REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola 1, 1974, pp. 103–106

ASUPRA UNEI PROBLEME EXTREMALE PRIVIND ECUAŢIILE ALGEBRICE AVÎND TOATE RĂDĂCINILE REALE

de
CONSTANŢA MOCANU
(Cluj)

1. Introducere. Într-o lucrare din 1933 [1], Acad. T. POPOVICIU a studiat anumite probleme extremale privind ecuaţiile algebrice avînd toate rădăcinile reale.

Dîndu-se o familie de ecuaţii de grad n,

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{1}$$

avînd toate rădăcinile reale şi pentru care coeficienţii a_1 şi a_2 sînt fixaţi şi punînd

$$F_k(x) = \left(x + \frac{ka_1 - \sqrt{k(n-k)\Delta}}{kn}\right) \cdot \left(x + \frac{(n-k)\, a_1 + \sqrt{k(n-k)\,\Delta}}{n\,(n-k)}\right)^{n-k} = 0 \tag{2}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n$$

unde

$$\Delta = (n-1)\, a_1^2 - 2\, na_2 \geqq 0, \tag{3}$$

se arată că, coeficientul a_3 îşi atinge minimul, respectiv maximul, numai în cazul ecuaţiei $f_1(x) = 0$, respectiv $f_{n-1}(x) = 0$, adică numai în cazul cînd ecuaţia (1) are cel mult două răcăcini distincte.

Dacă se fixează coeficienţii a_1, a_2, a_3 se arată că a_4 are o valoare extremă, numai în cazul cînd ecuaţia (1) are cel mult 3 rădăcini distincte, mai precis, în cazul unei ecuaţii de forma

$$(x - \alpha)\,(x - \beta)\,(x - \gamma)^{n-3} = 0.$$

2. Se poate studia o problemă analoagă, în cazul cînd se fixează alţi coeficienţi ai ecuaţiei. Astfel, se poate demonstra că, dacă, se fixează coeficienții a_2 și a_3, atunci coeficientul a_1 își atinge maximul numai în cazul cînd ecuația (1) are cel mult două rădăcini distincte. Această problemă se poate enunța sub următoarea formă:

Problemă. Să se arate că extremul funcției

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4}$$

cu condițiile

$$g = \sum_{i<j} x_i x_j = a, \tag{5}$$

$$h = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = b, \tag{6}$$

este atins pe un punct $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, care are cel mult două componente distincte.

Această problemă se va rezolva folosind o observație simplă privind metoda multiplicatorilor lui Lagrange, observație utilizată și în cazul unei probleme de programare patratică [2].

3. Metodă de rezolvare. Se construiește funcția lui Lagrange

$$\Phi = f - \lambda g - \mu h$$

și se consideră sistemul

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n} \\ &g = \sum_{i<j} x_i x_j = a \\ &h = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = b \end{aligned} \tag{7}$$

Din (7) înmulțind, respectiv, cu x_i și adunînd, se obține, ținînd seama că f, g și h sînt omogene de gradele, respectiv, 1,2 și 3, formula

$$f = 2a\lambda + 3b\mu, \tag{8}$$

care dă valoarea extremală a lui f.

Au loc formulele

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j \neq i} x_j = f - x_i,$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{\substack{j<k \\ j \neq i \;\; k \neq i}} x_j x_k = g - x_i (f - x_i)$$

deci, sistemul (7) se scrie, ținînd seama de (9),

$$1 - \lambda f + \lambda x_i - \mu a + \mu x_i f - \mu x_i^2 = 0, \; i = \overline{1,n}.$$

Înlocuind pe f cu expresia dată de (8), se obține

$$2a\lambda^2 + (3b - 2ax_i)\lambda\mu - 3bx_i\mu^2 - x_i\lambda + (a + x_i^2)\mu - 1 = 0, \; i = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Dacă punctul de extrem $(x_1, \ldots, x_n)$ ar avea mai mult de două componente distincte, atunci din (10) s-ar obține un sistem de cel puțin 3 ecuații cu două necunoscute λ și μ. Vom arăta că un astfel de sistem nu poate fi compatibil.

Sistemul (10) se mai scrie sub forma

$$2a\lambda^2 + [(3b - 2ax_i)\mu - x_i]\lambda - 3bx_i\mu^2 + (a + x_i^2)\mu - 1 = 0. \; i = 1,n. \tag{11}$$

Să presupunem că există cel puțin 3 valori x_1, x_2, x_3 distincte. Luînd i = 1,2 avem

$$\begin{aligned} &2a\lambda^2 + [(3b - 2ax_1)\mu - x_1]\lambda - 3bx_1\mu^2 + (a + x_1^2)\mu - 1 = 0 \\ &2a\lambda^2 + [(3b - 2ax_2)\mu - x_2]\lambda - 3bx_2\mu^2 + (a + x_2^2)\mu - 1 = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Scăzînd membru cu membru, se obține

$$(x_1 - x_2)(1 + 2a\mu)\lambda + 3b(x_1 - x_2)\mu^2 - (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)\mu = 0$$

și deoarece $x_1 \neq x_2$, se obține

$$(1 + 2a\mu)\lambda + 3b\mu^2 - (x_1 + x_2)\mu = 0 \tag{13}$$

Luînd acum, $i = 1,3$, se obține în mod analog,

$$(1 + 2a\mu)\lambda + 3b\mu^2 - (x_1 + x_3)\mu = 0. \tag{14}$$

Scăzînd (13) din (14), se obține

$$(x_2 - x_3)\mu = 0,$$

de unde rezultă, deoarece s-a presupus $x_2 \neq x_3$,

$$\mu = 0.$$

Inlocuind în (13), se obține

$$\lambda = 0,$$

ceeace este imposibil, dacă ținem seama de (12).

Prin urmare, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, adică rădăcinile ecuației care dă valoarea extremală a lui a_1, nu pot lua decît cel mult două valori distincte.

Lucrarea a fost prezentată la sesiunea științifică de comunicări a corpului didactic de la Univ. „Babeș-Bolyai", din mai 1969.

SUR UN PROBLÈME EXTREMALE CONCERNANT LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES AYANT TOUTES LEURS RACINES RÉELLES

RÉSUMÉ

Dans cette note l'auteur résout un problème proposé par le Professeur T. POPOVICIU, en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

En cosidérant l'équation (1) ou les coefficients a_2 et a_3 sont fixés, on démontre, à l'aide de cette méthode, que le coefficient a_1 atteint son maximum seulement dans le cas où l'équation (1) possède au plus deux racines distinctes.

BIBLIOGRAFIE

[1] Popoviciu, Tiberiu, *Sur les équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles*, Mathematica, IX, 157–181 (1935).

[2] Mocanu, Constanța, *Observații asupra rezolvării problemelor de programare patratică*, Studii și cercetări de matematică (Cluj), 14, 2 (1963), 313–322,

Primită la 19.XI. 1973.

Universitatea „Babeș-Bolyai", Cluj
Catedra de Analiză