REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola 1, 1974, pp. 71–77

PROGRAMARE FRACŢIONARĂ LINIARĂ CU RESTRICŢII SUPLIMENTARE

de

HORVÁTH ION

(Cluj)

În această lucrare se rezolvă o problemă de programare fracţionară liniară în care funcţia scop (1) este supusă, în afara restricţiilor obişnuite (2) şi unor restricţii de forma (3). Pentru aceasta se foloseşte metoda expusă de CHARNES şi COOPER în [2], vol. II, apendice F, convenabil modificată. În ultima parte a lucrării se rezolvă un exemplu numeric.

1. Introducere

Considerăm problema generală de programare fracţionară liniară (PFL): să se maximizeze funcţia

$$R(x) = \frac{cx + \alpha}{dx + \beta} \tag{1}$$

supusă restricţiilor

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geqq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

unde A este o matrice $m \times n$ dimensională, x vector coloană n dimensional b vector coloană m dimensional, c şi d vectori linie n dimensionali iar α şi β constante scalare.

Presupunem că mulţimea soluţiilor sistemului (2) este nevidă, mărginită, şi în plus, pentru orice soluţie $\bar{x}$ a lui (2) avem: $d\bar{x} + \beta > 0$. Vom numi problema (1), (2) cu aceste ipoteze suplimentare, problemă de programare fracţionară liniară uzuală sau pe scurt, problemă favorizată.

Fie acum problema: să se maximizeze funcţia (1) cu condiţiile (2) la care se mai adaugă următoarele restricţii:

(3) $$Sx = 0$$

unde S este o matrice $p \times n$-dimensională.

Problema (1)—(3) o vom numi problema extinsă a PFL, sau pe scurt problema extinsă. În cazul cînd funcţia (1) este liniară problema a fost tratată de M. B. BAKES în lucrarea (1).

2. Abordarea problemei

Pentru rezolvarea problemei propuse vom aplica metoda simplex sub forma expusă de CHARNES şi COOPER în [2] vol. II. Acest lucru este posibil deoarece (1) este o funcţie monotonă şi deci soluţia optimă este atinsă pe un vîrf al poliedrului determinat de restricţii.

Vom nota cu A_F o bază a problemei uzuale. Fie A_E, p coloane din A diferite de coloanele lui A_F astfel încît, notînd cu S_F şi S_E coloanele din S corespunzătoare lui A_F şi A_E, matricea B de mai jos să fie o bază a problemei extinse:

(4) $$B = \begin{bmatrix} A_F & A_E \\ S_F & S_E \end{bmatrix}.$$

O soluţie de bază a problemei extinse va fi dată de următoarea relaţie matricială:

(5) $$\begin{bmatrix} A_F & A_E \\ S_F & S_E \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_F \\ x_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$x_F \geqq 0, \qquad x_E \geqq 0$$

care după efectuarea produsului din membrul drept se poate scrie sub forma

(5.1) $$A_F x_F + A_E x_E = b$$

(5.2) $$S_F x_F + S_E x_E = 0.$$

Deoarece A_F este o bază a problemei uzuale, există o matrice T_E unică, astfel încît

(6) $$A_E = A_F T_E.$$

Ţinînd seamă de (6) egalitatea (5.1) devine:

(5.12) $$A_F(x_F + T_E x_E) = b$$

Dacă notăm cu

(7) $$\hat{x} = x_F + T_E x_E$$

(5.1.2) se mai scrie

(5.1.3) $$A_F \hat{x} = b$$

Din relaţia (7) scoatem valoarea lui x_F care înlocuită în (5.2) ne dă

(8) $$S_F \hat{x} = (S_F T_E - S_E) x_E.$$

Soluţia x_F se poate obţine acum din (7):

(9) $$x_F = \hat{x} - T_E x_E.$$

A_F fiind o bază a problemei PFL, are o inversă unică A_F^{-1}, prin urmare din (5.1.3) avem că

(10) $$\hat{x} = A_F^{-1} b$$

care înlocuit în (8) ne dă

(11) $$S_F A_F^{-1} b = (S_F T_E - S_E) x_E.$$

Pentru a arăta că x_E există trebuie să arătăm că matricea $(S_F T_E - S_E)$ este nesingulară. Presupunem contrariul, atunci ecuaţia matricială

$$(S_F T_E - S_E)\, x = 0$$

are o soluţie diferită de zero. Să notăm $T_E x = y$. Avem atunci

$$S_F y - S_E x = 0$$

şi

$$A_F y - A_F T_E x = 0$$

ecuaţia care se mai pot scrie astfel

$$\begin{bmatrix} A_F & A_E \\ S_F & S_E \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = O$$

care înseamnă că coloanele problemei extinse nu sînt liniare independente, ceea ce contrazice definiţia bazei.

Prin urmare x_E există şi se va calcula cu formula

(8.1) $$x_E = (S_F T_E - S_E)_F^{-1} S_F A_F^{-1} b$$

Ţinînd seamă de (6), (9), (10) şi relaţia de mai sus valoarea lui x se va calcula cu formula

(9.1) $$x_F = A_F^{-1} b - A_F^{-1} A_E (S_F T_E - S_E)^{-1} S_F A_F^{-1} b$$

sau

$$x_F = [I_m - A_F^{-1}A_E(S_F T_E - S_E)^{-1}]A_F^{-1}b$$

unde am notat cu I_m matricea unitate $m \times m$ dimensională.

3. Schimbarea bazei

Introducem următoarele notații

$$A^i = \begin{bmatrix} a^i \\ s^i \end{bmatrix} \qquad a^i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \qquad s^i = \begin{bmatrix} a_{m+1,i} \\ \vdots \\ a_{m+p,i} \end{bmatrix} \qquad A^\circ = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$I = \{1,2, \ldots, m + p\}$ mulțimea indicilor vectorilor de bază iar $J = \{m + p + 1, \ldots, n\}$ mulțimea indicilor vectorilor nebazici.

Soluția obținută în secțiunea anterioară este optimă dacă se verifică condițiile stabilite de KANTI SWARUP în [5], care în cazul problemei extinse se scriu

$$\begin{aligned} \Delta_j &= (d_F x_F + d_E x_E + \beta)(c_j - c_F a^j - c_E s^j) \\ &- (c_F x_F + c_E x_E + \alpha)(d_j - d_F a^j - d_E s^j) \leqq 0 \qquad j \in J \end{aligned} \tag{12}$$

unde vectorii coloană c_F, d_F, c_E și d_E au ca componente elemente din c respectiv d corespunzătoare vectorilor care compun baza uzuală respectiv vectorilor care sunt cuprinși în A_E.

Dacă (12) nu se verifică pentru toți $j \in J$ înseamnă că soluția poate fi îmbunătățită. Fie $\Delta_r > 0$, $r \in J$, deci x_r va face parte din noua soluție și A^r va face parte din noua bază.

Criteriul pentru determinarea vectorului care iese din bază este acela din simplexul obișnuit. Indicele k al vectorului respectiv este dat de relația

$$\frac{x_k}{w_{kr}} = \min_{i \in I} \frac{x_j}{w_{jr}} \quad \text{pentru} \quad w_{jr} > 0 \tag{13}$$

unde w_{ir} sînt componentele vectorului $w_i = B^{-1}A^i$, $i \in J$

4. Observații

1) Matricea $S_F T_E - S_E$ din (8.1), în baza relației (6) se va scrie $S_F A_F^{-1} A_F - S_E$. Prin urmare, dacă $k \in \{m + 1, \ldots, m + p\}$, adică a^k nu aparține bazei uzuale, pentru opținerea noii soluții x_E, x_F, calculele se reduc substanțial deoarece produsele $S_F A_F^{-1}$ și $S_F A_F^{-1}b$ sînt cunoscute din iterația precedentă. În caz contrar se refac toate calculele.

2) Condiția de optim sub forma (12) a fost stabilită pentru prima dată de E. MUNTEANU și F. RADO în lucrarea [6].

5. Exemplu numeric

Să se maximizeze funcția

$$R(x) = \frac{3x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 1}{2x_1 + 4x_3 + 7x_5 + 10}$$

supusă restricțiilor

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 - x_4 + 5x_5 &\leqq 15 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + 2x_5 &\leqq 7 \\ 2x_1 + 9x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 &\leqq 3 \\ x_i \geqq 0 \quad i = 1, \ldots, 5 & \end{aligned}$$

și restricției suplimentare

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 0$$

Prin adăugarea variabilelor auxiliare x_6, x_7, x_8 inegalitățile de mai sus devin

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 - x_4 + 5x_5 + x_6 \qquad\qquad &= 15 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + 2x_5 \qquad + x_7 \qquad &= 7 \\ 2x_1 + 9x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 \qquad\qquad + x_8 &= 3 \\ x_i \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, 8 & \end{aligned}$$

Iterația 1—a : restricțiile problemei uzuală fiind sub formă canonică, baza **uzuală** va fi compusă din $A_F = (a^6, a^7, a^8)$. **Fie** $\boldsymbol{A_E = a^5}$. Atunci baza problemei extinse va fi

$$B_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_F & A_E \\ \hline S_F & S_E \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} a^6 & a^7 & a^8 & a^5 \\ \hline s^6 & s^7 & s^8 & s^5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Deoarece $S_F = (0,0,0)$, din formula (8.1) rezultă că $x_E = x_5 = 0$. Din **relațiile** (9) și (10) avem că

$$x_F = (x_6, x_7, x_8)^T = A_F^{-1}\,\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

unde prin $(x_\alpha, \ldots, x_\beta)^T$ s-a notat vectorul transpus,

prin urmare

$$x^1 = (x_6, x_7, x_8, x_5)^T = (15, 7, 3, 0)^T \text{ și } F(x^1) = 1/10.$$

Iterația 2-a : se calculează Δ_j, $j \in J = \{1,2,3,4\}$ cu relația (12) și se găsește $0 < \Delta_1 < \Delta_2$, $\Delta_3 < 0$ și $\Delta_4 < 0$. Vom introduce în bază pe A^2. Vectorul care iasă din bază se determină folosind metoda perturbării. (vezi de exemplu G. HADLEY [4]) :

$$\min_{i \in I} = \frac{x_i(\varepsilon)}{a_{i2}} = \frac{x_5(\varepsilon)}{a_{52}}, \quad a_{i2} < 0 \qquad I = \{6,7,8,5\}$$

Deci A^2 va lua locul vectorului A^5. Noua bază B_2 a problemei este

$$B_2 = \begin{bmatrix} A_F & A_E^* \\ S_F & S_E^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^6 & a^7 & a^8 & a^2 \\ s^6 & s^7 & s^8 & s^2 \end{bmatrix}$$

Formulele (8.1) și (9.1) ne dau

$$x_E = 0, \quad x_F = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Prin urmare $x^2 = (x_6, x_7, x_8, x_2)^T$ iar $F(x^2) = 1/10$.

Iterația 3-a : se calculează Δ_j, $j \in \{1,3,4,5\}$. Se determină $\Delta_1 < 0$, $\Delta_3 < 0$, $\Delta_5 < 0$, $\Delta_4 > 0$. Deci A^4 va face parte din noua bază.

$$B_3 = \begin{bmatrix} A_F^* & A_E^* \\ S_F^* & S_E^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^6 & a^7 & a^4 & a^2 \\ s^6 & s^7 & s^4 & s^2 \end{bmatrix}$$

Avem că $x_E = (S_F^* A_F^{*-1} A_E^* - S_E^*)^{-1} S_F^* A_F^{*-1} b = 3/11$, $x_F = (x_6, x_7, x_4)^T = A_F^{*-1} b - A_F^{*-1} A_E^* x_E = (303/22,\ 71/11,\ 3/22)^T$, $F(x^3) = 16/61$.

Iterația 4-a : se calculează Δ_j, $j \in \{1,3,5,8\}$. Se determină $\Delta_1 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\Delta_5 < 0$ și $\Delta_8 < 0$. Va intra în noua bază A^1. Cu formula (13) se determină că vectorul A^2 va ieși din bază. Noua bază va fi

$$B_4 = \begin{bmatrix} A_F^* & A_E^{**} \\ S_F^* & S_E^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_F^* & a^1 \\ S_F^* & s^1 \end{bmatrix}$$

Noua soluție este

$$x_E = (S_F^* A_F^{*-1} A_E^{**} - S_E^{**})^{-1} S_F^* A_F^{*-1} b = 1$$

$$x_F = A_F^{*-1} b - A_F^{*-1} A_F^{**} x_E = (49/4,\ 8,\ 1/4)^T$$

Soluția găsită $x^4 = (x_6, x_7, x_4, x_1)^T = (49/4,\ 8,\ 1/4, 1)^T$ este soluția optimă deoarece toți $\Delta_j < 0$, $j \in \{2,3,5,8\}$. Maximul funcției este $F\ (x^4) = 1/3$.

LINEAR FRACTIONAL PROGRAMMING WITH ADDITIONAL CONSTRAINTS

SUMMARY

In this paper we solve a linear fractional programming problem in which $f(x)$ is subject to usual constraints (2) and moreover to (3). We find the optimal solutions of (1)—(3) by direct split of the double reverse method due to CHARNES and COOPER [2]. The optimality of solutions is verified using the criterion of K. SWARUP [3], which is the same as with that of E. MUNTEANU and F. RADÓ [6]. In the last part of this paper we solve an numerical example.

BIBLIOGRAFIE

[1] Bakes M. D., *Solution of Special Linear Programming Problems with Additional Constraints.* — Operational Research Quarterly **17**, *4*, 425—445 (1966).
[2] Charnes, A., and Cooper, W. W., *Management Models and Industrials Applications of Linear Programming.* John Wiley and Sons, (N. Y. and London), 1961.
[3] — *Programming with Linear Fractional Functionals.* Naval Res. Log. Quarterly. **9**, *3—4*, 181—186 (1962).
[4] Hadley G., *Linear Programming.* Eddison—Wesley, 1963.
[5] Kanti Swarup, *Linear Fractional Functionals Programming* — Oper. Res. **13**, *6*, 1029—1036 (1965).
[6] Munteanu, E., și Radó F., *Calculul șarjelor celor mai economice la cuptoarele de topit fontă*, Studii și Cercetări de Matematică **XI**, 1960, Fascicolă anexă 149—158 (Cluj).

Institutul de calcul din Cluj,
al Academiei Republcii Socialiste România

Primit la 26. VI. 1973.