

Fie deci $\psi \in G$, adică $\psi = \varphi - g$ pentru un element $\varphi \in F$. Deoarece, prin ipoteză, șirurile de funcții $(A_n(\varphi))_{n=1}^{\infty}$ și $(A_n(g))_{n=1}^{\infty}$ converg uniform pe V_ε, respectiv către funcțiile $\varphi|_{V_\varepsilon}$ și $g|_{V_\varepsilon}$, pe baza liniarității operatorilor A_n, $n = 1, 2, \ldots$ șirul $(A_n(\psi))_{n=1}^{\infty}$ va converge uniform pe V_ε către funcția $(\varphi - g)|_{V_\varepsilon} = \psi|_{V_\varepsilon}$.

Avînd în vedere lema 2 obținem:

C o r o l a r u l 1. *Fie $k \in N$ fixat, F o mulțime de tipul $I_{4k+3}\{[a, b]\}$ și $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ un șir de operatori liniari și pozitivi, definiți pe $C[a, b]$ și cu valori în $B[a, b]$. Dacă șirul de funcții $(A_n(\varphi))_{n=1}^{\infty}$ converge uniform pe $[a, b]$ către φ, pentru fiecare element φ din spicul interpolator $S_{4k+3} = \{\varphi | \varphi \in F, \varphi(x_i) = y_i, i = 1, 2, \ldots k\}$ atunci oricare ar fi numărul ε, $0 < \varepsilon < \frac{\mu}{2}$ și oricare ar fi $f \in C[a, b]$, șirul de funcții $(A\ (f))_{n=1}^{\infty}$ converge uniform pe V_ε către funcția $f|_{V_\varepsilon}$.*

Să considerăm acum cazurile în care $x_1 = a$ sau $x_k = b$ sau $x_k = b$ și $x_1 = a$. Dacă numai unul dintre punctele sistemului (1) coincide cu unul dintre capetele intervalului $[a, b]$, în reuniunea V_ε se va omite primul interval cînd $x_1 = a$ și ultimul interval cînd $x_k = b$. Evident în fiecare din aceste cazuri numărul μ se va defini în mod corespunzător. Convenim să notăm:

$$V_\varepsilon^a = \bigcup_{i=1}^{k} [v_i^+,\ v_{i+1}^-], \quad V_\varepsilon^b = \bigcup_{i=0}^{k-1} [v_i^+,\ v_{i+1}^-]$$

și

$$V_\varepsilon^{ab} = \bigcup_{i=1}^{k-1} [v_i^+,\ v_{i+1}^-]$$

ultima notație corespunzînd cazului $x_1 = a$ și $x_k = b$ (cînd din reuniunea V_ε se vor omite primul și ultimul interval).

TEOREMA 4. *Fie $k \in N$ fixat și F o familie S-unisolventă de ordinul $3k + 1$ pe $[a, b]$, F fiind o S-familie în raport cu sistemul de puncte (1), unde $x_1 = a$ (respectiv $x_k = b$) și numerele (2). Fie $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ un șir de operatori liniari și pozitivi, definiți pe $C[a, b]$ și cu valori în $B[a, b]$. Dacă șirul de funcții $(A_n(\varphi))_{n=1}^{\infty}$ converge uniform pe $[a, b]$ către φ pentru fiecare element $\varphi \in F$, atunci oricare ar fi numărul ε, $0 < \varepsilon < \frac{\mu}{2}$ și oricare ar fi $f \in C[a, b]$, șirul de funcții $(A_n(f))_{n=1}^{\infty}$ converge uniform pe V_ε^a (respectiv V_ε^b) către $f|_{V_\varepsilon^a}$ (respectiv către $f|_{V_\varepsilon^b}$).*

TEOREMA 5. *Fie* $k \in N$ *fixat,* $k \geqq 2$ *și* F *o familie S-unisolventă de ordinul* $3k - 1$ *pe* $[a, b]$, F *fiind o S-familie în raport cu sistemul de puncte* (1), *unde* $x_1 = a$ *și* $x_k = b$ *și numerele* (2). *Dacă* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *este un șir de operatori liniari și pozitivi, definiți pe* $C[a, b]$, *cu valori în* $B[a, b]$, *iar șirul de funcții* $(A_n(\varphi))_{n=1}^{\infty}$ *converge uniform pe* $[a, b]$ *către* φ, *pentru fiecare element* $\varphi \in F$, *atunci oricare ar fi numărul* ε, $0 < \varepsilon < \frac{\mu}{2}$ *și oricare ar fi* $f \in C[a, b]$, *șirul de funcții* $(A_n(f))_{n=1}^{\infty}$ *converge uniform pe* V_ε^{ab} *către* $f|_{V_\varepsilon^{ab}}$.

Corolarul 2. *Fie* $k \in N$ *fixat,* F *o mulțime de tipul* $I_{4k+1}\{[a, b]\}$ *și* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *un șir de operatori liniari și pozitivi definiți pe* $C[a, b]$ *și cu valori în* $B[a, b]$. *Dacă șirul de funcții* $(A_n(\varphi))_{n=1}^{\infty}$ *converge uniform pe* $[a\ b]$ *către* φ, *pentru fiecare element* φ *din spicul interpolator:*

$$S_{4k+1}^{a} = \{\varphi | \varphi \in F,\ \varphi(a) = y_1,\quad \varphi(x_i) = y_i,\quad i = 2, 3, \ldots, k\}$$

(respectiv

$$S_{4k+1}^{b} = \{\varphi | \varphi \in F,\ \ \varphi(x_i) = y_k,\ i = 1, 2, \ldots, k - 1,\ \varphi(b) = y_k\})$$

atunci oricare ar fi numărul ε, $0 < \varepsilon < \frac{\mu}{2}$ *și oricare ar fi* $f \in C[a, b]$, *șirul de funcții* $(A_n(f))_{n=1}^{\infty}$ *converge uniform pe* V_ε^{a} *(respectiv* V_b^{ε}*) către funcția* $f|_{V_\varepsilon^a}$ *(respectiv* $f|_{V_\varepsilon^b}$*).*

Corolarul 3. *Fie* $k \in N$, $k \geqq 2$ *fixat,* F *o mulțime de tipul* $I_{4k-1}\{[a, b]\}$ *și* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *un șir de operatori liniari și pozitivi, definiți pe* $C[a, b]$ *și cu valori în* $B[a, b]$. *Dacă șirul de funcții* $(A_n(\varphi))_{n=1}^{\infty}$ *converge uniform pe* $[a, b]$ *către* φ, *pentru fiecare element* φ *din spicul interpolator:*

$$S_{4k-1}^{ab} = \{\varphi | \varphi \in F,\ \varphi(a) = y_1,\quad \varphi(b) = y_k,\quad \varphi(x_i) = y_i,\quad i = 2, \ldots, k - 1\}$$

atunci oricare ar fi numărul ε, $0 < \varepsilon < \frac{\mu}{2}$ *și oricare ar fi* $f \in C[a, b]$, *șirul de funcții* $(A_n(f))_{n=1}^{\infty}$ *converge uniform pe* V_ε^{ab} *către funcția* $f|_{V_\varepsilon^{ab}}$.

Vom încheia această notă cu următorul rezultat:

Corolarul 4. *Fie* $k \in N$ *fixat,* F *o familie S-unisolventă de ordinul* $3(k + 1)$ *pe* $[a, b]$ $(x_1 \neq a,\ x_k \neq b)$. *Fie* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *un șir de operatori liniari și pozitivi, definiți pe* $C[a, b]$ *și cu valori în* $B[a, b]$. *Dacă șirul de funcții* $(A_n(\varphi))_{n=1}^{\infty}$ *converge uniform pe* $[a, b]$ *către* φ, *pentru fiecare element* $\varphi \in F$ *atunci oricare ar fi* $f \in C[a, b]$, *astfel încît* $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, *șirul de funcții* $(A_n(f))_{n=1}^{\infty}$ *converge uniform pe* $[a, b]$ *către* f.

Observații. Ultimul corolar poate fi formulat pentru cazul spicelor de interpolare și cu unele modificări evidente el rămîne adevărat și în cazul cînd punctele extreme ale sistemului (1) coincid cu capetele intervalului $[a, b]$.

Rezultatele din [2] și [4] amintite în introducere se obțin pentru $k = 0$.

ON KOROVKIN'S THEOREM

SUMMARY

In this paper is given an extension of Korovkin's theorem for *S*-unisolvent families [1].

BIBLIOGRAFIE

[1] Kaufman E. H., Jr., Belford G. G., *A Generalization of the Varisolvency and Unisolvency Properties*, J. Approx. Theory, **7**, 1. 21–35 (1973).
[2] Коровкин П. П, Линейные операторы и теория приближений, Физматгиз, Москва, 1958.
[3] Motzkin T. S., *Approximation by curves of a unisolvent family*, Bull. Amer. Math. Soc., **55**, 789–793 (1949).
[4] Németh A. B., *Korovkin's theorem for nonlinear 3-parameter families*, Mathematica, **11** (34), 1, 135–136 (1969).
[5] Popoviciu E., *Teoreme de medie din analiza matematică și legătura lor cu teoria interpolării*, Editura Dacia, Cluj, 1972.
[6] Tornheim L., *On n-parameter families of functions and associated convex functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **69**, 457–467 (1950).

Institutul de calcul Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România

Primit la 11. V. 1973.