REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola 1, 1974, pp. 61–70

TEOREME DE SEPARAŢIE PENTRU MULŢIMI CONVEXE ÎN SPAŢII LOCAL CONVEXE NEARHIMEDIENE

de

ŞTEFAN COBZAŞ
(Cluj)

1. Introducere

Teoria spaţiilor vectoriale topologice peste un corp valuat nearhimedian şi teoria funcţiilor cu valori într-un corp valuat nearhimedian sînt cunoscute sub denumirea de analiză nearhimediană. Analiza nearhimediană s-a dezvoltat în paralel cu analiza peste corpul numerelor reale sau complexe, în special prin contribuţia unor matematicieni olandezi dintre care menţionăm în primul rînd pe A. F. MONNA. Pentru o introducere rapidă şi eficientă în acest domeniu recomandăm cartea lui A. F. MONNA [5], unde se poate găsi şi o bibliografie aproape completă.

Un pas esenţial în teoria spaţiilor vectoriale topologice peste un corp valuat nearhimedian l-a constituit o noţiune de convexitate introdusă de A. F. MONNA, care a condus la introducerea spaţiilor local convexe nearhimediene. O teoremă de tip Hahn-Banach de prelungire a funcţionalelor liniare demonstrată de A. W. INGLETON în lucrarea [3] a permis construirea unei teorii de dualitate pentru aceste spaţii, lucru care a fost făcut de J. van TIEL [9].

De o deosebită utilitate în teoria spaţiilor local convexe nearhimediene s-a dovedit a fi noţiunea de c-compactitate (compactitate convexă) introdusă de T. A. SPRINGER [8], care a demonstrat printre altele că o submulţime c-compactă şi convexă a unui spaţiu local convex nearhimedian este închisă. Ulterior, N. DE GRANDE-DE KIMPE [2] a demonstrat că o astfel de mulţime este completă. Vom da o nouă demonstraţie a acestui fapt.

A. F. MONNA [4] a introdus o noţiune de separare pentru mulţimi convexe prin hiperplane şi a demonstrat că două mulţimi convexe, disjuncte şi secvenţial compacte dintr-un spaţiu local convex nearhimedian pot fi separate printr-un hiperplan închis. Vom extinde această teoremă înlocuind noţiunea de compactitate cu noţiunea mai slabă de c-compactitate.

În tot cursul acestui articol vom folosi prescurtarea n.a. pentru „nearhimedian".

2. Corpuri valuate nearhimediene

Pentru teoria corpurilor valuate se poate consulta CH. PISOT [6].

Un *corp valuat n.a.* este un corp K pe care s-a definit o funcţie $|\cdot|: K \to R$ numită *valuare n.a.* verificînd condiţiile:

V_1. $|a| \geqslant 0$ şi $|a| = 0$ dacă şi numai dacă $a = 0$,

V_2. $|ab| = |a||b|$,

V_3. $|a + b| \leqslant \max(|a|, |b|)$ (inegalitatea ultrametrică) pentru orice $a, b \in K$.

Prin $\rho(a, b) = |a - b|$ introducem o metrică, şi deci o topologie, pe K, în raport cu care K devine un corp topologic.

Un exemplu de valuare n.a. este valuarea trivială definită prin $|a| = 1$ dacă $a \neq 0$ şi $|0| = 0$, care induce topologia discretă pe K. În tot cursul acestei note vom presupune valuarea lui K netrivială.

Un exemplu important de corpuri valuate n.a. îl constituie corpurile p-adice, care se obţin în felul următor: fie $p > 1$ un număr natural prim, Q corpul numerelor raţionale, şi $a > 1$ un număr real. Scriem orice $r \in Q$ sub forma $r = r'p^z$, $z \in Z$ şi r' nu mai conţine pe p. Definim $|r|_p = a^{-z}$. Se arată uşor că $|\cdot|_p$ este o valuare n.a. pe Q.

O consecinţă imediată a axiomelor unei valuări n.a. este: $a, b \in K$, $|a| \neq |b|$ implică $|a + b| = \max(|a|, |b|)$.

Mulţimea $K_0 = \{a \in K : |a| \leqslant 1\}$ este un inel, numit *inelul întregilor lui K* sau *inelul de valuare* al lui K, iar $P = \{a \in K : a < 1\}$ este un ideal maximal în K_0 (unicul ideal maximal). Corpul cît $k = K_0/P$ se numeşte *corpul rezidual* al lui K. Mulţimea $N_K = \{|a| : a \in K \diagup \{0\}\}$ este un subgrup al grupului multiplicativ al numerelor reale pozitive. Deoarece un astfel de grup este sau ciclic sau dens în mulţimea numerelor reale nenegative (vezi de exemplu [6]), vom numi în primul caz valuarea lui K *discretă*, iar în al doilea caz *densă*.

Trebuie să remarcăm însă, că o valuare discretă nu induce topologia discretă, aceasta fiind indusă de valuarea trivială, caz pe care îl excludem din consideraţiile noastre, după cum am mai menţionat.

3. Mulţimi convexe în spaţii vectoriale peste un corp valuat nearhimedian

Fie E un spaţiu vectorial peste un corp valuat n.a. K, şi A o submulţime a lui E. Spunem că A are *proprietatea* (C) dacă: (C) Pentru orice $a, b, \in K_0$ avem $aA + bA \subseteq A$.

Observăm că aceasta înseamnă de fapt că A este un modul peste inelul K_0 al întregilor lui K şi deci $0 \in A$.

Vom spune că o mulţime B de forma $x_0 + A$ unde $x_0 \in E$ şi $A \subseteq E$, este *convexă* dacă A are proprietatea (C). Vom spune că x_0 este centrul

mulţimii $B = x_0 + A$. Drept centru se poate alege orice punct al mulţimii, adică $B = y + A$ pentru orice $y \in B$.

O submulţime a lui K este convexă dacă şi numai dacă este $\{0\}$, K sau este de forma $\{a \in K : |a - a_0| \leqslant r\}$ sau $\{a \in K : |a - a_0| < r\}$, pentru un a_0 din K şi $r > 0$.

Se poate introduce noţiunea de convexitate într-un mod echivalent fără a folosi un punct specificat în mulţime (centrul) în felul următor: spunem că mulţimea B are proprietatea (C') dacă

(C') Pentru orice $a, b, c \in K_0$, $a + b + c = 1$ avem $aB + bB + cB \subseteq B$.

Se verifică uşor că B are proprietatea (C') dacă şi numai dacă $B - x_0$ are proprietatea (C), unde x_0 este un punct oarecare din B.

Deoarece intersecţia de mulţimi convexe este convexă, se poate defini învelitoarea convexă a unei mulţimi $A \subseteq E$ prin:

$$\text{co}\,(A) = \bigcap \{B : B \text{ convexă şi } A \subseteq B\}.$$

Avem

$$\text{co}\,(A) = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i : a_i \in K_0,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1,\ x_i \in A,\ i=1, \ldots, n,\ n \in N\right\},$$

sau dacă $0 \in A$, atunci

$$\text{co}\,(A) = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i : a_i \in K_0,\ x_i \in A,\ i = 1, \ldots, n,\ n \in N\right\}.$$

Avem deasemenea

$$co(x_0 + A) = x_0 + co(A).$$

O *prenormă n.a.* pe un spaţiu vectorial E peste un corp valuat n.a. K este o aplicaţie $p : E \to R$ verificînd condiţiile:

P_1. $p(x) \geqslant 0$,

P_2. $p(ax) = |a|p(x)$,

P_3. $p(x + y) \leqslant \max(p(x), p(y))$,

pentru orice $x, y \in E$ şi orice $a \in K$.

Dacă în plus avem

P_4. $p(x) = 0$ implică $x = 0$

pentru orice $x \in E$, aplicaţia p se numeşte *normă n.a.*

Valuarea n.a. a unui corp K este o normă n.a. pe K, considerat ca spaţiu vectorial peste el însuşi.

Ca şi în cazul real sau complex, unei mulţimi convexe şi absorbante $B \subseteq E$ i se poate ataşa funcţionala lui Minkowski p_B definită prin:

$$p_B(x) = \inf \{|a| : x \in aB\} \text{ pentru orice } x \in E,$$

care va fi o prenormă n.a. verificînd

$$\{x \in E : p_B(x) < 1\} \subseteq B \subseteq \{x \in E : p_B(x) \leqslant 1\}.$$

În plus, dacă E este un spațiu vectorial topologic peste K și B are un punct interior, atunci p_B va fi continuă.

Un spațiu vectorial topologic separat E peste un corp K valuat n.a. se va numi *spațiu local convex n.a.* (prescurtat s.l.c. n.a.) dacă are o bază de zero-vecinătăți formată din mulțimi convexe. Ca și în cazul real sau complex, topologia unui s.l.c.n.a. E este generată de familia prenormelor n.a. continue pe E.

4. Completitudine și c-compactitate

Un filtru pe un spațiu vectorial E peste un corp valuat n.a. K se numește *convex* dacă are o bază formată din mulțimi convexe. O submulțime A a unui s.l.c.n.a. E se numește *c-compactă* (convex compactă) dacă orice filtru convex pe A are un punct aderent în A. Noțiunea de c-compactitate a fost introdusă de T. A. SPRINGER [8]. Tot în [8] T. A. SPRINGER a aratat că o mulțime convexă și c-compactă într-un s.l.c.n.a. peste închisă. N. DE GRANDE-DE KIMPE [2] a demonstrat că are loc:

P r o p o z i ț i a 4.1. *O parte c-compactă și convexă a unui s.l.c.n.a este completă.*

Vom da o nouă demonstrație a acestei propoziții. Propoziția 4.1 va fi o consecință imediată a lemei următoare. În această lemă E va fi un spațiu local convex peste corpul numerelor reale sau complexe, sau un s.l.c.n.a., iar prin convexitate vom înțelege convexitatea obișnuită din spațiile vectoriale reale sau complexe, sau convexitatea nearhimediană introdusă la punctul 3.

L e m a 4.2. *Fie E un spațiu local convex. Dacă A este o submulțime convexă a lui E, atunci A este completă dacă și numai dacă orice filtru Cauchy convex pe A este convergent către un punct din A.*

D e m o n s t r a ț i e. Necesitatea este evidentă. Pentru a demonstra suficiența să presupunem că A este convexă și $\{F_i : i \in I\}$ este un filtru Cauchy pe A. Considerăm filtrul $\tilde{\mathfrak{F}}$ generat de $\{F_i\}$ în completarea $\tilde{E}$ a lui E. $\tilde{\mathfrak{F}}$ va fi tot un filtru Cauchy și deci va fi convergent către un $x_0 \in \tilde{E}$, adică pentru orice 0-vecinătate convexă $\tilde{U}$ în $\tilde{E}$ va exista un $i \in I$ astfel ca $F_i \subseteq x_0 + \tilde{U}$. Deoarece $\tilde{U}$ este convexă rezultă co $(F_i) \subseteq x_0 + \tilde{U}$, deci filtrul generat de $\{co\ (F_i)\}$ în E converge către x_0 și prin urmare va fi un filtru Cauchy convex. Din $F_i \subseteq A$ și convexitatea lui A rezultă co $(F_i) \subseteq A$. Dacă $\tilde{U}$ este o 0-vecinătate în $\tilde{E}$ și $i \in I$ este astfel că co (F_i) — $co\ (F_i) \tilde{\subset} U$, atunci co $(F_i) - co\ (F_i) \subseteq \tilde{U} \cap E$. Deoarece $\tilde{U} \cap E$ formează o bază de 0-vecinătăți pentru E cînd $\tilde{U}$ parcurge o bază de 0-vecinătăți convexe pentru $\tilde{E}$, rezultă că filtrul $\mathfrak{F}'$ generat de $\{co(F_i)\}$ pe A va fi un

filtru Cauchy convex. Din ipoteză rezultă că el va fi convergent către un punct din A. Dar atunci și filtrul mai fin $\mathfrak{F}$ va fi convergent către același punct (deoarece am presupus spațiul separat rezultă că punctul este de fapt x_0).

În cazul nearhimedian putem preciza mai mult.

P r o p o z i ț i a 4.3. *Fie E un spațiu vectorial peste un corp valuat n.a. K, $x \in E$, $0 \in A_i \subseteq E$, $a_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$.*

Atunci :

$$co\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i + A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} co(a_i(x_i + A_i)) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_i\, co(A_i).$$

D e m o n s t r a ț i e. Deoarece $co(A)$ este format din toate sumele finite de forma

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \quad b_i \in K_0, \ y_i \in A,$$

rezultă că

$$co\left(\sum_{i=1}^{n} a_i A_i\right) \subseteq \sum_{i=1}^{n} a_i\ co\ (A_i),$$

Invers,

$$a_j A_j \subseteq \sum_{i=1}^{n} a_i A_i \quad \text{implică} \quad co(a_j\, A_j) \subseteq co\ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i A_i\right),$$

pentru

$$j = 1, 2, \ldots, n. \quad \text{De aici} \ \sum_{j=1}^{n} co(a_j A_j) \subseteq co\ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i A_i\right).$$

Deci

$$co\left(\sum_{i=1}^{n} A_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} co(a_i A_i).$$

Ținînd cont de faptul că

$$co\ (a_i A_i) = a_i\ co\ (A_i) \ \text{ și } \ co\ \ (x_i + A_i) = x_i + co\ (A_i),$$

rezultă egalitățile scrise.

C o r o l a r 4.4. *Fie U o 0-vecinătate convexă într-un s.l.c.n.a. E și F o parte de ordin U a lui E (adică $F - F \subseteq U$). Atunci și $co(F)$ este de ordin U. În particular, dacă $\{F_i\}$ este un filtru Cauchy pe E, atunci filtrul generat de $\{co(F_i)\}$ este tot Cauchy.*

D e m o n s t r a ţ i e. Incluziunea $F - F \subseteq U$ implică, conform Propoziţiei 4.3

$$\mathrm{co}(F) - \mathrm{co}(F) = \mathrm{co}(F - F) \subseteq U.$$

5. Separarea mulţimilor convexe prin hiperplane

Fie E un spaţiu vectorial peste un corp valuat n.a. K. Notăm ca de obicei cu E^* dualul algebric al lui E, adică spaţiul vectorial al funcţionalelor liniare definite pe E şi cu valori în K. Un hiperplan H în E este o mulţime de forma: $\{x \in E : f(x) = a\}$ pentru un $a \in K$ şi un $f \in E^*$.

În [4] MONNA a introdus noţiunea de parte a unui hiperplan H în felul următor: pentru $x, y \in E \setminus H$, relaţia „$x \sim y$ dacă şi numai dacă $\mathrm{co}(\{x, y\}) \cap H = \emptyset$" este o relaţie de echivalenţă în $E \setminus H$. Clasele de echivalenţă se numesc „părţi" ale lui H. Spunem că două mulţimi $A, B \subseteq E \setminus H$ sînt *separate* de H dacă sînt conţinute în clase de echivalenţă diferite ale lui $E \setminus H$.

Se pune în mod natural problema separării submulţimilor convexe dintr-un s.l.c.n.a. prin hiperplane închise, adică hiperplane determinate de funcţionale liniare şi continue.

Înainte vom prezenta însă cîteva rezultate din teoria s.l.c.n.a., urmînd lucrarea [9].

Spunem că un spaţiu prenormat n.a. (E, p) este *sferic complet* dacă orice familie total ordonată prin incluziune de p-bile închise are intersecţia nevidă. (Prin p-bilă închisă înţelegem o mulţime de forma $\{x \in E : p(x - x_0) \leqq r\}$ pentru un $x_0 \in E$ şi $r > 0$).

T. A. SPRINGER [8] a arătat că un corp valuat n.a. este sferic complet dacă şi numai dacă este c-compact. De aici se vede că noţiunea de c-compactitate este efectiv mai generală decît cea de compactitate, deoarece o mulţime c-compactă poate să nu fie mărginită (un corp valuat n.a. c-compact nu este mărginit).

INGLETON [3] a demonstrat că dacă corpul K este sferic complet atunci pentru orice s.l.c.n.a. peste K este valabilă teorema de prelungire a lui Hahn-Banach. În cazul cînd K nu este sferic complet există un spaţiu normat n.a. peste K cu dualul redus la funcţionala nulă.

Vom presupune în cele ce urmează că E este un s.l.c.n.a. peste un corp valuat n.a. sferic complet K.

Vom nota cu E' dualul algebrico-topologic al lui E, adică spaţiul funcţionalelor liniare şi continue definite pe E şi cu valori în K. După cum am mai menţionat topologia lui E este determinată de familia prenormelor n.a. continue pe E. Vom nota un astfel de spaţiu cu (E, Γ) unde cu Γ am notat o familie dirijată de prenorme n.a. continue pe E care generează topologia lui E. Dacă valuarea lui K este discretă se poate presupune fără a restrînge generalitatea că $\Gamma(E) \subseteq N_K = \{|a| : a \in K\}$ ([9], pag. 257). O submulţime $A \subseteq E$ se numeşte *Γ-închisă* dacă pentru orice $x_0 \in E \setminus A$ există un $p \in \Gamma$ astfel că $p(A) \leqslant 1$ şi $p(x_0) > 1$. O mulţime Γ-închisă este

închisă, convexă şi conţine pe 0. Dacă valuarea lui K este discretă atunci este adevărată şi reciproca, adică o mulţime închisă, convexă şi conţinînd originea este Γ-închisă. Menţionăm următoarea consecinţă a teoremei lui Hahn-Banach:

TEOREMA 5.1. ([9], [5]). *Fie K un corp valuat n.a. sferic complet şi E un s.l.c.n.a. peste K, $0 \in A \subseteq E$ convexă şi închisă, $x_0 \in E \setminus A$. Atunci*

1°. Dacă valuarea lui K este discretă există un $f \in E'$ astfel că $|f(A)| \leqslant 1$ şi $|f(x_0)| > 1$.

2°. Dacă valuarea lui K este densă există un $f \in E'$ astfel că $|f(A)| \leqslant 1$ şi $f(x_0) = 1$.

Vom demonstra acum două propoziţii ajutătoare.

P r o p o z i ţ i a 5.2. *Dacă A este o submulţime convexă şi închisă şi B o submulţime convexă şi c-compactă într-un s.l.c.n.a. E atunci $A + B$ este închisă.*

D e m o n s t r a ţ i e. Se poate prelua demonstraţia din [7], Teorema I.1.1. (iv) luînd vecinătăţile U convexe.

P r o p o z i ţ i a 5.3. *Fie K un corp valuat n.a. cu valuarea densă, (E, Γ) un s.l.c.n.a. peste K şi A o submulţime Γ-închisă a lui E. Dacă $\{a_n\}$ este un şir de elemente din K astfel ca şirul $\{|a_n|\}$ să fie descrescător convergent către 1 atunci $\bigcap_n a_n A = A$.*

D e m o n s t r a ţ i e. Deoarece o parte Γ-închisă este convexă şi conţine pe 0 şi $|a_n| > 1$ rezultă, $A \subseteq a_n A$ pentru orice n, de unde $A \subseteq \bigcap_n a_n A$. Dacă $z \notin A$, A fiind Γ-închisă va exista un $p \in \Gamma$ astfel că $p(A) \leqslant 1$ şi $p(z) > 1$. Alegînd n astfel ca $p(z) > |a_n| > 1$ vom avea $p(a_n^{-1} z) > 1$, deci $a_n^{-1} z \notin A$, sau echivalent, $z \notin a_n A$ şi a fortiori $z \notin \bigcap_n a_n A_n$. Deci $\bigcap_n a_n A \subseteq A$ şi rezultă egalitatea dorită.

Putem trece la enunţul teoremei de separaţie. Vom nota cu Z_2 corpul întregilor modulo 2.

TEOREMA 5.4. *Fie K un corp valuat n.a. avînd corpul rezidual diferit de Z_2, (E, Γ) un s.l.c.n.a. peste K, A, B două submulţimi Γ închise ale lui E, B fiind şi c-compactă. Dacă $x_0 \in E$ este astfel că $A \cap (x_0 + B) = \emptyset$ atunci există un hiperplan închis H separînd pe A şi $x_0 + B$.*

D e m o n s t r a ţ i e. a) *Valuarea lui K este discretă.* O parte Γ-închisă a unui s.l.c.n.a. fiind închisă şi convexă, rezultă, aplicînd Propoziţia 5.2. că $A + B$ este închisă. Evident, $A + B$ va fi şi convexă şi $0 \in A + B$. Din $A \cap (x_0 + B) = \emptyset$ rezultă $x_0 \notin A + B$ şi conform Teoremei 5.1.1° există un $f \in E'$ astfel că $|f(A + B)| \leqslant 1$ şi $|f(x_0)| > 1$. Fie $a_0 = f(x_0)$. Din faptul că $|f(B)| \leqslant 1$ rezultă $|f(x_0 + B)| = |f(x_0)| > 1$. Mulţimea $f(x_0 + B)$ este convexă în K, deci va fi o bilă şi valuarea lui K fiind discretă va fi de forma $\{a \in K : |a - a_0| \leqslant |a_1|\}$, unde $a_1 \in K$. Să presupunem că $|a_0| \leqslant |a_1|$. Vom avea $|0 - a_0| = |a_0| \leqslant |a_1|$, deci $0 \in f(x_0 + B)$ în contradicţie cu relaţia $|f(x_0 + B)| = |a_0| > 1$. Prin urmare $|a_1| < |a_0|$. Corpul rezidual al lui K fiind diferit de Z_2 există un $b_0 \in K$ astfel ca $|b_0| = 1 = |b_0 - 1|$. Fie atunci $H = \{x \in E : f(x) = a_0 b_0\}$. Vom avea $|f(A)| \leqslant 1 < |a_0| = |a_0 b_0|$, deci $A \subseteq U_0$, unde cu H_0 am notat clasa de echiva-lenţă în raport cu hiperplanul H a elementului $0 \in E \setminus H$ (vezi [4], 1.3). Dacă ar exista un $x \in H \cap (x_0 + B)$ am avea $f(x) \in f(x_0 + B)$, deci $|f(x) - a_0| = |a_0 b_0 - a_0| \leqslant |a_1|$. Dar, pe de altă parte, $|a_0 b_0 - a_0| = |a_0| > |a_1|$. Această contradicţie ne arată că $H \cap (x_0 + B) = \emptyset$. Din [4], 3.2 $x_0 + B$ va fi conţinută într-o clasă de echivalenţă diferită de H_0 şi prin urmare H separă mulţimile A şi $x_0 + B$.

b) *Valuarea lui K este densă*. Fie $\{a_n\}$ un şir în K astfel ca şirul $\{|a_n|\}$ să fie un şir descrescător, convergent către 1. Mulţimile A şi B fiind Γ-în-chise vor fi închise, convexe şi vor conţine pe 0. Să presupunem că pentru orice $n \in N$ $a_n A \cap (x_0 + B) \neq \emptyset$. Din c-compactitatea lui $x_0 + B$ rezultă (vezi [8], 1.13 (iii)) $\emptyset \neq \bigcap_n (a_n A \cap (x_0 + B)) = (x_0 + B) \cap (\bigcap_n a_n A)$. Din Propoziţia 5.3 $\bigcap_n a_n A = A$, deci $A \cap (x_0 + B) \neq \emptyset$ în contradicţie cu ipoteza făcută. Aşadar există un $n_0 \in N$ astfel ca

(1)
$$a_{n_0} A \cap (x_0 + B) = \emptyset.$$

Să presupunem acum că $a_{n_0} A \cap (x_0 + a_n B) \neq \emptyset$ pentru orice $n \in N$. Şirul $\{|a_n|\}$ fiind descrescător, B convexă şi $0 \in B$ rezultă $x_0 + a_n B \subseteq x_0 + a_1 B$ pentru orice $n \in N$. B fiind c-compactă rezultă că şi $x_0 + a_1 B$ va fi c-compactă. Aplicînd încă odată proprietăţile 1.13 (iii) din [8] şi 5.3 rezultă că

$$\emptyset \neq \bigcap_n (a_{n_0} A \cap (x_0 + a_n B)) = a_{n_0} A \cap \bigcap_n (x_0 + a_n B) =$$
$$= a_{n_0} A \cap (x_0 + \bigcap_n a_n B) = a_{n_0} A \cap (x_0 + B),$$

în contradicţie cu relaţia (1). Rezultă existenţa unui $n_1 \in N$ astfel ca $a_{n_0} A \cap (x_0 + a_{n_1} B) = \emptyset$, şi luînd $a_0 = a_{n'}$ unde $n' = \max(n_0, n_1)$ rezultă $|a_0| > 1$ şi

(2)
$$a_0 A \cap (x_0 + a_0 B) = \emptyset.$$

Din Propoziţia 5.2 $a_0 A + a_0 B$ va fi convexă, închisă, va conţine pe 0 şi din (2) $x_0 \notin a_0 A + a_0 B$. Din Teorema 5.1,2° va exista un $f \in E'$ astfel ca $|f(a_0 A + a_0 B)| \leqslant 1$ şi $f(x_0) = 1$. Fie $b_0 \in K$ astfel că $|a_0^{-1}| < |b_0| < 1$ şi fie $H = \{x \in E : f(x) = b_0\}$. Relaţia $|f(a_0 A)| \leqslant 1$ implică $|f(A)| \leqslant |a_0^{-1}| < |b_0|$ de unde $A \subseteq H_0$ ([4], 1.3). Acelaşi raţionament ne arată că $|f(B)| \leqslant |a_0^{-1}| < 1$, de unde $|f(x_0 + B)| = |f(x_0)| = 1 > |b_0|$. Deci $(x_0 + B) \cap H = \emptyset$ şi din [4] 3.2, mulţimea $x_0 + B$ va fi conţinută într-o clasă de echivalenţă diferită de H_0, adică H separă mulţimile A şi $x_0 + B$. Teorema este complet demonstrată.

Ţinînd cont de faptul că în cazul unei valuări discrete o mulţime convexă, închisă şi conţinînd pe 0 este Γ-închisă, rezultă

C o r o l a r 5.4. *Dacă valuarea lui K este discretă şi corpul rezidual al lui K este diferit de Z_2, teorema 5.3 rămîne adevărată dacă presupunem mulţimea A convexă şi închisă şi B convexă şi c-compactă.*

R e m a r c ă. Un studiu foarte amănunţit al noţiunii de separaţie în în spaţii vectoriale n.a. a fost făcut de J. P. CARPENTIER [1]. care printre altele demonstrează următoarea teoremă (Propoziţia 54).

Dacă E este un spaţiu vectorial peste corpul sferic complet K, cu corpul rezidual diferit de Z_2 şi C_1, C_2 sînt două submulţimi convexe şi disjuncte ale lui E atunci există un hiperplan H în E separînd pe C_1 şi C_2.

Demonstraţia acestui rezultat se bazează în ultimă instanţă pe o teoremă generală referitoare la module (Propoziţia 10), cu o demonstraţie destul de complicată. Folosind apoi faptul că dacă o parte a unui hiperplan conţine un punct interior hiperplanul este închis, rezultă separarea printr-un hiperplan închis a două mulţimi convexe disjuncte din care cel puţin una are un punct interior. De aici se obţine, ca şi în cazul real sau complex (vezi de exemplu [7]) separarea printr-un hiperplan închis a două submulţimi convexe, închise şi disjuncte ale unui s.l.c.n.a., din care una este compactă. Şi în acest caz condiţia de compactitate se poate înlocui cu condiţia de c-compactitate pe baza observaţiei următoare:

P r o p o z i ţ i a 5.5. *Dacă A, B sînt două submulţimi convexe, închise şi disjuncte ale unui s.l.c.n.a. E şi A este c-compactă atunci există o 0-vecinătate convexă U astfel ca $A \cap (B + U) = \emptyset$.*

D e m o n s t r a ţ i e. Pentru orice 0-vecinătate convexă şi deschisă a originii, U, mulţimea $B + U$ va fi convexă şi deschisă, deci şi închisă (vezi [5], pag. 29). Dacă pentru orice 0-vecinătate convexă, deschisă U avem $(B + U) \cup A \neq \emptyset$, atunci din c-compactitatea lui A rezultă că sistemul centrat de mulţimi convexe, închise $\{(B + U) \cap A\}$ are intersecţia nevidă. Deci există un x_0 astfel ca

$$x_0 \in \bigcap\{(B + U) \cap A\} = (\bigcap\{B + U\}) \cap A = \overline{B} \cap A = B \cap A,$$

în contradicţie cu ipoteza că mulţimile sînt disjuncte.

În demonstraţia dată în această lucrare teoremei de separaţie am urmat o cale analogă cu cea din cazul real sau complex (vezi de exemplu [7]). Din păcate nu am reuşit să ne debarasăm de ipoteza de Γ-închidere care în cazul unei valuări dense reprezintă efectiv o restrîngere faţă de condiţia de închidere.

THÉORÈMES DE SÉPARATION DES ENSEMBLES CONVEXES DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES NON-ARCHIMÉDIENS

RÉSUMÉ

Nous prouvons quelque résultats regardant la c-compacité et la séparation des ensembles dans les espaces localement convexes sur un corps valué non-archimédien.

BIBLIOGRAFIE

[1] Carpentier, J.-P. *Semi-normes et ensembles convexes dans un espaces vectoriel sur un corps valué ultramétrique*, Sém. Choquet, 1964–1965.

[2] Grande-de N. de Kimpe, *C-Compactness in locally K-convex spaces*, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., **74**, 176–180 (1971).

[3] Ingleton, A. W. *The Hahn-Banach Theorem for non-archimedean valued fields*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **48**, 41–45 (1952).

[4] Monna, A. F. *Séparation d'ensembles convexes dans un espace linéaire topologique sur un corps valué*, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., **67**, 399–421 (1964).

[5] — *Analyse non-archimédienne*, Springer-Verlag, Berlin (1967).

[6] Pisot, Ch. *Analyse p-adique et ensembles remarquables d'adèles algébriques*, Fac. Sci. Paris, Dep. Math. Institut H. Poincaré, Paris (1967).

[7] Schaefer, H. H. *Topological vector spaces*, New York, (1966).

[8] Springer, T. A. *Une notion de compacité dans la théorie des espaces vectoriels topologiques*, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., **68**, 182–189 (1965).

[9] Tiel, J. van *Espaces localement K-convexes*, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. **68**, 249–289 (1965).

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România

Primit la 28. V. 1973.