REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola 1, 1974, pp. 85—93

ASUPRA UNOR METODE DE INTEGRARE NUMERICĂ

de

ALEXANDRU LUPAŞ
(Cluj)

Scopul acestui articol este de a prezenta o nouă metodă de cuadratură, aceasta bazîndu-se pe cea mai bună aproximare, a unei funcţii $f:E \to \mathrm{R}$ prin polinoame de grad $n-1$, pe mulţimea E care este o mulţime discretă formată din $n+1$ puncte distincte.

1. O metodă preinterpolatoare de cuadratură. În cele ce urmează utilizăm următoarele notaţii:

$$E = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \; x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), \; -\infty < a < b < +\infty,$$

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n), \; h = \frac{b-a}{n},$$

$$\Omega_j(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-j+1)(x-j-1)\ldots(x-n)$$

$$I_j = \int_0^n \Omega_j(x)\,dx, \; S_n(x) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\omega(x)}{x-x_k},$$

$[z_0, \ldots, z_s; f]$ este diferenţa divizată de ordinul s,

$L_m(t_0, t_1, \ldots, t_m; g|x)$ este polinomul de interpolare al lui Lagrange ataşat unei funcţii reale g definită pe nodurile $t_0, \ldots, t_m$; $\mathfrak{L}_m$ este mulţimea polinoamelor de grad m;

Fie $f: [a, b] \to \mathrm{R}$; prin $\mathfrak{L}_{n-1}f = \mathfrak{L}_{n-1}(E; f|.)$ notăm polinomul, de grad $n-1$, de cea mai bună aproximare a funcţiei f pe mulţimea E. Cu alte cuvinte

$$\max_E |f - \mathfrak{L}_{n-1}f| \leqslant \max_E |f-p| \text{ pentru orice } p \in \mathfrak{L}_{n-1}.$$

Lema 1. *Pentru* $x_j \in E,\ j = 0, 1, \ldots, n$, *avem*

$$\mathfrak{L}_{n-1}(E\,;\, f\,|\,x) = L_n(x_0, x_1, \ldots, x_n\,;\, f|x) - \tag{1}$$

$$- [x_0, x_1, \ldots, x_n\,;\, f]\, S_n(x), \quad x \in \mathrm{R}.$$

Demonstrație. Din [1, teorema 2], prin efectuarea unor calcule simple găsim

$$\mathfrak{L}_{n-1}(E\,;\, f\,|\,x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} L_{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n\,;\, f|x).$$

Pe de altă parte

$$L_{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n\,;\, f|x) =$$

$$= L_n(x_0, x_1, \ldots, x_n\,;\, f|x) - [x_0, x_1, \ldots, x_n\,;\, f]\,\frac{\omega(x)}{x - x_k}$$

ceea ce completează demonstrația.

Aplicînd unele rezultate cunoscute în legătură cu polinomul de interpolare al lui Lagrange, se stabilește

Lema 2.

$$f(x) - \mathfrak{L}_{n-1}(E\,;\, f|x) = \omega(x)\,[x, x_0, \ldots, x_n\,;\, f] +$$

$$+ [x_0, x_1, \ldots, x_n\,;\, f]\, S_n(x),\ x \notin E,$$

$$f(x_j) - \mathfrak{L}_{n-1}(E\,;\, f|x_j) = (-1)^{n-j}\, n!\left(\frac{b-a}{2n}\right)^n [x_0, x_1, \ldots, x_n\,;\, f],\quad x_j \in E.$$

Se mai observă că polinomul $\mathfrak{L}_{n-1}(E\,;\, f|.)$ se reprezintă și sub forma

$$\mathfrak{L}_{n-1}(E\,;\, f|x) = \sum_{j=0}^{n} m_{j,\,n-1}(x)\, f(x_j), \qquad x \in \mathrm{R}, \tag{2}$$

unde

$$m_{j,\,n-1}(x) = \frac{(-1)^{n-j}}{j!\,(n-j)!\,h^n}\left[\frac{\omega(x)}{x - x_j} - S_n(x)\right], \quad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Transformarea $\mathfrak{L}_{n-1,\,E} : f \to \mathfrak{L}_{n-1}(E\,;\, f|.)$ se numește „operator de preinterpolare" (vezi [1]). După cum se constată $\mathfrak{L}_{n-1,E}$ este un operator liniar definit pe spațiul liniar al funcțiilor $E \to \mathrm{R}$. Funcțiile $m_{j,n-1} = m_{j,n-1}(E\,;.) \in \mathfrak{L}_{n-1},\ j = 0, 1, \ldots, n$, definite prin (3) se numesc „polinoamele fundamentale de preinterpolare (relativ la E)". În realitate se observă că

polinomul de preinterpolare $\mathfrak{L}_{n-1}(E\,;\, f|.)$ coincide cu polinomul lui Lagrange $L_n(x_0, x_1, \ldots, x_n\,;\, f_n|.)$ unde $f_n : [a, b] \to \mathrm{R}$ este definită prin

$$f_n(t) = f(t) - [x_0, x_1, \ldots, x_n\,;\, f]\ Y_n(t), \quad t \in [a, b],$$

$$Y_n(t) = \frac{(-1)^{n-j}\, n!}{2^n}\left[1 - \frac{2}{h}(t - x_j)\right],\ t \in [x_j, x_{j+1}],\ j = 0, \ldots, n-1.$$

În adevăr

$$L_n(x_0, x_1, \ldots, x_n\,;\, Y_n|x) = S_n(x)$$

și conform lui (1) afirmația este demonstrată. Deoarece

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n\,;\, Y_n] = 1$$

rezultă că

$$L_n(x_0, x_1, \ldots, x_n\,;\, f_n|.) \in \mathfrak{L}_{n-1}.$$

În analogie cu formulele interpolatoare de cuadratură considerăm formula de cuadratură (exactă)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mathfrak{L}_{n-1}(E\,;\, f|x)\,dx + R_n[f]$$

unde $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ este presupusă Riemann integrabilă pe $[a, b]$. Din (2) — (3), această egalitate se mai scrie

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} w_{j,n}\, f(x_j) + R_n[f],\ x_j \in E,\ j = 0, 1, \ldots, n, \tag{4}$$

unde

$$w_{j,n} = \int_a^b m_{j,\,n-1}(x)\,dx. \tag{5}$$

Egalitatea (4) definește *formula preinterpolatoare de cuadratură* (pe noduri echidistante), $R_n[f]$ fiind restul aproximării, relativ la f. În cele ce urmează punem în evidență cîteva proprietăți ale acestei metode de aproximare.

Lema 3. *Dacă* $x_j \in E,\ j = 0, 1, \ldots, n$, *atunci*

$$\int_a^b \frac{\omega(x)}{x - x_k}\,dx = (-1)^n \int_a^b \frac{\omega(x)}{x - x_{n-k}}\,dx,\ k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{6}$$

Demonstrație. Efectuînd schimbarea de variabilă $x = \frac{a+b}{2} + t$, se găsește

$$\int_a^b \frac{\omega(x)}{x - x_k}\, dx = \mathcal{J}$$

$$\mathcal{J} = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left\{\prod_{\nu=0}^{k-1} \left[t + \frac{b-a}{2n}(n - 2\nu)\right]\right\} \left\{\prod_{\nu=0}^{n-k-1} \left[t - \frac{b-a}{2n}(n - 2\nu)\right]\right\} dt.$$

Pentru $x = \frac{a+b}{2} - t$ obținem

$$\int_a^b \frac{\omega(x)}{x - x_{n-k}}\, dx = (-1)^n \mathcal{J},$$

ceea ce trebuia să demonstrăm.

TEOREMA 4. *Formula preinterpolatoare de cuadratură* (4) *are următoarele proprietăți:*

1) *gradul de exactitate al formulei este cel puțin* $n - 1$, *adică*

$$R_n[p] = 0 \text{ pentru orice } p \in \mathfrak{P}_{n-1}.$$

2) *Dacă* $e_n(x) = (x - a)^n$, *atunci*

$$R_n[e_n] = \int_a^b S_n(x)dx = \frac{h^{n+1}}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} I_k.$$

In particular

$$R_n[e_n] = 0 \text{ pentru } n = 2m + 1.$$

3) *Coeficienții* $w_{j,n}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, *definiți prin* (5), *sînt simetrici; deci*

$$w_{j,n} = w_{n-j,n}, \quad j = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right].$$

In plus

$$w_{j,n} = \frac{(-1)^{j+1}}{j!(n-j)!} h \cdot I_j, \quad n = 2m + 1, \tag{7}$$

$$w_{j,n} = \begin{cases} \frac{(-1)^j h}{j!(n-j)!}\left[I_j - \frac{1}{2^{n-2}}\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}}\binom{n}{2k-1} I_{2k-1} - \frac{n \cdot n!}{2^n}\right], & n = 4m \\ \frac{(-1)^j h}{j!(n-j)!}\left[I_j - \frac{1}{2^{n-2}}\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{4}}\binom{n}{2k} I_{2k} + \frac{n \cdot n!}{2^n}\right], & n = 4m + 2 \end{cases} \tag{8}$$

Demonstrație. 1) Fie p un polinom arbitrar de grad $n - 1$; din (1) găsim

$$\mathfrak{L}_{n-1}(E; p|x) = p(x)$$

precum și

$$\mathfrak{L}_{n-1}(E; e_n|x) = e_n(x) - S_n(x), \quad x \in R.$$

2) Avem

$$R_n[e_n] = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_a^b \frac{\omega(x)}{x - x_k}\, dx.$$

Schimbarea de variabilă $x = a + th$ ne conduce la rezultatul dorit. Conform lemei 3, pentru $n = 2m + 1$

$$R_n[e_n] = \frac{h^{n+1}}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k} I_{n-k} = -R_n[e_n] \tag{9}$$

sau

$$R_n[e_n] = 0.$$

3) Dacă $n = 2m$, avem

$$m_{n-j,\,n-1}(x) - m_{j,\,n-1}(x) = \frac{(-1)^j}{n!}\binom{n}{j}\frac{1}{h^n}\left[\frac{\omega(x)}{x - x_{n-j}} - \frac{\omega(x)}{x - x_j}\right].$$

Prin integrare și utilizînd lema 3, concludem cu egalitățile

$$w_{n-j,n} - w_{j,n} = \frac{(-1)^j}{n!}\binom{n}{j}\frac{1}{h^n}\left[\int_a^b \frac{\omega(x)}{x - x_{n-j}}\, dx - \int_a^b \frac{\omega(x)}{x - x_j}\, dx\right] = 0.$$

Fie $n = 2m + 1$; din (5), (3), (9) și (6)

$$w_{n-j,n} - w_{j,n} = \frac{(-1)^j}{n!}\binom{n}{j}\frac{1}{h^n}\left[\int_a^b \frac{\omega(x)}{x - x_{n-j}}\, dx + \int_a^b \frac{\omega(x)}{x - x_j}\, dx - 2R_n[e_n]\right] = 0.$$

Pentru n impar (5), (3) şi (9) ne permit să scriem

$$w_{j,n} = \frac{(-1)^{j+1}}{j!(n-j)!\,h^n}\left[\int_a^b \frac{\omega(x)}{x-x_j}\,dx - R_n[e_n]\right] = \frac{(-1)^{j+1}h}{j!\,(n-j)!} I_j.$$

Egalităţile (8) rezultă din (5) şi lema 3.

Este avantajos de a folosi (7) şi (8) pentru calculul elementelor matricei $(w_{j,n})$ $j = 0, 1, \ldots, n$. Astfel cu notaţia $d = b - a$ se obţine $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{pmatrix} w_{01} & w_{11} & & & & \\ w_{02} & w_{12} & w_{22} & & & \\ w_{03} & w_{13} & w_{23} & w_{33} & & \\ w_{04} & w_{14} & w_{24} & w_{34} & w_{44} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} & \frac{d}{2} & & & & \\ \frac{d}{4} & \frac{d}{2} & \frac{d}{4} & & & \\ \frac{d}{8} & \frac{3d}{8} & \frac{3d}{8} & \frac{d}{8} & & \\ \frac{5d}{48} & \frac{d}{4} & \frac{7d}{24} & \frac{d}{4} & \frac{5d}{48} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Corolar 5. *In cazul unui număr par de noduri echidistatante formula preinterpolatoare de cuadratură coincide cu formula de cuadratură a lui Newton-Côtes.*

Demonstraţia acestei afirmaţii este imediată; ea rezultă din faptul că pentru $n = 2m + 1$, formula preinterpolatoare de cuadratură are gradul de exactitate efectiv egal cu n. De asemenea rezultă şi din egalităţile (7), $w_{j,n}$ fiind chiar coeficienţii formulei de cuadratură a lui Newton-Côtes. Astfel se poate găsi o nouă interpretare geometrică a formulei trapezului ($n = 1$) şi a formulei lui Newton ($n = 3$).

2. O metodă optimală de integrare numerică. Utilizînd notaţiile din primul paragraf să notăm prin $\mathfrak{M}_{n-1}(E)$ mulţimea formulelor exacte de cuadratură, de forma

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} c_{kn} f(x_k) + R_n[f]; \quad x_j \in E,\ j = 0, 1, \ldots, n,$$

care au gradul de exactitate cel puţin egal cu $n - 1$. Deoarece o astfel de formulă depinde de coeficienţii $c_{0n}, c_{1n}, \ldots, c_{nn}$, se notează prin $\|c_{kn}\|$ un element al mulţimii $\mathfrak{M}_{n-1}(E)$. Ne propunem de a determina o formulă $\|c^*_{kn}\|$ care să verifice criteriul de optimalitate

$$\sum_{k=0}^{n} |c^*_{kn}|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} |c_{kn}|^2 \quad \text{pentru orice } \|c_{kn}\| \in \mathfrak{M}_{n-1}(E). \tag{10}$$

Lema 6. *Dacă* $\|c_{kn}\| \in \mathfrak{M}_{n-1}(E)$, *atunci*

$$c_{0n} = C_n$$

$$c_{kn} = (-1)^k \binom{n}{k}\left[C_n + \frac{(-1)^n}{n!} h(I_k - I_0)\right],\quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Demonstraţie. Pentru i arbitrar pe $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ fie $g \in \mathfrak{P}_{n-1}$ definit prin

$$g(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_i)(x-x_{i+1})},\quad x \in R.$$

În acest caz

$$g(x_j) = \begin{cases} 0 & j = 0, 1, \ldots, i-1, i+2, \ldots, n \\ h^{n-1}(-1)^{n-i-1}\, i!(n-i)!, & j = i \\ h^{n-1}(-1)^{n-i-1}\,(i+1)!(n-i-1)!, & j = i+1. \end{cases}$$

Deoarece $R_n[g] = 0$ se găseşte

$$\int_a^b \frac{\omega(x)}{(x-x_i)(x-x_{i+1})}\,dx = c_{in}g(x_i) + c_{i+1,n}g(x_{i+1}),\quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Rezolvînd această relaţie de recurenţă obţinem (11).

Lema 7. *Există o singură formulă* $\|c^*_{kn}\| \in \mathfrak{M}_{n-1}(E)$ *optimală în sensul criteriului* (10); *mai precis*

$$c^*_{0n} = \frac{(-1)^n h}{n!}\left[I_0 - \frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2 I_j\right] \tag{12}$$

$$c^*_{kn} = (-1)^k\binom{n}{k}\left[c^*_{0n} + \frac{(-1)^n}{n!} h(I_k - I_0)\right],\quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Demonstrație. Fie $||c_{kn}|| \in \mathfrak{M}_{n-1}(E)$; din (11)

$$\sum_{k=}^{n} |c_{kn}|^2 = \binom{2n}{n} C_n^2 + 2C_n \frac{(-1)^n}{n!} h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2 (I_k - I_0) +$$

$$+ \left(\frac{h}{n!}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2 (I_k - I_0)^2.$$

Presupunînd criteriul (10) verificat găsim

$$c_{on}^* = C_n = \frac{(-1)^n h}{n!}\left[I_0 - \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 I_j\right]$$

ceea ce completează demonstrația.

Pentru $n = 2m + 1$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 I_j = 0,$$

adică

$$c_{kn}^* = \frac{(-1)^{n-k} h}{n!} I_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Cu alte cuvinte din (7) rezultă

TEOREMA 8. *Pentru $n = 2m + 1$ singura formulă optimală de cuadratură relativ la* (10) *este formula preinterpolatoare pe noduri echidistante.*

În încheiere menționăm că un studiu similar se poate face în cazul unor noduri fixate arbitrar pe $[a, b]$.

ON SOME METHODS OF NUMERICAL INTEGRATION

ABSTRACT

Let $E = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $x_k = a + \frac{k}{n}(b - a)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, and let $\mathfrak{L}_{n-1} f = \mathfrak{L}_{n-1}(E; f|.)$ be the polynomial, of degree $(n - 1)$, of the best approximation of a function f at the set E, that is

$$\max_E |f - \mathfrak{L}_{n-1} f| \leqslant \max_E | f - p |$$

for every polynomial p of the degree $(n - 1)$. For a Riemann integrable function $f: [a, b] \to R$ it is studied the quadrature formula

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{j=0}^{n} w_{j,n} f(x_j) + R_n [f]$$

where

$$\sum_{j=0}^{n} w_{j,n} f(x_j) = \int_a^b \mathfrak{L}_{n-1}(E; f | x)\, dx.$$

BIBLIOGRAFIE

[1] Motzkin T. S.; Sharma A., *Next-to-interpolatory approximation on sets with multiplicities.* Canad. J. Math., **18**, 1196–1211 (1966).

Primit la 23. V. 1973.

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România