REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola 1, 1974, pp. 95—101

FUNCŢII CU VARIAŢIE MĂRGINITĂ DE ORDIN SUPERIOR (I)

de

LUCIANA LUPAŞ

(Cluj)

1. În această lucrare ne propunem să studiem clase de funcţii cu variaţie mărginită de ordin superior pentru care este adevărată o teoremă de descompunere de tip Jordan faţă de un con dat de funcţii. În prima parte, vom enumera cîteva clase de funcţii cu variaţie mărginită de ordin superior care se exprimă ca diferenţa dintre două funcţii neconcave de ordin superior şi vom stabili legătura dintre ele. În continuare se defineşte o nouă noţiune de variaţie mărginită de ordin superior, relativă la conuri de funcţii stelare pe un interval de forma $[0,a]$, $a > 0$.

Fie $F\,[a, b]$ mulţimea tuturor funcţiilor reale de variabilă reală definite pe $[a, b]$. Dacă notăm cu K_0 conul funcţiilor nedescrescătoare pe $[a, b]$, iar cu

$$V\,(K_0;\,[a, b];\,.)\;:F\,[a, b] \to R \cup \{+\infty\}$$

variaţia totală în sensul lui Jordan pe $[a, b]$, atunci mulţimea

$$\mathcal{V}\,(K_0;\,[a, b]) = \{f \in F\,[a, b],\; V\,(K_0;\,[a, b];f) < +\infty\}$$

este clasa funcţiilor cu variaţie mărginită în sens obişnuit şi are loc egalitatea bine cunoscută

$$\mathcal{V}\,(K_0;\,[a, b]) = K_0 - K_0. \tag{1.1}$$

O notaţie asemănătoare va fi utilizată şi pentru clasele mai generale de care ne vom ocupa.

2. Se cunosc diferite generalizări ale funcţiilor cu variaţie mărginită. Dintre acestea menţionăm rezultatele lui ROBERTS A. W. şi D. E. VARBERG [6] şi ale lui RUSSEL A. M. [7] cu privire la funcţiile cu variaţie mărginită de ordinul al doilea, precum şi lucrările [2], [5], [8] şi [9] care se ocupă de funcţii cu variaţie mărginită de ordinul n, $n \in N$.

În [4], MOLDOVAN ELENA dă o noţiune de funcţie cu variaţie mărginită de ordin superior mult mai generală, utilizînd mulţimi interpolatoare de ordinul n.

Notăm cu K_n conul funcţiilor neconcave de ordinul n pe $[a, b]$. Atunci cînd este cazul, vom utiliza notaţia $K_n[a, b]$. Reamintim definiţia unei funcţii neconcave de ordinul n [5].

Definiţia 2.1. *O funcţie* $f \in F[a, b]$ *se numeşte neconcavă de ordinul n pe* $[a, b]$ *dacă pentru orice sistem de* $n + 2$ *puncte distincte* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ *din* $[a, b]$ *are loc inegalitatea*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] \geq 0. \tag{2.1}$$

În [5], T. POPOVICIU a dat următoarea generalizare a noţiunii de funcţie cu variaţie mărginită:

Fie (d) o diviziune oarecare $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leq b$ a intervalului $[a, b]$, cu $k \geq n + 2$, $n \in N$, fixat, şi funcţionala

$$V_n^{(1)}(K_n; [a, b]; .) : F[a, b] \to R \cup \{+\infty\}$$

definită prin

$$V_n^{(1)}(K_n; [a, b]; f) = \sup_{(d)} \sum_{i=1}^{k-n-1} |[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}; f]| (x_{i+n+1} - x_i) \tag{2.2}$$

pentru orice $f \in F[a, b]$. Supremul în formula (2.2) se ia relativ la toate diviziunile (d) posibile ale intervalului $[a, b]$.

Definiţia 2.2. *O funcţie* $f \in F[a, b]$ *este cu variaţie mărginită de ordinul n pe* $[a, b]$ *dacă*

$$V_n^{(1)}(K_n; [a, b]; f) < +\infty .$$

Recent, BROWN G. [2] şi RUSSEL A. M. [8], [9] au considerat clase asemănătoare de funcţii cu variaţie mărginită.

Definiţia 2.3. (RUSSEL A. M.) *O funcţie* $f \in F[a, b]$ *este cu variaţie mărginită de ordinul n pe* $[a, b]$ *dacă*

$$V_n^{(2)}(K_n; [a, b]; f) < +\infty$$

unde $V_n^{(2)}(K_n; [a, b]; .) : F[a, b] \to R \cup \{+\infty\}$ *este definită de*

$$V_n^{(2)}(K_n; [a, b]; f) = \sup_{(d_h)} \sum_{i=0}^{k-n-1} h^{-n} |\Delta_h^{n+1} f(x_i)| \tag{2.3}$$

pentru orice $f \in F[a, b]$.

Am notat cu (d_h), $h > 0$, o diviziune de forma $x_i = x_0 + i h$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $a \leq x_0 < x_0 + h < \ldots < x_0 + kh \leq b$ a intervalului $[a, b]$, iar cu $\Delta_h^{n+1} f(x)$ diferenţa finită de ordinul $n + 1$ a funcţiei f pe punctul x şi de pas $h > 0$.

Definiţia 2.4. (BROWN G.) *Spunem că o funcţie* $f \in F[a, b]$ *este cu variaţie mărginită de ordinul n pe* $[a, b]$ *dacă*

$$V_n^{(3)}(K_n; [a, b]; f) < +\infty$$

unde funcţionala $V_n^{(3)}(K_n; [a, b]; .) : F[a, b] \to R \cup \{+\infty\}$ *este dată de*

$$V_n^{(3)}(K_n; [a, b]; f) = \sup_{(d_h)} \sum_{i_{n+1}=0}^{k-n-1} \sum_{i_n=0}^{i_{n+1}} \cdots \sum_{i_1=0}^{i_2} |\Delta_h^{n+1} f(x_{i_1})| , \tag{2.4}$$

$f \in F[a, b]$.

Dacă notăm cu $\mathcal{V}_n^{(j)}(K_n; [a, b]) = \{f \in F[a, b], V_n^{(j)}(K_n; [a,b]; f) < + \infty\}$ $j = 1,2,3$, atunci are loc următoarea

TEOREMA 2.1. *a) Au loc următoarele relaţii de incluziune*

$$\mathcal{V}_n^{(1)}(K_n; [a, b]) \subset \mathcal{V}_n^{(2)}(K_n; [a, b]) \subset \mathcal{V}_n^{(3)}(K_n; [a, b]). \tag{2.5}$$

b) Dacă $C[a, b] = \{f \in F[a, b],\ f$ *continuă pe* $[a, b]\}$ *atunci*

$$\mathcal{V}_n^{(1)}(K_n; [a, b]) = \mathcal{V}_n^{(j)}(K_n; [a, b]) \cap C[a, b],\ j = 2,3. \tag{2.6}$$

Prima parte a teoremei rezultă imediat din modul în care au fost definite cele trei clase de funcţii (2.2), (2.3) şi (2,4). A doua afirmaţie a fost menţionată în [5] (cap. IV, § 31) în cazul mai general al funcţiilor mărginite.

Cum autorii mai sus citaţi [2] şi [8] consideră numai cazul funcţiilor continue cu variaţie mărginită, rezultatele lor revin la cele demonstrate în [5].

Enunţăm aici şi teorema de descompunere de tip Jordan pentru clasele de funcţii cu variaţie mărginită considerate mai sus.

TEOREMA 2.2. *O funcţie* $f \in C[a, b]$ *este cu variaţie mărginită de ordinul n pe* $[a, b]$ *dacă şi numai dacă f este diferenţa a două funcţii neconcave de ordinul n pe* $[a, b]$:

$$\mathcal{V}_n^{(1)}(K_n; [a,b]) = \mathcal{V}_n^{(j)}(K_n; [a, b]) \cap C[a,b] = K_n - K_n,\ j = 2,3. \tag{2.6}$$

3. Fie subspaţiul liniar $F_0[0, a] \subset F[0,a]$ al funcţiilor $f: [0,a] \to R$ cu $f(0) = 0$ şi $C_0[0, a] = \{f \in F_0[0,a],\ f$ continuă pe $[0,a]\}$.

Definiţia 3.1. *O funcţie* $f \in F_0[0, a]$ *se numeşte stelară de ordinul n pe* $[0,a]$ *dacă oricare ar fi punctele* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ *din* $[0,a]$, *distincte şi diferite de zero, are loc inegalitatea*

$$[0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] \geq 0. \tag{3.1}$$

Cu S_0 notăm conul funcţiilor nenegative din $C_0[0,a]$, iar cu S_n conul funcţiilor stelare de ordinul $n \geq 1$ din $C_0[0,a]$.

În continuare, ne propunem să definim o clasă de funcţii cu variaţie mărginită de ordin superior pentru care să existe o teoremă de descompunere de tip Jordan faţă de conurile S_n definite anterior.

Pentru fiecare diviziune (d) $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leqslant a$, a intervalului $[0,a]$, cu $k \geqslant n+1$, $n \in N$, definim

$$\sigma_n(d\,;[0,a];.) : F_0\,[0,a] \to R$$

astfel

$$\sigma_n(d\,;[0,a];f) = \sum_{i=1}^{k-n} |[0,x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}\,; f]|\,(x_{i+n} - x_i) \tag{3.2}$$

oricare ar fi $f \in F_0\,[0,a]$.

Apoi, fie

$$V_n(S_n\,;[0,a]\,;.) : F_0\,[0,a] \to R \cup \{+\infty\}$$

o funcţională variaţie totală de ordinul n dată de

$$V_n(S_n\,;[0,a]\,;f) = \sup_{(d)} \sigma_n\,(d\,;[0,a];f)\,. \tag{3.3}$$

Definiţia 3.2. *O funcţie $f \in F_0\,[0,a]$ se numeşte cu variaţie mărginită de ordinul n pe* $[0,a]$ *dacă* $V_n(S_n\,;[0,a]\,;f) < +\infty$.

Fie

$$\mathcal{V}_n(S_n\,;[0,a]) = \{f \in F_0\,[0,a],\ V_n(S_n\,;[0,a]\,;f) < \infty\}.$$

TEOREMA 3.1. *Dacă* $f \in \mathcal{V}_n^{(1)}(K_n\,;[0,a]) \cap F_0\,[0,a]$ *atunci* $f \in \mathcal{V}_n(S_n\,;[0,a])$.

Proprietatea enunţată în această teoremă rezultă imediat din (2.2) şi (3.2) şi exprimă faptul că în $F_0\,[0,a]$ noţiunea de funcţie cu variaţie mărginită definită în acest paragraf este mai generală decît cea dată de definiţia 2.2.

TEOREMA 3.2. $\mathcal{V}_n(S_n\,;[0,a]) \supset \mathcal{V}_{n+1}(S_{n+1}\,;[0,a])$.

Demonstraţie. Deoarece $f \in \mathcal{V}_{n+1}(S_{n+1}\,;[0,a])$, rezultă că există un număr pozitiv λ astfel încît pentru orice diviziune

(d) $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leqslant a$, $k \geqslant n+2$, să avem

$$\sigma_{n+1}(d\,;[0,a]\,;f) \leqslant \lambda.$$

Dar putem scrie

$$\sigma_{n+1}(d\,;[0,a]\,;f) = \sum_{i=1}^{k-n-1} |[0,x_i, \ldots, x_{i+n}\,;f] - [0,x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}\,;f]| \leqslant \lambda$$

de unde rezultă existenţa unui număr $\mu_n > 0$ astfel ca

$$|[0,x_i, \ldots, x_{i+n}\,;f]| \leqslant \mu_n$$

pentru orice alegere a punctelor $x_i, \ldots, x_{i+n}$, distincte, din $]0,a]$. Intradevăr, dacă fixăm punctele $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1} < a$ din $[0,a]$ şi notăm $|[0, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\,;f]| = A$, se observă că $\mu_n = 2\lambda + A$.

Deci

$$\sigma_n(d\,;[0,a]\,;f) \leqslant \mu_n \sum_{i=1}^{k-n} (x_{i+n} - x_i) \leqslant \mu_n(a-0)\,.$$

Cum diviziunea (d) a fost arbitrară, rezultă concluzia teoremei.

Lema 3.3. *a) Dacă* $f \in \mathcal{V}_1(S_1\,;[0,a])$, *atunci f este continuă pe punctul* $x = 0$.

b) *Dacă* $n > 1$, *atunci* $\mathcal{V}_n(S_n\,;[0,a]) \subset C_0\,[0,a]$.

Demonstraţie. a) Dacă f este cu variaţie mărginită de ordinul întîi, rezultă ca şi în demonstraţia teoremei 3.2. că există $\mu_1 > 0$ astfel încît

$$|[0,x\,;f]| \leqslant \mu_1, \text{ pentru orice } x > 0.$$

de unde deducem continuitatea funcţiei f pe $x = 0$.

b) Dacă $f \in \mathcal{V}_n(S_n\,;[0,a])$, cu $n > 1$, atunci din teorema 3.2 şi din afirmaţia a) de mai sus rezultă că f este continuă pe $x = 0$. De asemenea, există şi în acest caz un număr $\mu_{n-1} > 0$ astfel ca

$$|[0, x_i, \ldots, x_{i+n-1}\,;f]| \leqslant \mu_{n-1}$$

oricare ar fi punctele $x_i, x_{i+n}, \ldots, x_{i+n-1}$ distincte, din $[0,a]$ şi diferite de zero. Cum $n - 1 > 0$, rezultă (vezi [3] şi [5]) că funcţia $\varphi:]0,a] \to R$, $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$ este continuă pe orice punct $x \in]0,a]$. Deci $f \in C_0\,[0,a]$, şi lema este demonstrată.

Dacă $0 < c < a$, convenim ca prin diviziune (d) a intervalului $[c,a]$ să înţelegem un sistem de puncte x_i, $i = 1,2, \ldots, k$ astfel încît $0 < c \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leqslant a$, iar cu $V_n(S_n\,;[c,a]\,;f)$ notăm supremumul numerelor

$$\sigma_n\,(d\,;[c,a]\,;f) = \sum_{i=1}^{k-n} |\,[0, x_i, \ldots, x_{i+n}\,;f]\,|\,(x_{i+n} - x_i)$$

relativ la toate diviziunile posibile (d) ale intervalului $[c,a]$.

TEOREMA 3.4. *Dacă* $f \in \mathcal{V}_n(S_n\,;[0,a])$ *atunci pentru orice* $0 < c < a$ *are loc egalitatea*

$$V_n(S_n\,;[0,a]\,;f) = V_n(S_n\,;[0,c]\,;f) + V_n(S_n\,;[c,a]\,;f).$$

Demonstraţie. Din definiţia 3.2 rezultă imediat inegalitatea

$$V_n(S_n\,;[0,a]\,;f) \geqslant V_n(S_n\,;[0,c]\,;f) + V_n(S_n\,;[c,a]\,;f).$$

Pentru a demonstra inegalitatea inversă, fie (d) $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leqslant a$ o diviziune a intervalului $[0,a]$. Fie (d') $0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{k+1} \leqslant a$ o nouă diviziune obţinută din (d) prin adăugarea punctului c şi fie $y_s = c$.

Are loc inegalitatea

$$\sigma_n(d\,;\,[0,a]\,;f) \leqslant \sigma_n(d'\,;\,[0,a]\,;f)$$

iar $\sigma_n(d'\,;\,[0,a]\,;f)$ se poate exprima astfel:

$$\sigma_n(d'\,;\,[0,a]\,;f) = \sum_{i=1}^{s-n} |\,[0, y_i, \ldots, y_{i+n}\,;f]\,|\,(y_{i+n}-y_i) +$$

$$\sum_{i=s}^{k-n+1} |\,[0, y_i, \ldots, y_{i+n}\,;f]\,|\,(y_{i+n}-y_i) + \sum_{i=s-n+1}^{s-1} |\,[0, y_i, \ldots, y_{i+n}\,;f]|(y_{i+n}-y_i) \leqslant$$

$$\leqslant V_n(S_n\,;\,[0,c]\,;f) + V_n(S_n\,;\,[c,a]\,;f) + A_{s,n},$$

unde

$$A_{s,n} = \sum_{i=s-n+1}^{s-1} |[0, y_i, \ldots, y_{i+n-1}\,;f] - [0, y_{i+1}, \ldots, y_{i+n}\,;\,f]\,|.$$

Ţinînd cont de continuitatea lui f şi prin alegerea convenabilă a diviziunii (d) rezultă

$$(S_n V_n \leqslant\ ;\,[0,a]\,;f) V_n(S_n\,;\,[0,c]\,;f) + V_n(S_n\,;\,[c,a]\,;f).$$

TEOREMA 3.5. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca $f \in C_0\,[0,a]$ să fie cu variaţie mărginită de ordinul n pe $[0,a]$ este ca să existe două funcţii f_1 şi f_2 stelare de ordinul n pe $[0,a]$ astfel încît $f = f_1 - f_2$.*

Demonstraţie. Suficienţa condiţiei din enunţul teoremei rezultă din faptul că orice funcţie stelară de ordinul n pe $[0,a]$ este cu variaţie mărginită de ordinul n pe $[0,a]$.

Într-adevăr, pentru orice diviziune (d) avem

$$\sigma_n(d\,;\,[0,a]\,;f) = \sum_{i=1}^{k-n} |[0, x_i, \ldots, x_{i+n}\,;f]\,|\,(x_{i+n}-x_i) =$$

$$= \left|\sum_{i=i}^{k-n} \{[0, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}\,;f] - [0, x_i, \ldots, x_{i-1+n}\,;f]\}\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-n} \{[x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}\,;\varphi] - [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}\,;\varphi]\},$$

unde $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$, pentru orice $0 < x \leqslant a$.

Deoarece φ este neconcavă de ordinul $n-1$ (vezi [3]) pe $]0,a]$ rezultă că numerele $\sigma_n(d\,;\,[0,a]\,;f)$ sînt egal mărginite oricare ar fi diviziunea (d).

N e c e s i t a t e a. Fie $f \in \mathscr{V}_n(S_n\,;\,[0,a])$. Atunci funcţia corespunzătoare φ definită mai sus este din $\mathscr{V}^{(1)}_{n-1}(K_{n-1}\,;\,[0,a])$ şi conform teoremei de descompunere de tip Jordan demonstrată în [8] rezultă existenţa a

două funcţii φ_1 şi φ_2 neconcave de ordinul $n-1$ pe $[0,a]$ astfel ca $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Dacă considerăm acum f_1 şi f_2 definite pe $[0,a]$ prin

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0 \\ x\,\varphi_i(x), & \text{dacă } x \in\,]\,0,\,a] \end{cases} \qquad i = 1,2,$$

atunci $f = f_1 - f_2$ şi $f_1, f_2 \in S_n$. Cu aceasta teorema este demonstrată.

O b s e r v a ţ i e. Din teorema 3.2 rezultă că

$$\mathscr{V}_n(S_n\,;\,[0,a]) \subset \bigcap_{j=1}^{n-1} \mathscr{V}_j(S_j\,;\,[0,a]),$$

Deducem de aici că pentru orice $f \in \mathscr{V}_n(S_n\,;\,[0,a])$ există f_1 şi f_2 astfel ca

$$f = f_1 - f_2 \text{ şi } f_1, f_2 \in \bigcap_{j=0}^{n-1} S_j.$$

FUNCTIONS OF BOUNDED VARIATION OF HIGHER ORDER (I)

ABSTRACT

In the present paper, we consider a new class of functions of bounded nth variation on a closed bounded interval $[0,a]$, $a > 0$. We prove a number of lemmas and theorems concerning the corresponding total nth variation and a Jordan-type decomposition theorem.

BIBLIOGRAFIE

[1] B h a k t a, P. C., *On functions of bounded variation relative to a set*. J. Austral. Math. Soc. **XIII**, 3, 313–322 (1972).

[2] B r o w n, G., *Continuous functions of bounded nth variation*. Proc. Edinburgh Math. Soc., 16(Ser. II), **3**, 205–214 (1969).

[3] L u p a ş L u c i a n a, *Elemente extremale ale unor conuri de funcţii. Revista de analiză numerică şi teoria aproximaţiei*, **2**, *2*, 167–172 (1973).

[4] M o l d o v a n, E l e n a., *Funcţii cu variaţie mărginită*. Studii şi cerc. mat. (Cluj), **VIII**, 3–4, 313–317 (1957).

[5] P o p o v i c i u, T., *Sur quelques proprietés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Mathematica (Cluj), **VIII**, 1–85 (1933).

[6] R o b e r t s, A. W., V a r b e r g, D. E., *Functions of bounded convexity*. Bull. Amer. Math. Soc., **75**, 3, 568–572 (1969).

[7] R u s s e l, A. M., *Functions of bounded second variation and Steiltjes-type integrals. J.* London Math. Soc., **2**, 2, 193–208 (1970).

[8] — *On functions of bounded kth variation*. J. London Math. Soc., **2**, 3, 742–746 (1971).

[9] — *Functions of bounded kth variation*. Proc. London Math. Soc., **XXVI**, **3**, 547–563 (1973).

Primit la 10. XII. 1973.

Universitatea ,,Babeş-Bolyai'' Cluj,
Facultatea de Matematică-Mecanică,
Catedra de Analiză.