REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola 2, 1974, pp. 117–120

OBSERVAŢII ASUPRA MULŢIMILOR r-CONVEXE

de

HORST KRAMER

(Cluj)

În nota de faţă ne vom ocupa de legătura dintre noţiunea de r — convexitate şi cea de convexitate în sens obişnuit în spaţiul Euclidean n-dimensional R^n. Mulţimile local convexe în R^n au fost definite de TIETZE [8]. O definiţie analoagă pentru spaţii vectorial normate este următoarea:

Definiţia 1. *O mulţime M a unui spaţiu vectorial normat L se numeşte local convexă, dacă pentru orice x din M există un număr pozitiv $r(x)$ astfel încît intersecţia $M \cap S(x, r(x))$ să fie convexă. Cu $S(x, r)$ s-a notat sfera deschisă de centru x şi de rază r, adică $S(x, r) = \{y | y \in L, \|x - y\| < r\}$.*

O formă mai tare a local-convexităţii, de fapt o local convexitate uniformă a fost definită de I. J. SCHOENBERG [7]. În cele ce urmează vom folosi o definiţie echivalentă cu definiţia r-convexităţii dată de Schoenberg:

Definiţia 2. *Fie r un număr real pozitiv. O mulţime M a unui spaţiu vectorial normat L se numeşte r-convexă, dacă pentru orice x din M intersecţia $M \cap S(x, r)$ este convexă.*

Teorema următoare a fost demonstrată în 1928 independent de TIETZE [8] şi NAKAJIMA [4]:

TEOREMA 1. *Orice mulţime închisă conexă şi local convexă M din spaţiul Euclidean n-dimensional R^n este convexă.*

Acest rezultat a fost generalizat ulterior de numeroşi autori ([2], [6], [7], [11], [12]). I. J. SCHOENBERG [7] l-a extins la spaţii Hilbert, iar V. L. KLEE [2] l-a extins apoi la spaţii vectoriale topologice. Este evident, că r-convexitatea într-un spaţiu vectorial normat implică local convexitatea şi prin urmare teorema 1 şi generalizarea ei dată în [7] este adevărată pentru mulţimile închise conexe şi r-convexe. Se observă însă, că teorema 1 nu mai rămîne valabilă, dacă ipoteza „M este închisă" se înlocuieşte cu ipoteza „M este deschisă". Putem însă demonstra următoarea teoremă:

TEOREMA 2. *Fie r un număr real pozitiv. Orice mulțime deschisă, conexă și r- convexă M din spațiul Euclidean n-dimensional R^n este convexă.*

Demonstrația acestei teoreme se obține printr-o ușoară modificare a demonstrației dată de TIETZE în [8] pentru teorema 1.

Să presupunem că mulțimea M nu este convexă. Există atunci în M două puncte a și b, astfel încît segmentul ab nu este conținut în întregime în M. Mulțimea M fiind deschisă și conexă, există o linie poligonală finită $ac_1c_2 \ldots c_{k-1}\ c_kb$ conținută în M, care leagă cele două puncte a și b (vezi de ex. [1], p. 166, teorema 36). Deoarece segmentul ac_1 este conținut în M, iar segmentul ab nu este conținut în M, există un cel mai mic indice i, $2 \leqslant i \leqslant k+1$ (se consideră $b = c_{k+1}$), astfel încît segmentul ac_i să nu fie conținut în M. Segmentele ac_{i-1} și $c_{i-1}\ c_i$ fiind conținute în M, iar ac_i nefiind conținut în M, punctele a, c_{i-1} și c_i nu pot fi coliniare. Fie x un punct variabil, care se mișcă pe segmentul $c_{i-1}\ c_i$ de la c_{i-1} spre c_i. Deoarece segmentul închis ac_{i-1} este conținut în mulțimea deschisă M, există pe $c_{i-1}\ c_i$ o primă poziție a lui x, astfel încît segmentul ax să nu fie conținut în întregime în M. Fie x_0 această poziție a lui x. Interiorul triunghiului $ac_{i-1}\ x_0$ împreună cu laturile ac_{i-1} și $c_{i-1}x_0$ aparțin lui M. Pe latura ax_0 există însă cel puțin un punct, care nu aparține lui M, și care este în consecință un punct al frontierei lui M. Dintre punctele frontieră ale lui M de pe segmentul ax_0 fie p punctul cel mai apropiat față de a. Evident că $p \neq a$. Fie y un punct de pe segmentul ap între a și p astfel încît $d(p, y) < < r/4$ (Cu d s-a notat distanța în R^n). Deoarece y este un punct interior al mulțimii M, există în planul 2-dimensional E determinat de punctele a, c_{i-1} și c_i de partea opusă lui c_{i-1} față de dreapta ax_0 un punct $y' \in M$ cu $d(y,y') < < r/4$. Rezultă deci $d(p, y') < r/2$. Prelungirea segmentului $y'p$ duce în interiorul (relativ la E) al triunghiului $ac_{i-1}x_0$. În interiorul acestui triunghi $ac_{i-1}\ x_0$ și de părți opuse față de dreapta $y'p$ putem alege două puncte y'' și y''' din M astfel încît $d(p, y'') < r/2$ și $d(p,y''') < r/2$. Intersecția $M \cap S(y', r)$ convexă conform ipotezei conține punctele y', y'' și y''' și interiorul relativ la E al triunghiului $y'y''y'''$, adică și punctul p aparține mulțimii M. Aceasta contrazice însă faptul că p este un punct din frontiera lui M. Ipoteza noastră că M nu este o mulțime convexă ne-a dus deci la o contradicție. Cu aceasta teorema 2 este demonstrată.

Observație. *Teorema 2 se mai poate demonstra cu ajutorul unor teoreme de caracterizare a mulțimilor deschise și conexe, care nu sînt convexe, și anume pentru cazul $n = 2$ cu ajutorul unei teoreme a lui* LÉJA și WILKOSZ [3], *iar în cazul general cu ajutorul unei teoreme a lui* VALENTINE [11]. *Inainte de a aminti aceste două teoreme este necesar să mai introducem unele noțiuni.*

Definiția 3. (LÉJA și WILKOSZ [3]). *Un punct x al frontierei unei mulțimi S dintr-un spațiu vectorial normat se numește un punct de concavitate tare a lui S, dacă există o vecinătate $N(x)$ a lui x și o funcțională liniară f cu $f(x) = c$ astfel încît $f(y) \leqslant c$ și $y \in N(x) - x$ să implice $y \in S$. În particular rezultă că un punct x este un punct de concavitate tare al unei mulțimi S din R^2, dacă x este un punct frontieră al mulțimii S și dacă există*

un cerc cu centrul în x și o dreaptă, care trece prin x, astfel încît unul din cele două semidiscuri determinate de dreapta respectivă împreună cu frontiera semidiscului, din care se scoate x, să aparțină mulțimii S.

Definiția 4. (VALENTINE [11], [12]) *Fie S o mulțime dintr-un spațiu vectorial topologic. Un punct x al frontierei lui S se numește un punct de convexitate slabă, dacă x nu este mijlocul niciunui segment uv ($u \neq v$) cu $uv - x$ aparținînd interiorului mulțimii S.*

TEOREMA 3 (LÉJA și WILKOSZ [3]). *Orice mulțime conexă și deschisă din planul Euclidean R^2, care nu este convexă, are cel puțin un punct de concavitate tare.*

TEOREMA 4. (VALENTINE [11]) *Fie M o mulțime deschisă și conexă într-un spațiu vectorial topologic L. Dacă fiecare punct al frontierei lui M este un punct de convexitate slabă pentru M, atunci mulțimea M este convexă.*

Se observă ușor că punctele frontierei unei mulțimi deschise conexe și r-convexe din R^n sînt puncte de convexitate slabă, respectiv în cazul $n = 2$ nu pot fi puncte de concavitate tare. Prin urmare teorema 2 rezultă pentru cazul $n = 2$ din teorema 3 și pentru un n general din teorema 4.

TEOREMA 5. *Fie M o mulțime mărginită din R^n, care conține cel puțin $(n+2)$ puncte și fie δ diametrul mulțimii M, adică $\delta = \sup\{d(x,y) | x,y \in M\}$. Mulțimea M este convexă dacă și numai dacă ea este δ-convexă.*

Demonstrație. Dacă M este convexă, atunci intersecția $M \cap S(x, \delta)$ este convexă pentru orice x din M. Deci mulțimea M este și δ — convexă.

Să presupunem acum că M satisface ipotezele teoremei și ea este δ — convexă. Se arată ușor prin inducție în raport cu n, că $n + 1$ este cardinalul maxim al unei mulțimi N din R^n cu proprietatea, că distanța între oricare două puncte distincte din N este aceeași. Din definiția diametrului unei mulțimi și din faptul că M conține cel puțin $(n+2)$ puncte, rezultă existența a două puncte distincte a și b din M cu $d(a, b) < \delta$. δ-convexitatea mulțimii M implică faptul că segmentul ab este conținut în M. Fie c mijlocul segmentului ab și fie x un punct arbitrar din M. Deoarece $d(a, x) \leqq \delta$ și $d(b, x) \leqq \delta$ rezultă $d(c, x) < \delta$, deci $x \in S(c, \delta)$. Din $M \cap S(c, \delta) = M$ și din δ-convexitatea lui M rezultă convexitatea mulțimii M.

Faptul că nu se poate micșora numărul $(n + 2)$ din teorema 5 se vede imediat din următorul exemplu: Fie S un simplex echilateral în R^n cu vîrfurile $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ și fie $M = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\}$ iar δ diametrul lui M. Evident că M este o mulțime δ — convexă, care însă nu este o mulțime convexă.

SOME REMARKS ON r-CONVEX SETS

SUMMARY

Let r be a positive number. A set M in a normed vector space is called r-convex if the intersection $M \cap S(x, r)$ of M with the open sphere $S(x,r)$ of center x and radius r is convex for each x in M. We prove in this note the following theorem: An open connected r-convex set M in the n-dimensional euclidean space R^n is also convex in the ordinary sense.

BIBLIOGRAFIE

[1] Alexandroff, P. S., *Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen*, Berlin, 1964.

[2] Klee, V. L., *Convex sets in linear spaces.*, Duke Math. Journal **18,** 443–466 (1951).

[3] Léja F., Wilkosz, W., *Sur une propriété des domaines concaves.*, Ann. Soc. Polon. Math. **2,** 222–224 (1924).

[4] Nakajima, S., *Über konvexe Kurven und Flächen.*, Tôhoku Math. J. **29,** 227–230 (1928).

[5] Reinhardt, K., *Über einen Satz von Herrn Tietze.*, Jber. Deutschen Math. Ver. **38,** 191–192 (1929).

[6] Sacksteder R., Straus, E. G., Valentine, F. A., *A generalization of a theorem of Tietze and Nakajima on local convexity.*, J. London Math. Soc. **36,** 52–56 (1961).

[7] Schoenberg, I. J., On local convexity in Hilbert space., Bull. Amer. Math. Soc. **48.** 432–436 (1942).

[8] Tietze, H., *Über Konvexheit im kleinen und im grossen und über gewisse den Punkten einer Menge zugeordnete Dimensionszahlen.*, Math. Z., **28,** 697–707 (1928).

[9] Tietze, H., *Eine charakteristische Eigenschaft der abgeschlossenen konvexen Punktmengen.*, Math. Ann. **99,** 394–398 (1928).

[10] Tietze, H., *Bemerkungen über konvexe und nichtkonvexe Figuren.*, J. Reine Angew. Math., **160,** 67–69 (1929).

[11] Valentine, F. A., *Characterizations of convex sets by local support properties.*, Proc. Amer. Math. Soc., **11,** 112–116 (1960).

[12] Valentine, F. A., *Konvexe Mengen*, B. I. Mannheim 1968.

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România

Primit la 23.II. 1974