REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola 1, 1974, pp. 79—84

TEOREME DE MEDIE PENTRU COEFICIENŢII FOURIER — JACOBI

de

ALEXANDRU LUPAŞ

(Cluj)

Impunînd anumite condiţii de derivabilitate de ordin superior asupra unei funcţii $f: [-1,1] \to R$, N. CIORĂNESCU [1] stabileşte următoarea teoremă de medie pentru coeficenţii lui Legendre: ,,există cel puţin un punct $\xi \in [-1,1]$ astfel încît

$$(1)\qquad \int_{-1}^{1} P_n(x) f(x)\, dx = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} V^2(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, dx_0 dx_1 \ldots dx_n$$

unde $V(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ este determinantul lui Vandermonde.'' Menţionăm că formula de medie a lui N. Ciorănescu a constituit punctul de plecare al unor cercetări din domeniul analizei numerice (vezi [4]).

Utilizînd teoria ,,formei simple'' a funcţionalelor liniare, dezvoltată de către T. POPOVICIU [3], vom găsi o generalizare a formulei (1); totodată se va înlătura ipoteza restrictivă cu privire la derivabilitatea de ordin superior a funcţiilor ce intervin.

1. Folosim următoarele notaţii

$$w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \quad x \in (-1, 1), \quad \alpha > -1, \ \beta > -1,$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = k_n x^n + \ldots$ este polinomul lui Jacobi,

$$k_n = \frac{1}{2^n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n},$$

$j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ sînt rădăcinile lui $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Dacă $f: [-1,1] \to R$, atunci

$$D(x,j_1, j_2, \ldots, j_n; f) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \ldots x^{n-1} & f(x) \\ 1 & j_1 & j_1^2 \ldots j_1^{n-1} & f(j_1) \\ 1 & j_2 & j_2^2 \ldots j_2^{n-1} & f(j_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 1 & j_n & j_n^2 \ldots j_n^{n-1} & f(j_n) \end{vmatrix},$$

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \ldots a_m^{m-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 \ldots a_m^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & a_m & a_m^2 \ldots a_m^{m-1} \end{vmatrix},$$

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} = \int_{-1}^{1} w(x)\,|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|^2\, dx.$$

2. În continuare demonstrăm următoarea teoremă de medie care ne indică forma elegantă sub care se pot reprezenta coeficienţii seriei lui Jacobi.

TEOREMA 1. *Pentru orice* $f \in C[-1, 1]$ *există punctele distincte* $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$ *din intervalul* $[-1, 1]$, $\theta_i = \theta_i(f,\alpha,\beta)$, *astfel încît*

$$\int_{-1}^{1} w(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) f(x)\, dx = \tag{2}$$

$$= 2^{n+\alpha+\beta+1} B(n+\alpha+1, n+\beta+1)\, [\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n; f]$$

unde $[\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n; f]$ *este diferenţa divizată a funcţiei* f *pe punctele* $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$.

Demonstraţie. Avem

$$\int_{-1}^{1} w(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, D(x,j_1, j_2, \ldots, j_n; f)\, dx = \tag{3}$$

$$= (-1)^n V(j_1, j_2, \ldots, j_n) \int_{-1}^{1} w(x)\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x) f(x)\, dx.$$

Deoarece pentru $x \in [-1, 1]$

$$V(x, j_1, j_2, \ldots, j_n) = (-1)^n V(j_1, j_2, \ldots, j_n) \prod_{\nu=1}^{n} (x - j_\nu) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{k_n} V(j_1, j_2, \ldots, j_n) P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

din (3) obţinem

$$\int_{-1}^{1} w(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) f(x)\, dx = \frac{1}{k_n} \int_{-1}^{1} w(x)\, |P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|^2 \frac{D(x,j_1,j_2,\ldots,j_n; f)}{V(x,j_1, j_2,\ldots,j_n)}\, dx. \tag{4}$$

Pentru rigurozitatea calculelor, menţionăm că deşi nu am presupus derivabilitatea lui f, funcţia care apare apare sub semnul integrală în membrul drept din (4) ia valoare zero pentru $x = j_\nu$. Ţinînd seama de egalitatea

$$|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|^2 \frac{D(x,j_1, j_2, \ldots, j_n; f)}{V(x,j_1, j_2, \ldots, j_n)} = |P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|^2 \cdot [x, j_1, j_2, \ldots, j_n; f]$$

(pentru $x = j_\nu$ ambii termeni ai acestei egalităţi fiind egali cu zero) din (4) rezultă

$$\int_{-1}^{1} w(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) f(x)\, dx = \frac{2}{\binom{2n+\alpha+\beta}{n}} \int_{-1}^{1} w(x)\, |P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|^2\, [x, j_1, j_2, \ldots, j_n; f]\, dx. \tag{5}$$

Pentru n, α, β fixate să considerăm funcţionala liniară $A: C[-1, 1] \to R$ unde

$$A(f) = \int_{-1}^{1} w(x)\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x) f(x)\, dx, \quad f \in C[-1, 1].$$

Dacă $h \in C[-1, 1]$ este convexă de ordinul $(n-1)$ pe $[-1, 1]$, atunci din (5) observăm că A posedă proprietăţile

i) $A(h) \neq 0$

ii) $A(e_k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, unde $e_k(t) = t^k$; în plus

$$A(e_n) = \frac{h_n^{(\alpha,\beta)}}{k_n} = 2^{n+\alpha+\beta+1} B(n+\alpha+1, n+\beta+1).$$

Conform teoremei de reprezentare a lui T. POPOVICIU [3] (vezi şi [2], pag. 196) rezultă că există punctele distincte $\theta_i \in [-1,1]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, astfel încît

$$A(f) = A(e_n)\,[\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n ; f], \quad f \in C[-1, 1],$$

ceea ce completează demonstraţia.

O funcţie $f : [-1, 1] \to R$ se numeşte *absolut monotonă* (în sens generalizat) pe $[-1, 1]$ dacă diferenţele divizate de orice ordin şi pe orice sisteme de puncte distincte din $[-1, 1]$ sînt pozitive. Cu alte cuvinte, pentru orice puncte distincte $x_i^{(p)} \in [-1, 1]$, $i = 0, 1, \ldots, p$,

$$[x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \ldots, x_p^{(p)} ; f] > 0, \quad p = 0, 1, 2, \ldots .$$

Corolarul 1. *Coeficienţii Fourier-Jacobi ai unei funcţii $f \in C[-1,1]$, absolut monotonă pe $[-1,1]$, sînt numere pozitive.*

Dacă $f: [-1,1] \to R$ are o derivată de ordinul întîi continuă pe $[-1,1]$ se observă că $d(x) = [x, j_1, j_2, \ldots, j_n ; f]$ defineşte o funcţie continuă pe $[-1,1]$. În acest caz, punctele intermediare $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ din (2) pot să fie precizate.

Teorema 2. *Dacă $f \in C^{(1)}[-1,1]$, atunci există cel puţin un punct $\theta = \theta(f,\alpha,\beta) \in [-1,1]$ pentru care*

$$\int_{-1}^{1} w(x)\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x) f(x) dx = 2^{n+\alpha+\beta+1} B(n+\alpha+1, n+\beta+1)\,[\theta, j_1, j_2, \ldots, j_n ; f].$$

Demonstraţia rezultă imediat prin aplicarea în (5) a teoremei de medie a calculului integral.

3. Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n$ rădăcinile polinomului lui Legendre $P_n = P_n^{(0,0)}$ şi fie $T_n(x) = \cos n \arccos x$, $x \in [-1,1]$, restricţia la $[-1,1]$ a polinomului lui Cebîşev de speţa întîia. Deoarece

$$P_n^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x) = 2^{-2n} \binom{2n}{n} T_n(x), \quad x \in [-1,1],$$

considerînd $\alpha = \beta = 0$, $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, din teoremele 1 şi 2 găsim

Corolarul 2. *Pentru orice funcţie $f \in C[-1, 1]$ există sistemele de puncte distincte $(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$, $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ din $[-1,1]$ astfel încît*

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) f(x)\, dx = \frac{2^{n+1}}{2n+1} \binom{2n}{n}^{-1} [\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n ; f]$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\, dx = \frac{\pi}{2^n} [\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n ; f].$$

Corolarul 3. *Pentru orice $f \in C^{(1)}[-1,1]$ există punctele $\theta = \theta(f, P_n)$, $t = t(f, T_n)$ din intervalul $[-1,1]$ astfel încît*

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) f(x)\, dx = \frac{2^{n+1}}{2n+1} \binom{2n}{n}^{-1} [\theta, r_1, r_2, \ldots, r_n ; f]$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\, dx = \frac{\pi}{2^n} \left[t, \cos\frac{\pi}{2n}, \cos\frac{3\pi}{2n}, \ldots, \cos\frac{2n-1}{2n}\pi ; f\right].$$

MEAN VALUE THEOREMS FOR THE FOURIER-JACOBI COEFFICIENTS

ABSTRACT

The main results are the following: if $f \in C[-1,1]$, $g \in C^{(1)}[-1,1]$, then there are points $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$, θ from $[-1,1]$, $\theta_i \neq \theta_j$ for $i \neq j$, such that

$$\int_{-1}^{1} w(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) f(x)\, dx = 2^{n+\alpha+\beta+1} B(n+\alpha+1, n+\beta+1)\,[\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n ; f]$$

$$\int_{-1}^{1} w(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) g(x) dx = 2^{n+\alpha+\beta+1} B(n+\alpha+1, n+\beta+1)\,[\theta, j_1, j_2, \ldots, j_n ; g]$$

where

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \alpha > -1, \ \beta > -1,$$

$j_1, j_2, \ldots, j_n$ are the roots of the Jacobi polynomial $P_n^{(\alpha,\beta)}$,

$[x_0, x_1, \ldots, x_n ; h]$ denotes the divided difference of a function h at the specified knots x_i, $i = 0, \ldots, n$.

It follows immediately that the Fourier-Jacobi coefficients of an absolutely monotonic function are positive numbers.

BIBLIOGRAFIE

[1] Ciorănescu, N., *Une généralisation de la premiere formule de la moyenne et les polynômes de Tchebychef*. C.R (Paris) **206**, 1782–1784 (1938).
[2] Popoviciu, Elena, *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării*. Editura Dacia, (Cluj), 1972.
[3] Popoviciu, T., *Asupra restului în unele formule liniare de aproximare ale analizei*. Stud. Cerc. Mat. (Cluj), **X**, 2, 337–389 (1959).
[4] Saxena, R. B., *On a generalization of Simpson's formula*. Ann. Polon. Math., **XII**, 1, 71–81 (1962).

Institutul de Calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România

Primit la 12.XI.1973.