REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 1, Fascicola 1, 1972, pp. 53—63

CERCETĂRI ÎN DOMENIUL PLANIFICĂRII OPERATIVE LA INSTITUTUL DE CALCUL (I)*

de

I. NÉMETI
(Cluj)

1. Problema atelierului.

Studiile întreprinse în cadrul institutului de calcul din Cluj în domeniul indicat în titlu se referă la aşa numita problemă a atelierului în diferite forme tehnologice, organizatorice şi economice ale acesteia. Pentru cazul tipic, cel mai simplu, enunţul tehnic al problemei este următorul.

Pentru un atelier mecanic care este înzestrat cu diferite maşini de prelucrat (maşini-unelte) este dată o sarcină de producţie. Aceasta constă din prelucrarea unor piese diferite de maşini. Prelucrarea unei piese înseamnă trecerea acesteia într-o ordine dată, prin diferite maşini-unelte, pe fiecare maşină executîndu-se o operaţie bine determinată. Durata fiecărei operaţii este dată.

Printr-o maşină oarecare vor trece în general mai multe feluri de piese de prelucrat. Ordinea aceasta de trecere nu este dată (pe cînd ordinea de trecere a unei piese prin diferitele maşini este prescrisă de tehnologia adoptată). Această ordine care este de multe ori identică cu ordinea de lansare a prelucrării pieselor, are însă o mare influenţă asupra unor indici economici a fabricaţiei, cum ar fi, de exemplu, durata totală a execuţiei întregii prelucrări, sau gradul de folosire a utilajului, etc.

Dacă ordinea de trecere (ordinea de lansare) este dată, atunci se poate determina şi momentul de începere a fiecărei operaţii tehnologice. Prin aceasta s-a întocmit „programarea în timp a fabricaţiei" sau „planul calendaristic". Se caută deci planul calendaristic al fabricaţiei care să optimizeze o funcţie economică aleasă.

În decursul acestei lucrări se vor arăta diferitele situaţii tipice de producţie care au fost studiate la Institutul de calcul: cazul mai multor maşini

---

* Partea a doua a acestei lucrări apare într-una din fascicolele următoare ale revistei.

de acelaşi tip, cazul fabricaţiei în serie, existenţa sau folosirea stocu de tampon, lucrul în mai multe schimburi, considerîndu-se în toate ac cazuri diverse funcţii economice, dintre care, două sînt mai importan durata minimă de execuţie şi gradul maxim de folosire al utilaju

Modelele matematice elaborate pentru aceste probleme sînt, în to cazurile studiate, probleme de programare matematică dintr-o anum clasă, anume din clasa problemelor de programare cu condiţii logice. Pen rezolvarea unor astfel de probleme s-a elaborat în cadrul Institutului procedeu general, care va fi prezentat pe scurt în această lucrare.

Menţionăm că prima lucrare în care s-a tratat o astfel de proble este lucrarea lui S. M. JOHNSON [2] din anul 1954, în lucrarea respect studiindu-se două maşini de prelucrare, care sînt parcurse de către d ritele piese în aceiaşi ordine.

În afară de acest paragraf introductiv, lucrarea prezentă conţ următoarele paragrafe:

2. Prezentarea metodei pentru rezolvarea unei probleme de progr mare cu condiţii logice.
3. şi 4. Cazul „clasic" şi unele îmbunătăţiri.
5., 6. şi 7. Mai multe maşini de acelaşi tip.
8. Fabricaţia în serie.
9. Stocuri tampon.
10. Lucrul în mai multe schimburi.
11. Metode euristice. Concluzii.

2. Metoda lui F. Radó

O problemă de programare cu condiţii logice poate fi formulată în modul următor: să se determine vectorul x, care minimizează funcţia scalară

(2.1)
$$u = f(x), \text{ minim}$$

unde x verifică relaţiile

(2.2)
$$A_i(x) \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

şi

(2.3)
$$(B_j(x) \geqq 0) \vee (C_j(x) \geqq 0) \quad j = 1, 2, \ldots, q.$$

Aici funcţiile (scalare) reale $A_i(x)$, $B_j(x)$, $C_j(x)$ sînt date şi prin semnul $\vee$, noi notăm funcţia logică a disjuncţiei.

Forma susindicată se generalizează imediat, considerînd în locul ine- lităţilor $B_j(x) \geqq 0$, $C_j(x) \geqq 0$, conjuncţii de astfel de inegalităţi. De emenea, disjuncţia (2.3) poate avea mai mult de doi termeni.

Metoda de rezolvare elaborată de colaboratorul nostru F. RADÓ ([11], 2]) în anul 1963, este înrudită cu metodele Branch and Bound ([3], [4]) sp. S.E.P. [(1]). publicate tot în aceşti ani, dar ea a fost bineinţeles ela- orată independent de aceste metode. Metoda poate fi descrisă pe scurt um urmează: Notăm prin P problema constituită din relaţiile (.2.1), ..., 2.3). Vom numi o problemă fundamentală a lui P, problema constituită in (2.1), (2.2) şi din primul sau al doilea termen dintr-o parte a disjuncţiilor 2.3). O astfel de problemă fundamentală $P(A)$ poate fi caracterizată prin nulţimea A, constituită din perechile de numere (α, j), unde $\alpha \in \{1, 2\}$ i $j \in Q = \{1, 2, \ldots, q\}$. Un element (α, j) indică faptul că termenul α din disjuncţia a j — a din (2.3) a fost folosit pentru formarea mulţimii A care defineşte problema $P(A)$. Problema constituită numai din (2.1) şi (2.2) o vom nota cu $P(\emptyset)$.

În procedeul folosit se vor forma, pas cu pas, trei şiruri.

(*)
$$P(A_1),\ P(A_2),\ \ldots$$

(**)
$$m_1,\quad m_2,\quad \ldots$$

(***)
$$x_1,\quad x_2,\quad \ldots$$

Aici x_i este soluţia problemei fundamentale $P(A_i)$, iar m_i este valoarea funcţiei economice $f(x_i)$. Dacă soluţia x_i verifică toate condiţiile (2.3), atunci termenul m_i va fi subliniat. Sirul (**) este nedescrescător.

La primul pas se va pune $A = \emptyset$. Presupunem că am ajuns în construcţia celor trei şiruri, la termenul al i-lea $(A(x_i), m_i, x_i)$. Dacă primul termen m_1 din (**) este subliniat, atunci x_1 este o soluţie a problemei P şi calculul s-a terminat. Dacă nu, se va alege o disjuncţie (2.3) încă nefolosită la construcţia problemelor $P(A)$, care nu este verificată de către x_1. Să presupunem că această disjuncţie este disjuncţia de ordinul j. Atunci termenii $P(A_1)$, m_1, x_1 vor fi şterşi din cele trei şiruri, se formează mulţimile $A' = A_1 \cup \{1, j\}$ şi $A'' = A_1 \cup \{2, j\}$, se rezolvă problemele fundamentale $P(A')$ şi $P(A'')$ (obţinîndu-se soluţiile x', m', x'', m'') şi în fine, aceşti doi termeni vor fi încadraţi în şirurile (*), (**), (***) în aşa fel, încît sirul (**) să rămînă nedescrescător. Pe urmă, numerotarea termenilor se reface în aşa fel, încît indicii să formeze din nou şirul numerelor naturale. Dacă problemele $P(A')$ şi/ sau $P(A'')$ sînt incompatibile, ele nu vor fi încadrate în şir. Dacă prin suprimarea primilor termeni, şirurile devin vide, atunci problema P însăşi este incompatibilă. Procedeul se termină într-un număr finit de paşi.

Pentru mai multe detalii şi pentru demonstraţii trimitem la lucrările lui F. Radó, indicate anterior.

3. Cazul „clasic"

Revenim la situaţia descrisă în paragraful 1. Presupunem că maşinile-unelte sînt toate diferite între ele (din fiecare fel de maşină existînd un singur exemplar). Ele sînt numerotate de la 1 la m.

Notăm $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Mulţimea M reprezintă astfel mulţimea maşinilor de prelucrare. Atelierul urmează să execute n operaţii (o operaţie poate fi definită printr-o piesă prelucrată la o maşină, deci printr-un cuplu piesă-maşină), numerotate şi ele de la 1 la n. Mulţimea $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ reprezintă mulţimea operaţiilor.

Procedeul tehnologic prescrie pentru fiecare operaţie maşina la care va fi efectuată operaţia respectivă, ceea ce revine la o anumită partiţie a mulţimii N:

$$N = \bigcup_{k \in M} N_k,$$

N_k fiind mulţimea indicilor operaţiilor care urmează să fie executate pe maşină nr. k.

Există cupluri de operaţii (de exemplu două operaţii consecutive ale unei piese) (i, j), pentru care tehnologia adoptată determină o relaţie de ordine temporală, în sensul că operaţia j nu poate fi începută decît după scurgerea unei durate date t_{ij}, socotită de la începerea operaţiei i. Aceste cupluri (i, j) formează mulţimea dată $H = \{(i, j)\} \subset N \times N$. Durata t_i a execuţiei operaţiei i (adică durata în cursul căreia maşina-unealtă respectivă este ocupată cu executarea operaţiei i) este şi ea dată.

Vom pune pentru fixarea momentului de începere, condiţiile:

(3.1) $$x_i \geqq 0, \quad i \in N \qquad \text{(condiţia de începere)},$$

unde momentul (necunoscut) al operaţiei i s-a notat cu x_i.

Se presupune că o operaţie odată începută, operaţia respectivă nu se întrerupe pînă la terminarea ei completă. Condiţia de ordine temporară susmenţionată se exprimă prin inegalităţile

(3.2) $$x_j - x_i \geqq t_{ij}, \quad (i, j) \in H \qquad \text{(condiţii de succesiune)}.$$

Operaţiile executate pe aceeaşi maşină formează mulţimea dată

(3.3) $$J = \{(i, j) | \, i < j, \; i \in N_k, \; j \in N_k, \; k \in M\}.$$

Presupunem că la fiecare maşină, în orice moment dat, cel mult o operaţie se găseşte sub execuţie. De aici rezultă condiţiile:

(3.4) $$(x_i - x_j \geqq t_j) \vee (x_j - x_i \geqq t_i), \quad (i, j) \in J$$

(condiţii de non-interferenţă).

Ca funcţie economică de minimizat se consideră durata totală a execuţiei tuturor operaţiilor

$$u = f(x) = \max_{i \in N} (x_i + t_i).$$

De altfel această condiţie poate fi liniarizată. Pentru necunoscuta u vor fi impuse restricţiile

(3.5) $$u - x_i \geqq t_i, \qquad i \in N$$

şi se va cere minimizarea funcţiei economice

(3.6) $$f = u : \text{minim}$$

Relaţiile (3.1), (3.2), (3.4), (3.5) cu condiţia (3.6) formează o problemă P de programare cu condiţii logice care poate fi rezolvată cu procedeul descris în paragraful precedent. O problemă fundamentală $P(A)$ a problemei P va conţine, în afara restricţiilor (3.1), (3.5) şi condiţiei (3.6), restricţiile

$$x_j - x_i \geqq t'_{ij}, \quad (i, j) \in H \cup L,$$

în care mulţimea $L \subset N \times N$ este determinată de mulţimea A în modul următor: Fie $(\alpha, r) \in A$, iar ca disjuncţie (3.4), de ordinul r, fie disjuncţia

$$(x_i - x_j \geqq t_j) \vee (x_j - x_i \geqq t_i).$$

Atunci, dacă $\alpha = 1$, are loc relaţia $(i, j) \in L$, iar dacă $\alpha = 2$, avem $(j, i) \in L$.

Numerele t'_{ij} sînt definite prin

(3.7) $$t'_{ij} = \left\{ \begin{matrix} t_{ij} \\ \max\limits (t_i, t_{ij}) \\ t_i \end{matrix} \right\} \text{ pentru } (i, j) \in \left\{ \begin{matrix} H - L \\ H \cap L \\ L - H \end{matrix} \right.$$

Astfel, toate problemele fundamentale $P(A)$ se reduc la aşa numite probleme de potenţial (vezi lucrarea [13]), care constituie o generalizare a problemelor de drum critic. Există pentru ele metode de rezolvare speciale, bineînţeles mult mai simple şi rapide decît procedura generală „simplex" de exemplu ([13] şi în deosebi lucrarea colaboratorului nostru V. PETEANU [10]).

Este o particularitate a modelelor prezentate în această lucrare faptu că ele constituie probleme de programare cu disjuncții, ale căror problem fundamentale sînt sau probleme de potențial, sau pot fi reduse la problem de potențial.

4. Unele generalizări

Modelului din paragraful precedent i se pot aduce cîteva modificări, respectiv generalizări, în scopul de a-l apropia mai mult de condițiile real de fabricație.

a) În locul condițiilor de începere (3.1), se pot pune termene de procurare și de livrare

$$(4.1)\qquad \begin{cases} x_i \geqq \tau_i' & i \in N' \subset N \\ x_i \leqq \tau_i'' & i \in N'' \subset N. \end{cases}$$

Pentru operațiile fără restricții de procurare, se va pune $\tau_i' = 0$ iar celor fără termen de livrare, $\tau_i'' = \infty$ (respectiv un număr suficient de mare).

b) Există relații între duratele t_i și t_{ij}. Într-adevăr, o analiză mai aprofundată a noțiunii de durata de execuție a unei operații ne arată că mărimea t_i se compune din

— timpul de pregătire a mașinii-unelte respective: δ_i

— timpul de execuție propriu zis: t_i°

— timpul de manipulare a piesei (controlul calitativ și transportul la mașina următoare): γ_i.

Mașina este ocupată pe durata $\delta_i + t_i^\circ$, iar piesa în cauză va fi ocupată pe o durată de timp, de $t_i^\circ + \gamma_i$. Executarea unei operații se face în general prin loturi de piese. Atunci timpul t_i° se referă la lotul întreg, prelucrarea acestuia nefiind întreruptă. Manipularea pieselor poate fi făcută însă prin subloturi. Atunci ultima cantitate se modifică în $t_i^\circ + \frac{\gamma_i}{\nu_i}$, dacă notăm cu ν numărul subloturilor într-un lot. Atunci durata din (3.2) va fi

$$(4.2)\qquad t_{ij} = \delta_i - \delta_j + \frac{t_i^\circ}{\nu_i} + \gamma_i + \frac{\nu_i - 1}{\nu_i} \max\,(0,\, t_i^\circ - t_j^\circ).$$

Spațiul grafic relativ restrîns al prezentei lucrări nu ne permite să deducem formula de mai sus. Ea se obține din următorul deziderat: cantitatea pieselor ieșite din mașina ce execută operația i și ajunse în fața mașinii

ce execută operația j să nu fie mai mică decît cantitatea de piese solicitate de această a două mașină pentru prelucrare (vezi [8]).

Se constată că durata t_{ij} depinde de părțile componente ale duratelor t_i și t_j și ea poate fi și negativă. În plus, are loc inegalitatea

$$(4.3)\qquad t_{ij} \geqq t_i - t_j.$$

c) Există și alte posibilități pentru funcțiile economice de optimizat, în afară de durata totală a execuției. Pe de o parte, planul lunar, respectiv programarea calendaristică a acestuia se face în funcția de comenzile lansate. În aceste condiții se va cere ca planul lunar să fie realizat, anumite termene de livrare să fie respectate și totodată să se minimizeze funcția economică

$$(4.4)\qquad f = \sum_{k \in M} \gamma_k T_k.$$

Aici numerele pozitive γ_k sînt niște pondere ce se stabilesc din considerente economice, iar T_k este momentul de timp cînd mașina nr. k își termină ultima operație ce i-a fost afectată în conformitate cu programul elaborat.

Pe de alte parte și valoarea producției neterminate poate fi luată în considerare la alcătuirea funcției economice. Toate aceste considerații conduc la o funcție de optimizat de forma

$$(4.5)\qquad f = \sum_{i \in N} c_i x_i \qquad \text{(vezi și lucrarea [9]).}$$

O astfel de funcție conduce, la problemele fundamentale ale programării, la o problemă de optimizare a potențialului, pentru care B. ROY a elaborat o metodă de rezolvare ([12]).

5. Mai multe exemplare din același tip de mașini-unelte I

În acest prim model pentru problema considerată, mulțimea de indici $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ va reprezenta diferitele tipuri de mașini și nu mașinile individuale. Din fiecare tip $k \in M$ există μ_k exemplare, practic identice. Celelalte notații din paragraful 3 se păstrează, ținînd cont însă de noul conținut al mărimii M. Astfel de exemplu: mărimea N_k, $k \in M$ reprezintă mulțimea operațiilor de executat la mașinile de tipul k.

Cu aceasta, condițiile de început (3.1) și de succesiune (3.2) rămîn neschimbate. Condiția de non-interferență are aici următoarea formulare: programul trebuie astfel întocmit încît la un moment de timp oarecare, să fie programate cel mult μ_k operații pe tipul k. Pentru a putea formula matematic această condiție, introducem o variabilă auxiliară z_{ij}^k definită pentru $i, j \in N_k$; $i \neq j$; $k \in M$ și care semnalează una dintre următoarele două situații: 1) Inegalitățile $0 \leq z_{ij}^k < 1$ ne indică faptul că momentul de începere x_j al operației j se află în afara intervalului de timp $[x_i, x_i + t_i]$ afectat executării operației i (operațiile i și j executîndu-se pe același tip de mașină k); 2) Inegalitățile $z_{ij}^k \geq 1$ indică situația contrară.

Atunci condiția de non-interferență devine [vezi [5] și [9]]:

$$(5.1)\qquad (x_j - x_i < 0) \vee (0 \leq x_j - x_i < t_i \wedge z_{ij}^k \geq 1) \vee (x_j - x_i \geq t_i)$$

pentru $i \neq j$, $i \in N_k$, $j \in N_k$, $k \in M$

$$(5.2)\qquad z_{ij}^k \geq 0$$

pentru $i \neq j$, $i \in N_k$, $j \in N_k$, $k \in M$

$$(5.3)\qquad \sum_{\substack{r \in N_k \\ r \neq i}} z_{ri}^k \leq \mu_k - 1$$

pentru $i \in N_k$, $k \in M$.

Condițiile (3.1), (3.2), (5.1), (5.2), (5.3), împreună cu funcția economică aleasă de optimizat constituie o problemă de programare liniară cu condiții logice, care se rezolvă cu metodele cunoscute.

O b s e r v a ț i i cu privire la forma acestei probleme:

a) Necunoscutele problemei sînt x_i și z_{ij}^k, ceeace complică considerabil problema. În lucrarea [6] se indică o metodă de tranformare simplă, prin care se elimină necunoscutele z_{ij}^k.

b) În problemele fundamentale atașate problemei în cauză intervin și inegalități stricte, ca de exemplu $x_j - x_i < 0$.

În aceeași lucrare [6] este indicat și modul de tratare a unor astfel de probleme. Întrucît spațiul grafic relativ restrîns, afectat prezentei lucrări nu ne îngăduie să intrăm în aceste detalii, ne limităm la a cita lucrarea respectivă.

6. Mai multe exemplare din același tip de mașini unelte II

Prin metoda ridicată în paragraful precedent, rezolvarea unei probleme fundamentale devine mult mai dificilă, respectiv complicată, decît prin metoda descrisă în cadrul paragrafului 3. Procedeul prezentat în paragraful de față nu arată acest dezavantaj; în schimb, numărul problemelor fundamentale este mai mare. Alegerea între aceste două metode (respectiv între

trei, ținînd seamă și de procedeul ce va fi prezentat în paragraful următor), trebuie făcută de la caz la caz.

În modelul de față, numim *operație*, prelucrarea unei piese date pe un anumit tip de mașină (care se prescrie prin tehnologia adoptată) și o *variantă* a acestei operații, executarea prelucrării pe un anumit exemplar din tipul respectiv. Pentru fiecare operație ce se execută pe tipul r de mașină, vor fi deci μ_r variante.

N va reprezenta mulțimea operațiilor și

V va reprezenta mulțimea variantelor (numerotate și ele de la 1 pînă la . . .), iar

M va reprezenta de data aceasta mașinile (și nu tipurile).

Mulțimea V admite două partiții:

$$(6.1)\qquad V = \bigcup_{i \in N} V_i = \bigcup_{k \in M} W_k.$$

Aici, V_i reprezintă mulțimea variantelor aparținînd operației i, iar W_k reprezintă mulțimea variantelor ce pot fi executate pe mașina k. Notăm ca și pînă acum cu x_i, $i \in N$ momentul (necunoscut) de începere a operației i. Mai întroducem și necunoscutele y_h, $h \in V$, momentul de începere a variantei h. În soluție se va alege una și numai una dintre variantele operației i; atunci dintre necunoscutele y_h, $h \in V_i$, se va determina una singură (cu $y_h = x_i$), celelalte rămînînd nedeterminate.

Modelul ia atunci următorul aspect:

Condițiile de începere:

$$(6.2)\qquad x_i \geq 0,\ i \in N;$$

Condițiile de succesiune:

$$(6.3)\qquad x_j - x_i \geq t_{ij},\ (i, j) \in H;$$

Condițiile variantelor:

$$(6.4)\qquad \bigvee_{h \in V_i} (x_i = y_h),\quad i \in N;$$

Condițiile de non-interferență

$$(6.5)\qquad (y_h - y_l \geq t_l) \vee (y_l - y_h \geq t_h),\quad (h, l) \in K,$$

unde

$$(6.6)\qquad K = \{(h, l) \mid h < l,\ h \in W_k,\ l \in W_k,\ k \in M\},$$

reprezintă o mulţime analogă cu J (însă din domeniul variantelor şi nu al operaţiilor şi din domeniul maşinilor şi nu al tipurilor).

La acestea se mai adaugă şi funcţia economică de optimizat aleasă.

Modelul acesta reprezintă şi el, ca şi celelalte modele indicate anterior, o programare cu disjuncţii.

În lucrare [7] sînt indicate o serie de transformări prin care aspectul problemei se simplifică, se elimină şi necunoscutele y_h şi se realizează încă alte simplificări. Nu insistăm aici asupra acestora.

Academia R. S. România,
Filiala din Cluj
Institutul de calcul

FORSCHUNGEN IM RECHENINSTITUT AUS DEM GEBIET DER OPERATIVEN PLANUNG (I)

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wird über die wichtigsten im Recheninstitut erhaltenen Ergebnisse über das sogenannte Reihenfolgeproblem (Ablaufplanung) berichtet.

Der erste, in diesem Heft erschienene Teil enthält folgende Abschnitte:

1. Darlegung des Problems an Hand einer typischen Situation. Dieses Beispiel zeigt zugleich die grosse praktische Bedeutung des Problems auf.

2. Es wird der Radó'sche Algorithmus zur Lösung von Programmierungsproblemen, die auch logische Bedingungen enthalten, dargelegt. Die Bedeutung dieser Methode gründet sich auf die Tatsache, dass alle Modelle der Ablaufplanung gerade solche Programmierungsprobleme darstellen.

3. Dieser Abschnitt enthält das Modell des sogenannten „klassischen" Falles.

4. Einige Verbesserungen, die an dem klassischen Fall vorgenommen werden können:

a) Einführung von Anfang- und Schlussbedingungen;
b) Analyse der Durchführungszeiten;
c) Angabe anderer Zielfunktionen.

5. Das erste Modell des Falles, wenn mehrere Exemplare aus demselben Typ von Werkzeugmaschinen vorhanden sind.

6. Das zweite Modell desselben Falles.

BIBLIOGRAFIE

[1] Bertier, B., Roy, B., *Une procédure de résolution pour une classe de problèmes pouvant avoir un caractère combinatorial* I.C.C. Bull **4**, 19–28 (1965).

[2] Johnson, S. M. *Optimal Two-and Three Stage Production Scheduling with Setup Times Included.* Naval Res. Log. Quart. **1**, 61–88 (1954).

[3] Ignall, E., Schrage L., *Application of the Branch and Bound Technique to some Flow-Shop Scheduling Problems.* J. Ops. Res. **13**, 400–412 (1965).

[4] Little, S. D., Murty, K. G., Sweeney, D. W., Karel, C., *An Algorithm for the Travelling Salesman Problem.* J. Ops. Res. **11**, 972–989 (1963).

[5] Németi, L., *Das Reihenfolgeproblem in der Fertigungsprogrammierung und Linearplanung mit logischen Bedingungen.* Mathematica (Cluj), **6**, *1*, 87–99 (1964).

[6] — *Bemerkungen zum Problem der Fertigungsprogrammierung.* Mathematica (Cluj), **9**, *1*, 129–140 (1967).

[7] — *Über das Reihenfolgeproblem in der Fertigung im Falle mehrerer Maschinen derselben Art.* Rev. Roumaine Math. pures et appl. **13**, *6*, 835–860 (1968).

[8] — *Über die Durchführungsdauer eines Arbeitsganges in der Ablaufplanung.* Bull. Mat. Soc. Scie. Math. de la R. S. Roumanie, **12**, *3*, 81–86 (1968).

[9] Németi, L., Radó F., *Sur la programmation temporelle de la fabrication.* Mathematica (Cluj) **8**, *1*, 109–115 (1966).

[10] Peteanu, V., *Optimal Paths in Networks and Generalizations.* Mathematica (Cluj), **11**, *2*, 311–328 (1969) şi **12**, 1, 169–188 (1970).

[11] Radó, F., *Programarea liniară cu condiţii logice.* Comunic. Acad. R.P.R. **13**, 1039–1042 (1963).

[12] — *Un algorithme pour résoudre certains problèmes de programmation mathématique.* Mathematica (Cluj) **6**, *1*, 105–116 (1964).

[13] Roy, B., *Cheminement et connexité dans les graphes.* Application aux problèmes d'ordonnancement. METRA, Série spéciale, Nº 1, 1962.

Primit la 15. XI. 1971.