REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ȘI TEORIA APROXIMAȚIEI
Volumul 3, Fascicola 2, 1974, pp. 121–140

TEOREME DE MEDIE PENTRU TRANSFORMĂRI LINIARE ȘI POZITIVE

de

ALEXANDRU LUPAȘ
(Cluj)

În prima parte a acestei lucrări se stabilesc cîteva reprezentări ale transformărilor liniare și pozitive definite pe spațiul Banach $C(K)$, $K=[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, al funcțiilor reale definite și continue pe K. Aceste reprezentări în care intervin diferențele divizate ale argumentului pe puncte intermediare arată că în cazul aproximării unei funcții continue, prin imaginile ei furnizate de către transformări liniare și pozitive care conservă funcțiile liniare, restul este de formă simplă.

Pentru ilustrarea rezultatelor, în partea a doua se fac unele aplicații. Cu acest prilej se găsește forma restului în diverse procedee de aproximare. Un rol important îl ocupă reprezentarea restului în cazul aproximării operatorului identic prin șiruri de operatori liniari și pozitivi de tip Jackson.

1. Teoreme de medie

În cele ce urmează se utilizează notațiile:

$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ este diferența divizată de ordinul n,

$$e_j(t) = t^j, \ j = 0, 1, \ldots .$$

TEOREMA 1. *Dacă $F: C(K) \to \mathbf{R}$ este o funcțională liniară și pozitivă cu proprietățile*

$$F(e_0) = 1, \ F(e_j) = a_j, \ j = 1, 2,$$

atunci pentru orice $f \in C(K)$ există cel puțin două puncte distincte $\theta_i = \theta_i(f) \in K$, $i = 1, 2$, astfel încît

$$F(f) = f(a_1) + (a_2 - a_1^2)\left[\theta_1, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \theta_2; f\right]. \tag{1}$$

Demonstrație. Fie $g \in C(K)$ neconcavă pe K şi să notăm

$$\operatorname{Epi}[g] = \{(x, y) \in K \times \mathbf{R} \mid y \geqslant g(x)\}.$$

Conform ipotezelor $\operatorname{Epi}[g]$ este o submulțime convexă şi închisă din plan. Să considerăm un hiperplan arbitrar (H) de ecuație

$$c_1x + c_2y + c_3 = 0, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ c_k \in \mathbf{R},$$

astfel încît epigraful lui g, adică $\operatorname{Epi}[g]$, să se afle situat într-unul din semi-spațiile determinate de (H): de exemplu

(2) $$c_1x + c_2y + c_3 \geqslant 0 \text{ pentru orice } (x, y) \in \operatorname{Epi}[g].$$

În particular, deoarece pentru orice $t \in K$ punctele $(t, g(t))$ aparțin lui $\operatorname{Epi}[g]$, avem

$$c_1e_1(t) + c_2g(t) + c_3 \geqslant 0, \quad t \in K.$$

Ipotezele impuse asupra funcționalei F ne conduc la inegalitatea

(3) $$c_1a_1 + c_2F(g) + c_3 \geqslant 0.$$

Cu alte cuvinte, oricare ar fi (H) cu proprietățile menționate, mulțimile $\operatorname{Epi}[g]$ şi $M = \{(a_1, F(g))\}$ se află situate de aceeaşi parte a hiperplanului. Presupunînd prin absurd

$$M \cap \operatorname{Epi}[g] = \varnothing,$$

din teorema a doua de separație a mulțimilor convexe ([16], pag. 65) rezultă existența unui hiperplan (H_1) din $\mathbf{R}^2$ care separă strict M şi $\operatorname{Epi}[g]$. Astfel, dacă

$$H_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid d_1x + d_2y + d_3 = 0\}$$

următoarele inegalități

$$d_1x + d_2y + d_3 > 0 \text{ pentru } (x, y) \in \operatorname{Epi}[g]$$
$$d_1a_1 + d_2F(g) + d_3 < 0$$

au loc simultan. Dar aceasta contrazice (2) şi (3): prin urmare

$$M \subset \operatorname{Epi}[g]$$

adică

(4) $$F(g) - g(a_1) \geqslant 0.$$

Să definim: $R : C(K) \to \mathbf{R}$ prin

$$R(f) = F(f) - f(a_1).$$

Aceasta este o funcțională liniară şi mărginită pe $C(K)$ cu proprietățile

$$R(e_0) = R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = a_1^2 - a_1 \geqslant 0.$$

Dacă $a_2 = a_1^2$ atunci $F(e_k) = e_k(a_1)$, $k = 0,1,2$, deci după cum este cunoscut aceasta implică

$$F(f) = f(a_1) \text{ pentru orice } f \in C(K).$$

Cu alte cuvinte în acest caz reprezentarea (1) este adevărată pentru orice θ_1, θ_2 din K.

Să presupunem $a_2 - a_1^2 > 0$; din (4) rezultă că R verifică $R(g) \geqslant 0$ pentru orice $g \in C(K)$ neconcavă pe K şi în plus R are gradul de exactitate (efectiv) egal cu unu. Fie $\varphi_\lambda \in C(K)$ unde

$$\varphi_\lambda(t) = (t - \lambda)_+ = \frac{t - \lambda + |t - \lambda|}{2}, \ \lambda \in K.$$

Deoarece e_2 este convexă şi pentru orice $\lambda \in K$ funcțiile φ_λ sînt neconcave

$$R(e_2)R(\varphi_\lambda) \geqslant 0, \quad \lambda \in K.$$

Utilizînd un rezultat stabilit de către T. POPOVICIU ([10], [13] teorema 15) rezultă că R admite o reprezentare sub formă simplă: pentru orice $f \in C(K)$ există punctele distincte $\theta_i' \in K$, $i = 1, 2, 3$, astfel ca

$$R(f) = c \cdot [\theta_1', \theta_2', \theta_3'; f]$$

unde c este independent de alegerea funcției f. Pentru $f = e_2$ găsim

$$c = R(e_2) = a_2 - a_1^2.$$

În lucrarea [12] (vezi şi [9], pag. 176] se arată că dacă $x_i \in K$, $i = 1, 2,\ldots, n + 1$, sînt distincte şi $f \in C(K)$ atunci există în K cel puțin două puncte distincte y_1, y_2 astfel încît

(5) $$[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}; f] = \left[y_1, y_1 + \frac{1}{n}(y_2 - y_1), y_1 + \frac{2}{n}(y_2 - y_1), \ldots, y_2; f\right].$$

Astfel θ_i', $i = 1, 2, 3$, pot să fie alese echidistante şi teorema este demonstrată.

Proprietatea de medie (1) se poate descrie mai precis în cazul spaţiului $C^{(2)}(K)$. Pentru aceasta este suficient să considerăm funcţionala $R_1 : C^{(2)}(K) \to \mathbf{R}$ definită prin

$$R_1(f) = R(f) - R(e_2)\frac{f''(z)}{2}$$

unde

$$z = \frac{R(e_3)}{3\,R(e_2)}\,.$$

Fără a restrînge generalitatea s-a presupus $R(e_2) \neq 0$; în caz contrar, adică $R(e_2) = 0$, reprezentarea care se va găsi este trivială. Menţionăm că R_1 este mărginită faţă de norma

$$\|f\|_* = \|f\| + \|f'\| + \|f''\|, \quad f \in C^{(2)}(K), \quad \|\cdot\| = \max_K |\cdot|.$$

Din (5) şi pe baza lemelor 1 şi 2 din [14] rezultă că R_1 are gradul de exactitate (efectiv) trei şi de asemenea R_1 este de formă simplă. Astfel se demonstrează.

C o r o l a r u l 2. *Dacă $F : C^{(2)}(K) \to \mathbf{R}$ este o funcţională liniară şi pozitivă cu proprietăţile*

$$F(e)_0 = 1, \; F(e_i) = a_i, \; i = 1, 2, 3, 4, \; a_2 \neq a_1^2,$$

atunci pentru orice $f \in C^{(2)}(K)$ există cel puţin două puncte distincte $\xi_i = \xi_i(f) \in K$, $i = 1, 2$, astfel încît

$$F(f) = f(a_1) + \frac{a_2 - a_1^2}{2} f''\left[\frac{a_3 - a_1^3}{3(a_2 - a_1^2)}\right] + \tag{6}$$

$$+ W(a)\left[\xi_1, \frac{3\xi_1 + \xi_2}{4}, \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \frac{\xi_1 + 3\xi_2}{4}, \xi_2; f\right]$$

unde

$$W(a) = \frac{a_1^6 - 3a_1^4 a_2 + 4a_1^3 a_3 - 3a_1^2 a_4 + 3a_2 a_4 + 2a_3^2}{3(a_2 - a_1^2)}.$$

În cazul operatorilor liniari şi pozitivi definiţi pe $C(K)$ se stabilesc rezultate similare. Acestea vor fi enunţate pentru şiruri de operatori liniari şi pozitivi, termenul de „şir" fiind neesenţial. În lucrarea [8], G. MÜHLBACH face investigaţii de aceeaşi natură.

TEOREMA 3. *Dacă $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ este un şir de operatori liniari şi pozitivi definiţi pe $C(K)$ cu*

$$L_n e_0 = e_0, \; L_n e_k = a_{kn}, \; k = 1, 2, 3, 4,$$

atunci

i) *pentru orice $x \in K$ şi $f \in C(K)$ există cel puţin un sistem de puncte distincte $\theta_{in} = \theta_{in}(f, x) \in K$, $i = 1, 2$, astfel încît*

$$(L_n f)(x) = f[a_{1n}(x)] + [a_{2n}(x) - a_{1n}^2(x)]\left[\theta_{1n}, \frac{\theta_{1n} + \theta_{2n}}{2}, \theta_{2n}; f\right]; \tag{7}$$

ii) *oricare ar fi $x \in K_1 = \{x \in K \mid a_{2n}(x) \neq a_{1n}^2(x)\}$ şi $g \in C^{(2)}(K)$ există o pereche de puncte distincte $\xi_{in} = \xi_{in}(g, x) \in K$, $i = 1, 2$, pentru care*

$$(L_n g)(x) = g[a_{1n}(x)] + \frac{a_{2n}(x) - a_{1n}^2(x)}{2} g''[z_n(x)] + \tag{8}$$

$$+ W_n(a,x)\left[\xi_{1n}, \frac{3\xi_{1n} + \xi_{2n}}{4}, \frac{\xi_{1n} + \xi_{2n}}{2}, \frac{\xi_{1n} + 3\xi_{2n}}{4}, \xi_{2n}; g\right]$$

unde

$$z_n = \frac{a_{3n} - (a_{1n})^3}{3[a_{2n} - (a_{1n})^2]}$$

$$W_n(a,.) = a_{4n} - (a_{1n})^4 - 6[a_{2n} - (a_{1n})^2] z_n^2, \; \textit{pe } K_1.$$

Demonstraţie. Pentru n arbitrar şi x fixat pe K respectiv pe K_1 se consideră funcţionala liniară şi pozitivă $F : C(K) \to \mathbf{R}$ definită prin

$$F(f) = (L_n f)(x), \quad f \in C(K),$$

pentru care se aplică rezultatele stabilitate în teorema 1 şi corolarul 2.

Rezultatele expuse mai sus se pot extinde şi în cazul unui sistem Cebîşev $\{f_0, f_1, f_2\}$ din $C(K)$. Vom considera $f_0 = e_0$, $f_1 : K \to K$, iar prin

$$\begin{bmatrix} f_0, & f_1, & f_2. \\ x_0, & x_1, & x_2, \end{bmatrix}; f\Bigg]$$

notăm diferenţa divizată pe nodurile x_0, x_1, x_2 relativă la sistemul f_0, f_1, f_2. Dacă $F : C(K) \to \mathbf{R}$ este o funcţională liniară şi pozitivă astfel încît

$$F(f_0) = 1, \; F(f_1) = b_1, \; F(f_2) = b_2,$$

atunci din $f_1(t) \in K$ pentru orice $t \in K$ rezultă $b_1 \in K$, adică există $y \in K$ astfel ca $b_1 = f_1(y)$. Dacă presupunem $b_2 = f_2(y)$ atunci $F(f_k) = f_k(y)$, $k = 0, 1, 2$, deci F coincide pe $C(K)$ cu funcţionala de evaluare a punctului y.

Dacă notăm

$$R(f) = F(f) - f(y)$$

şi

$$b_2 \neq f_2(y), \tag{9}$$

atunci nu este posibil ca R să se anuleze pe mulţimea funcţiilor convexe relativ la $\{f_0, f_1\}$, presupunînd că $\{f_0, f_1\}$ este un sistem Cebîşev. În adevăr, dacă ar exista o funcţie $h \in C(K)$ convexă pe K relativ la $\{f_0, f_1\}$ astfel încît $R(h) = 0$, atunci F coincide pe sistemul Cebîşev $\{f_0, f_1, h\}$ cu funcţionala de evaluare a punctului y, ceea ce implică $F(f) = f(y)$ pe $C(K)$; dar aceasta contrazice (9). În concluzie $R(h) \neq 0$ pentru orice $h \in C(K)$ convex relativ la $\{f_0, f_1\}$. Din [13, teorema 5] rezultă

TEOREMA 4. *Fie* $f_j \in C(K)$, $j = 0, 1, 2$, *un sistem Cebîşev pe* K *cu proprietăţile :*

a) $f_0 = e_0$, $f_1(K) \subseteq K$

b) $\{f_0, f_1\}$ *este un sistem Cebîşev pe* K.

Dacă $L_n : C(K) \to C(K)$, $n = 1, 2, \ldots$, *este un şir de operatori liniari şi pozitivi cu* $L_n e_0 = e_0$, *atunci pentru orice* $f \in C(K)$ *şi* $x \in K$ *există punctele distincte* $\theta_{in} = \theta_{in}(f, x)$, $i = 0, 1, 2$, *din* K, *astfel încît*

$$(L_n f)(x) = f[y_n(x)] + \{(L_n f_2)(x) - f_2[y_n(x)]\}\begin{bmatrix} f_0, & f_1, & f_2 & \\ \theta_{0n}, & \theta_{1n}, & \theta_{2n} & ; f \end{bmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

unde $y_n : K \to K$ *se determină prin egalitatea*

$$f_1[y_n(x)] = (L_n f_1)(x).$$

Din afirmaţiile pe care le-am demonstrat rezultă posibilitatea generalizării noţiunii de funcţie neconcavă. Să fixăm un operator liniar şi pozitiv $T : D \to D$ unde D este un spaţiu liniar de funcţii reale definite pe K care conţine spaţiul $C(K)$. În plus să presupunem că operatorul T conservă funcţiile liniare. O *funcţie* $f \in D$ se numeşte *neconcavă relativ la* T dacă

$$f(x) \leqslant (Tf)(x) \quad \text{pentru orice} \quad x \in K.$$

Teorema 3 ne arată că orice funcţie neconcavă din $C(K)$ este şi neconcavă relativ la orice operator $T : C(K) \to C(K)$ cu proprietăţile menţionate.

Să arătăm că această noţiune generalizează efectiv neconcavitatea. Cu alte cuvinte, trebuie să arătăm că există un operator $L : C(K) \to C(K)$ liniar şi pozitiv, $Le_k = e_k$, $k = 0, 1$, şi o funcţie $g \in C(K)$ neconcavă relativ la L care nu este neconcavă în sens obişnuit. Definim pe $C[0, 1]$ operatorul L prin

$$(Lf)(x) = \begin{cases} (1 - 2x)f(0) + 2xf\left(\frac{1}{2}\right), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ f(x), & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Fie

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \ x = 0 \\ -2x \sin^2 \frac{\pi}{x}, & x \in (0,1]. \end{cases}$$

Avem

$$g \leqslant Lg \quad \text{pe} \quad [0,1]$$

dar g nu este neconcavă pe $[0,1]$.

În legătură cu noţiunea de funcţie neconcavă introdusă mai sus, trebuie subliniat faptul că pentru ca aceasta să aibă sens se va presupune $Te_2 \neq e_2$ pe K.

2. Aplicaţii

Pentru simplificarea expunerii nu se va mai preciza dependenţa dintre punctele intermediare şi funcţia care se ia în considerare. Totodată se subînţelege că punctele intermediare, deşi notate cu aceleaşi litere, diferă de la o formulă de medie la alta.

I. Fie $F : C[a,b] \to \mathbf{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$, unde

$$F(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

Deoarece

$$F(e_k) = a_k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}$$

din teorema 1 şi corolarul 2 rezultă formulele de medie

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{12}\left[\theta_1, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \theta_2 ; f\right] \tag{11}$$

$$f \in C[a, b], \ \theta_i \in [a, b], \ i = 1, 2;$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt = g\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{24} g''\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-4)^4}{80}\left[\xi_1, \frac{3\xi_1+\xi_2}{4}, \frac{\xi_1+\xi_2}{2}, \frac{\xi_1+3\xi_2}{4}, \xi_2 ; g\right], \tag{12}$$

$$g \in C^{(2)}[a, b], \qquad \xi_i \in [a, b], \ i = 1, 2.$$

Teoremele de medie exprimate prin (11) — (12) se pot extinde şi la funcţionala $C[a, b] \to \mathbf{R}$ ale cărei imagini sînt

$$\int_a^b w(t)f(t)dt \quad \text{cu} \quad \int_a^b w(t)dt = 1, \quad w \geq 0.$$

II. Restul într-o formulă de cuadratură atribuită lui Euler

Dacă $0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \ldots < \varepsilon_n = 1$, $a_k = \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}$, $x_k = \frac{\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}}{2}$ se consideră formula exactă de cuadratură

$$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) + R_n(f), \quad f \in C[0, 1]. \tag{13}$$

Punînd în (11) $a = \varepsilon_{k-1}$, $b = \varepsilon_k$ găsim

$$a_k h(x_k) < \int_{\varepsilon_{k-1}}^{\varepsilon_k} h(t)dt, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

pentru orice $h \in C[0, 1]$ care este convexă pe $[0, 1]$. Prin însumarea inegalităţilor de mai sus observăm că $R_n(h) > 0$ pentru h convexă. Aceasta înseamnă că $R_n : C[0, 1] \to \mathbf{R}$ are o formă simplă. Deoarece

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n} a_k^3$$

avem următoarea reprezentare a restului în (13)

$$R_n(f) = \frac{1}{12}\left[\theta_{1n}, \frac{\theta_{1n} + \theta_{2n}}{2}, \theta_{2n}; f\right] \sum_{k=1}^{n} a_k^3 \tag{14}$$

unde $f \in C[0, 1]$ şi θ_{1n}, θ_{2n} sînt puncte distincte din $[0, 1]$. În particular) considerînd formula practică de cuadratură $\left(\varepsilon_k = \frac{k}{n}\right)$

$$\int_0^1 f(t)\, dt \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$$

pentru $g \in C^{(2)}[0,1]$ rezultă

$$\int_0^1 g(t)dt = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + \frac{1}{24n^2} g''\left(\frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{40n^2 - 37}{240n^4}\left[\xi_{1n}, \frac{3\xi_{1n} + \xi_{2n}}{4}, \frac{\xi_{1n} + \xi_{2n}}{2}, \frac{\xi_{1n} + 3\xi_{2n}}{4}, \xi_{2n}; g\right]$$

unde ξ_{1n}, ξ_{2n} sînt puncte distincte din $[0,1]$. Reprezentarea (14) a restului poate să fie comparată cu rezultatul lui S. HABER [3].

III. Operatorii lui Bernstein

$B_n : C[0, 1] \to C[0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$, se definesc prin:

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

unde

$$b_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{15}$$

Notînd $a_{kn} = B_n e_k$ avem

$$a_{0n}(x) = 1, \quad a_{1n}(x) = x, \quad a_{2n}(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

$$a_{3n}(x) = x^3 + \frac{x(1-x)[(3n-2)x + 1]}{n^2}$$

$$a_{4n}(x) = x^4 + \frac{x(1-x)[(6n^2 - 11n + 6)x^2 + (7n - 6)x + 1]}{n^3}.$$

Pentru $f \in C[0, 1]$, $g \in C^{(2)}[0, 1]$, $x \in [0, 1]$, din (7) şi (8) obţinem

$$(B_n f)(x) = f(x) + \frac{x(1-x)}{n}\left[\theta_{1n}, \frac{\theta_{1n} + \theta_{2n}}{2}, \theta_{2n}; f\right] \tag{16}$$

$$(B_n g)(x) = g(x) + \frac{x(1-x)}{2n} g''\left(x + \frac{1-2x}{3n}\right) +$$

$$+ \frac{x(1-x) + (9n-10)x^2(1-x)^2}{3n^3}\left[\xi_{1n}, \frac{3\xi_{1n} + \xi_{2n}}{4}, \frac{\xi_{1n} + \xi_{2n}}{2}, \frac{\xi_{1n} + 3\xi_{2n}}{4}, \xi_{2n}; g\right]$$

unde θ_{1n}, θ_{2n}; ξ_{1n}, ξ_{2n}, sînt puncte distincte situate pe $[0, 1]$.
Prima dintre formulele de medie (16) a fost găsită de către O. ARAMĂ [1].

Deşi nu are o formă elegantă menţionăm şi următorul rezultat în cazul sistemului Cebîşev.

$$f_0(x)=1,\quad f_1(x)=e^{x-1},\quad f_2(x)=e^{2(x-1)},\quad x\in[0,1].$$

Din teorema 4 rezultă

$$(B_nf)(x)=f[y_n(x)]-Q_n(x)\left[\begin{matrix} f_0, & f_1, & f_2 \\ \theta_{0n}, & \theta_{1n}, & \theta_{2n}\end{matrix};f\right],\quad n=1,2,\ldots,$$

unde θ_{in}, $i=0,1,2$, sînt puncte distincte din $[0,1]$ şi

$$y_n(x)=\ln(xe^{1/n}+1-x)^n$$

$$Q_n(x)=\frac{(xe^{2/n}+1-x)^n-(xe^{1/n}+1-x)^{2n}}{e^2}.$$

IV. Cîteva proprietăţi de aproximare ale operatorilor lui Kantorovici

Un alt exemplu de şir de operatori liniari şi pozitivi cu proprietăţi interesante este şirul $K_n: C[0,1]\to C[0,1]$ unde (vezi [4])

(17) $$(K_nf)(x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}(x)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}f(t)dt,\quad n=1,2,\ldots.$$

polinoamele $b_{n,k}$ fiind definite în (15).

Deşi are un sens bine precizat numai în cazul funcţiilor nenegative, introducem următoarea definiţie: dacă $T:C[a,b]\to C[a,b]$ este un operator liniar cu proprietatea

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b (Tf)(t)dt \text{ pentru orice } f\in C[a,b].$$

spunem că T *conservă aria*.

Operatorii lui Bernstein sînt exemple de transformări liniare care conservă neconcavitatea de orice ordin dar pe de altă parte ei nu conservă aria. Se pune problema dacă există un operator polinomial care să posede ambele proprietăţi. Un răspuns afirmativ este dat în teorema de mai jos care afirmă că orice funcţie continuă şi neconcavă de ordinul p, $p\geqslant 0$, poate să fie aproximată uniform pe $[a,b]$, cu conservarea ariei, printr-un şir de polinoame neconcave de acelaşi ordin.

TEOREMA 5. *Operatorii (K_n), $n=1,2,\ldots$, definiţi prin (17) conservă aria şi neconcavitatea de orice ordin. În plus, pentru orice $x\in[0,1]$ şi*

$f\in C[0,1]$ există punctele distincte $\theta_{in}=\theta_{in}(f,x)\in[0,1]$, $i=1,2$, astfel încît

(18) $$(K_nf)(x)=f\left(\frac{2nx+1}{2n+2}\right)+\frac{12nx(1-x)+1}{12(n+1)^2}\left[\theta_{1n},\frac{\theta_{1n}+\theta_{2n}}{2},\theta_{2n};f\right].$$

Demonstraţie. Avem

$$\int_0^1(K_nf)(t)dt=\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt.$$

Să stabilim egalitatea

(19) $$(K_nf)^{(j)}(x)=\frac{(j!)^2}{(n+1)^{j-1}}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{n-j}b_{n-j,k}(x)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}\left[t,t+\frac{1}{n+1},\ldots,t+\frac{j}{n+1};f\right]dt.$$

Presupunînd (19) verificată, avem

$$(K_nf)^{(j+1)}=\frac{j!(j+1)!}{(n+1)^{j-1}}\binom{n}{j+1}\sum_{k=0}^{n-j-1}b_{n-j-1,k}\left[\int_{\frac{k+1}{n+1}}^{\frac{k+2}{n+1}}\left[t,t+\frac{1}{n+1},\ldots,t+\frac{j}{n+1};f\right]dt-\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}\left[t,t+\frac{1}{n+1},\ldots,t+\frac{j}{n+1};f\right]dt\right]=$$

$$=\frac{[(j+1)!]^2}{(n+1)_j}\binom{n}{j+1}\sum_{k=0}^{n-j-1}b_{n-j-1,k}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}\left[t,t+\frac{1}{n+1},\ldots,t+\frac{j+1}{n+1};f\right]dt.$$

Dacă f este neconcavă de ordinul $j-1$ pe $[0,1]$, din (19) rezultă

$$(K_nf)^{(j)}\geqslant 0\quad\text{pe } [0,1]$$

ceea ce demonstrează că funcţie K_nf este de asemenea neconcavă de acelaşi ordin.

În continuare să notăm

$$(R_n f)(x) = (K_n f)(x) - f\left(\frac{2nx+1}{2n+2}\right).$$

Atunci $R_n e_0 = R_n e_1 = 0$, $(R_n e_2)(x) = \frac{12nx(1-x)+1}{12(n+1)^2}$ şi din (7) găsim (18). Se poate găsi şi o reprezentare a restului pe subspaţiul $C^{(2)}[0, 1]$; pentru aceasta se utilizează egalităţile

$$(R_n e_3)(x) = \frac{(24n^2 - 16n)x^2(1-x) + 20nx(1-x) + 2nx + 1}{8(n+1)^3}$$

$$(E_n e_4)(x) = \frac{1}{16(n+1)^4}\Big[(-96n^3 + 176n^2 - 96n)x^4 + (96n^3 - 384n^2 + 256n)x^3 + (216n^2 - 240n)x^2 + 88nx + \frac{11}{5}\Big].$$

Egalitatea (19) ne permite să reprezentăm operatorii lui Kantorovici cu ajutorul diferenţelor divizate.

C o r o l a r u l 6. *Dacă* $K_n : C[0, 1] \to C[0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots,$ *sînt definiţi prin* (17), *atunci pentru orice* $f \in C[0, 1]$ *şi* $x \in [0, 1]$

$$(K_n f)(x) = (n+1)\int_0^1 b_{n,[(n+1)t]}(x) f(t)dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{x}{n+1}\right)^k \int_0^1 \left[\frac{t}{n+1}, \frac{t+1}{n+1}, \ldots, \frac{t+k}{n+1}; f\right]dt.$$

Operatorii K_n, $n = 1, 2, \ldots,$ sînt exemple care ne arată că proprietatea de conservare a neconcavităţii de ordin superior nu depinde de conservarea funcţiilor liniare.

V. Operatorii lui Meyer-König şi Zeller

$M_n: C[0, 1] \to C[0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots,$ (vezi [7] şi [6]) au imaginile

$$(M_n f)(x) = (1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} x^k \binom{n+k}{k} f\left(\frac{k}{n+k}\right), \quad x \in [0, 1],$$

$$(M_n f)(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (M_n f)(x) = f(1).$$

Pentru $f \in C[0,1]$ găsim

$$(M_n f)(x) = f(x) + A_n(x)\left[\theta_{1n}, \frac{\theta_{1n} + \theta_{2n}}{2}, \theta_{2n}; f\right]$$

unde $x \in [0, 1]$, θ_{1n}, θ_{2n} sînt puncte distincte din $[0, 1]$ şi în plus (vezi [6] şi [17])

$$0 \leqslant A(x) < \frac{4}{27n}\left[1 - \frac{n^2 - 5}{4(n^2-1)^2}\right], \quad n = 2, 3, \ldots.$$

VI. Restul în aproximarea cu ajutorul unui şir de operatori polinomiali care conservă aria şi sînt simetrici

Pe spaţiul $C[0, 1]$ definim şirul de operatori (vezi [5]) $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ prin

$$(L_n f)(x) = \int_0^1 l_n(t, x) f(t)dt, \quad x \in [0, 1],\ n = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

unde

$$l_n(t, x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) b_{n,k}(t)$$

şi $b_{n,k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, sînt polinoamele definite în (15). Se verifică uşor că L_n conservă aria; în plus

$$L_n e_0 = e_0, \quad a_{1n}(x) = \frac{nx+1}{n+2}, \quad a_{2n}(x) = \frac{n(n-1)x^2 + 4nx + 2}{(n+2)(n+3)}.$$

Din (7) se găseşte următoarea reprezentare a restului aproximării unei funcţii $f \in C[0,1]$ prin şirul de funcţii $(L_n f)_{n=1}^{\infty}$ definit în (20)

$$(L_n f)(x) - f(x) = \frac{1-2x}{n+2}\left[x, \frac{nx+1}{n+2}; f\right] + \frac{(n+1)[1 + 2nx(1-x)]}{(n+2)^2(n+3)}\left[\theta_{1n}, \frac{\theta_{1n}+\theta_{2n}}{2}, \theta_{2n}; f\right],$$

θ_{in}, $i = 1, 2$, fiind puncte distincte situate pe $[0, 1]$.

VII. Operatorii Beta

Fie (p, r) un punct fixat pe $(0, 1) \times (0, 1)$ şi $w(t) = t^p(1 - t^r)$, $t \in [0, 1]$. Prin $W(p, r)$ se notează spaţiul funcţiilor $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ pentru care există o constantă $M_f > 0$ astfel încît

$$|f(t)| \leqslant \frac{M_f}{w(t)}, \quad t \in (0, 1).$$

Şirul operatorilor Beta (vezi [5]) se defineşte pe $W(p, r)$ prin

$$(21)\qquad (\mathscr{B}_n f)(x) = \frac{1}{B(nx+1,\, n+1-nx)} \int_0^1 t^{nx}(1-t)^{n(1-x)} f(t)\,dt, \qquad x \in [0, 1].$$

Se arată că spaţiul $W(p, r)$ rămîne invariant faţă de $\mathscr{B}_n$, adică $\mathscr{B}_n f \in W(p,$ în timp ce $f \in W(p,r)$. În [5] autorul demonstrează şi inegalităţile

$$e_k(x) \exp\left(-\frac{k(k+2)}{n}\right) \leqslant (\mathscr{B}_n e_k)(x) = \frac{\Gamma(nx+k+1)\cdot\Gamma(n+2)}{\Gamma(nx+1)\cdot\Gamma(n+k+2)} \leqslant$$

$$\leqslant e_k(x) \exp\left(\frac{k(k+1)}{nx}\right), \quad x \in (0, 1].$$

Pentru $f \in C[0, 1]$ din teorema 3 se găseşte

(22)

$$(\mathscr{B}_n f)(x) = f\left(\frac{nx+1}{n+2}\right) + \frac{(nx+1)[1+n(1-x)]}{(n+2)^2(n+3)}\left[\theta_{1n},\ \frac{\theta_{1n}+\theta_{2n}}{2},\ \theta_{2n};\, f\right],$$

$$x,\ \theta_{in} \in [0,\ 1],\ \theta_{1n} \neq \theta_{2n}.$$

VIII. Operatorii lui Fejér

Fie $F_n : C[-1,\ 1] \to C[-1,\ 1]$, $n = 1, 2, \ldots$, cu imaginile

$$(23)\qquad (F_n f)(x) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} (1 - x x_{nk}) \left[\frac{T_n(x)}{x - x_{nk}}\right]^2 f(x_{nk})$$

unde x_{nk}, $k = 1, 2, \ldots, n$ sînt rădăcinile polinomului T_n al lui Cebîşev. Cu notaţiile utilizate în teorema 3, avem

$$F_n e_0 = e_0,$$

$$a_{1n}(x) = x - \frac{T_n(x)T_{n-1}(x)}{n},$$

$$a_{2n}(x) = x^2 - \frac{T_n(x)T_{n-2}(x)}{n}.$$

Astfel pentru orice $x \in [-1, 1]$ şi $f \in C[-1, 1]$ există $\theta_{1n} \neq \theta_{2n}$ pe intervalul $[-1, 1]$ pentru care

$$(24)\qquad (F_n f)(x) = f\left[x - \frac{T_n(x)T_{n-1}(x)}{n}\right] +$$

$$+ \frac{T_n^2(x)}{n}\left[1 - \frac{T_{n-1}^2(x)}{n}\right]\left[\theta_{1n},\ \frac{\theta_{1n}+\theta_{2n}}{2},\ \theta_{2n};\, f\right].$$

IX. Prin **şirul de operatori algebrici de tip Jackson** înţelegem

$J_{2n-2} : C[-1,\ 1] \to C[-1, 1]$, $n = 3, 4, \ldots$, unde

$$(25)\qquad J_{2n-2} f = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} K_{2n-2}(.,t) f(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad f \in C[-1,\ 1],$$

$$K_{2n-2}(x, t) = \sum_{k=0}^{2n-2} \rho_{k,2n-2}\, T_k(x) T_k(t), \quad (x,\ t) \in [-1, 1] \times [-1, 1],$$

coeficienţii $\rho_{k,2n-2}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-2$, fiind definiţi prin

$$\frac{3}{2n(2n^2+1)}\left(\frac{1 - T_n(y)}{1-y}\right)^2 = \sum_{k=0}^{2n-2} \rho_{k,2n-2}\, T_k(y), \qquad y \in [-1, 1].$$

Nucleul K_{2n-2} are proprietăţile

i) $K_{2n-2}(.,.)$ este un polinom de grad $2n-2$

ii) $K_{2n-2}(x, t) \geqslant 0$ pentru $(x,\ t) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$

iii) $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} K_{2n-2}(x, t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 1.$

Pozitivitatea nucleului rezultă din următoarea observaţie: dacă pentru orice $y \in [-1, 1]$

$$\sum_{k=0}^{p} a_k T_k(y) \geqslant 0,$$

atunci oricare ar fi $(x,\ t) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$

$$\sum_{k=0}^{p} a_k T_k(x) T_k(t) \geqslant 0.$$

Utilizînd unele rezultate ale lui G. P. SAFRONOVA [15] găsim:

$$\rho_{0,2n-2} = \frac{1}{2}$$

$$\rho_{k,2n-2} = \begin{cases} 1 + \dfrac{3k^3 - 6nk^2 - 3k}{2n(2n^2+1)}, & k = 1, 2, \ldots, n-2 \quad (n \geqslant 3) \\[2ex] \dfrac{-k^3 + 6nk^2 - (12n^2-1)k + 8n^3 - 2n}{2n(2n^2+1)}, & k = n-1, \ldots, 2n-2. \end{cases}$$

Dacă $a_{kn} = J_{2n-2}\, e_k$, avem

$$a_{0n}(x) = 1,\quad a_{1n}(x) = x - \frac{3x}{2n^2+1},\qquad a_{2n}(x) = x^2 + \frac{3(4n-3)}{2n(2n^2+1)}(1-2x^2)$$

şi prin urmare din (7)

$$(J_{2n-2}\, f)(x) = f\left(\frac{2n^2-2}{2n^2+1}\, x\right) +$$

$$\text{(26)}\qquad + \left(\frac{3(4n-3)}{2n(2n^2+1)} - \frac{3(n-1)(4n^2-2n+3)}{n(2n^2+1)^2}\, x^2\right)\left[\theta_{1n},\ \frac{\theta_{1n}+\theta_{2n}}{2},\ \theta_{2n}\ ;\ f\right],$$

$n = 6, 7, \ldots, f \in C[-1, 1]$; $x, \theta_{in} \in [-1, 1]$, $\theta_{1n} \neq \theta_{2n}$.

Fie $T: C[a, b] \to C[a, b]$ un operator liniar şi pozitiv care conservă funcţiile constante. Dacă $\omega(f; .)$ este modulul de continuitate al unei funcţii $f \in C[-1, 1]$, atunci (vezi [11])

$$\text{(27)}\qquad \|f - Tf\| \leqslant \left\{1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{A}\right\}\omega(f;\ \delta),\qquad \delta > 0,$$

unde

$$A = \max_{x\in[a,b]} (T\Omega_2)(x),\qquad \Omega_2(t, x) = (t-x)^2.$$

În cazul de faţă

$$(J_{2n-2}\,\Omega_2)(x) = \frac{3(2n-3)}{n(2n^2+1)}(1-x^2) + \frac{9}{2n(2n^2+1)},\quad x \in [-1, 1],$$

şi prin urmare există o constantă $C \in (0, 1+2\sqrt{3})$ astfel încît

$$\text{(28)}\qquad \|f - J_{2n-2}\, f\| \leqslant C\omega\left(f; \frac{1}{2n-2}\right),\ n = 6, 7, \ldots;\ \|\cdot\| = \max_{[-1,1]} |.|.$$

X. Un alt şir de operatori polinomiali de tip Jackson

În cele ce urmează prin $P_n^{(\alpha,\beta)}$ se va nota polinomul lui Jacobi de gradul n, iar prin P_n polinomul lui Legendre S. BOCHNER [2] a stabilit următorul rezultat: „dacă $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty$ şi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k R_k^{(\alpha,\alpha)}(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in [-1, 1]$, unde s-a notat

$$R_k^{(\alpha,\alpha)}(x) = \frac{P_k^{(\alpha,\alpha)}(x)}{P_k^{(\alpha,\alpha)}(1)},$$

atunci

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k R_k^{(\alpha,\alpha)}(x)\, R_k^{(\alpha,\alpha)}(y) \geqslant 0 \text{ pentru orice } (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1].\text{"}$$

Pe baza teoremei lui S. Bochner se constată că nucleul

$$p_{2n}(x, t) = \frac{3}{2(n^2+3n+3)} \sum_{k=0}^{2n} \frac{2k+1}{2} P_k(x) P_k(t) \int_{1}^{1} P_k(s)\, |P_n^{(2,0)}(s)|^2\, ds,$$

$$(x, t) \in [-1, 1] \times [-1, 1],$$

verifică

$$p_{2n}(x, t) \geqslant 0 \text{ pe } [-1, 1] \times [-1, 1]$$

şi

$$\int_{-1}^{1} p_{2n}(x, t)\, dt = 1.$$

Definim şirul de operatori $\mathfrak{L}_{2n} : C[-1\ 1] \to C[-1.\ 1]$, $n = 1, 2, \ldots$, prin

$$\text{(29)}\qquad \mathfrak{L}_{2n} f = \int_{-1}^{1} p_{2n}(., t) f(t)\, dt.$$

Utilizînd dezvoltarea

$$P_n^{(2,0)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k+2)(n-k+1)(2k+1)}{(n+1)(n+2)} P_k$$

obţinem

$$a_{1n}(x) = \frac{(n^2+3n)x}{n^2+3n+3}$$

$$a_{2n}(x) = \frac{n(2n^2+9n-3)x^2 + 3(2n+1)}{(2n+3)(n^2+3n+3)}.$$

Formula de medie (7), aplicată operatorului $\mathfrak{L}_{2n}$, se scrie

$$\text{(30)}\qquad (\mathfrak{L}_{2n} f)(x) = f\left(\frac{n^2+3n}{n^2+3n+3}\, x\right) +$$

$$+ \frac{3(2n+1)(n^2+3n+3) - 3n(2n^2+3n+3)x^2}{(2n+3)(n^2+3n+3)^2}\left[\theta_{1n},\ \frac{\theta_{1n}+\theta_{2n}}{2},\ \theta_{2n}\ ;\ f\right]$$

unde $f \in C[-1, 1]$ şi θ_{in}, $i = 1, 2$, sînt puncte distincte din $[-1, 1]$.

Cu notaţia introdusă în paragraful precedent, avem

$$(\mathfrak{L}_{2n}\,\Omega_2)(x) = \frac{3(2n+1) - 3x^2(2n-3)}{(2n+3)(n^2+3n+3)}.$$

Din (27) găsim

(31) $$||f - \mathfrak{L}_{2n} f|| \leqslant C_1\omega\left(f; \frac{1}{2n}\right), \text{ cu } C_1 \in (0,\ 1 + 2\sqrt{3}).$$

XI. În încheiere menţionăm că rezultatele demonstrate în prima part a lucrării se pot utiliza şi în stabilirea unor inegalităţi. Pentru exemplifi care să considerăm o funcţională liniară şi pozitivă $F: C[a, b] \to \mathbf{R}$, cu

$$F(e_0) = 1,\ F(e_1) = a_1.$$

Dacă $f \in C[a, b]$ este neconcavă pe $[a, b]$, atunci

(32) $$f(a_1) \leqslant F(f) \leqslant \frac{b - a_1}{b - a} f(a) + \frac{a_1 - a}{b - a} f(b).$$

Inegalităţile (32) constituie o generalizare al unui rezultat stabilit de către J. Hadamard în cazul funcţionalei

$$F(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt, \quad f \in C[a, b].$$

şi în ipoteza suplimentară că f este derivabilă pe $[a,b]$.

XII. Vom prezenta o demonstraţie, care se bazează pe utilizarea noţiunii de funcţie convexă, a următorului rezultat:

TEOREMA 7 (T. POPOVICIU [11]). *Dacă* $L_n: C[0,\ 1] \to C[0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$, *este un şir de operatori liniari şi pozitivi cu proprietăţile*

$$L_n e_0 = e_0$$

$$\lim_{n\to\infty} ||e_k - L_n e_k|| = 0,\ \ k = 1,\ 2,\ ||\cdot|| = \max_{[0,1]} |\cdot|$$

atunci

(33) $$\lim_{n\to\infty} ||f - L_n f|| = 0 \textit{ pentru orice } f \in C[0, 1].$$

Demonstraţie. Şirul $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ este uniform mărginit: într-adevăr

$$||L_n|| = 1,\ n = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Este suficient să arătăm că (33) are loc pe o submulţime densă din $C[0, 1]$. Fie g un element arbitrar din $C^{(2)}[0, 1]$; din teorema 3 rezultă

$$g_k \circ L_n e_1 \leqslant L_n g_k,\ \ k = 1,\ 2,\ \ n = 1,\ 2, \ldots,$$

unde

$$g_1(x) = \frac{x^2}{2}\,||g''|| - g(x),\ \ g_2(x) = g(x) + \frac{x^2}{2}\,||g''||.$$

Pe baza inegalităţilor de mai sus, avem

$$|L_n g - g \circ L_n e_1| \leqslant \frac{||g''||}{2}\,[L_n e_2 - (L_n e_1)^2]$$

deci

$$||g - L_n g|| < ||g''|| \cdot ||e_1 - L_n e_1|| + \frac{||g''||}{2}\,||e_2 - L_n e_2|| + ||g - g \circ L_n e_1||.$$

Astfel

$\lim_{n\to\infty} ||g - L_n g|| = 0$ pentru orice $g \in C^{(2)}[0, 1]$, iar teorema este demonstrată.

MEAN VALUE THEOREMS FOR LINEAR POSITIVE TRANSFORMATIONS

ABSTRACT

In the first part of this paper the author establishes some representations of the linear positive transformations defined on the Banach space $C(K)$, $K = [a, b]$. The following notation is used: $e_j(t) = t^j$, $[x_0, x_1 \ldots, x_n; f]$ is the divided difference at the specified knots. A typical result is: „if $F: C(K) \to R$ is a linear positive functional with $F(e_0) = 1$, $F(e_j) = a_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, then for each $f \in C(K)$, $g \in C^{(2)}(K)$ there exist the distinct points $\theta_i = \theta_i(f) \in K$, $\xi_i = \xi_i(g) \in K$, $i = 1, 2$, such that the equalities (1) and (6) are valid''. These results are proved also for linear positive operators $C(K) \to C(K)$. Another result is (see theorem 4): „let $f_j \in C(K)$, $j = 0, 1, 2$, be a Chebyshev system on K with the properties

a) $f_0 = e_0$, $f_1(K) \subseteq K$

b) $\{f_0, f_1\}$ is likewise a Chebyshev system on K.

If $L_n: C(K) \to C(K)$, $n = 1, 2, \ldots$, is a sequence of linear positive operators with $L_n e_0 = e_0$, $L_n e_k = a_{kn}$, then the mean value theorem (10) is true, where the function y_n verifies $f_1 \circ y_n = L_n f_1$.''

Further, the above results are applied in order to find the remainder term in various approximation processes as: the midpoint quadrature formula (13) — (15), the BERNSTEIN operators (16), the KANTOROVICH operators (17) — (18), the operators which are attributed to MEYER-KÖNIG and ZELLER, to FEJÉR (23)—(24), the Beta-operators (21)—(22), the sequence of operators

defined by (20). In the same time two sequences of linear positive operators of the JACKSON type are investigated: the algebraic form of the JACKSON operators (25)—(26), (28), and the sequence whose images are written in (29) (see also (30)—(31)). Finally, a generalization of an inequality by J. HADAMARD is presented in (32) and a proof of a theorem by T. POPOVICIU (see theorem 7): this new proof uses esentially the concept of convexity.

BIBLIOGRAFIE

[1] Aramă, O., *Proprietăţi privind monotonia şirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein şi aplicarea lor la studiul aproximării funcţiilor*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj) **VIII**, 195—210 (1957).

[2] Bochner, S., *Positive zonal functions on spheres*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **40**, 1141—1147 (1954).

[3] Haber, S., *Midpoint quadrature formulas*. Math. Comp., **21**, 719—721 (1967).

[4] Lorentz, G. G., *Bernstein polynomials*. University of Toronto Press, Toronto, 1953.

[5] Lupaş, A., *Die Folge der Betaoperatoren*. Dissertation, Stuttgart, 1972.

[6] Lupaş, A, Müller, M., *Approximation properties of the M_n-operators*. Aequationes Math., **5**, 19—37 (1970).

[7] Meyer-König W.; Zeller K., *Bernsteinsche Potenzreihen*. Studia Math., **19**, 89—94 (1960).

[8] Mühlbach, G., *Operatoren vom Bernsteinschen Typ*. J. Approximation Theory, **3**, 274—292 (1970).

[9] Popoviciu, Elena, *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării*. Editura Dacia, Cluj, 1972.

[10] Popoviciu, T., *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (IX). Bull. Math. Soc. Roum. des Sci., **42**, 65—78 (1940).

[11] — , *Asupra demonstraţiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare*. Lucrările Sesiunii Generale Ştiinţifice Acad. R.P.R., **1950**, 1664—1667.

[12] — , *Folytonos Függvények középértéktételeiről*. Magyar Tudományos Akadémia III oszt. Közleményei, **IV**, 353—356 (1954).

[13] — , *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*. Mathematica (Cluj), **1(24)**, 95—143 (1959).

[14] — , *Asupra unor formule de medie*. Revista de analiză numerică şi teoria aproximaţiei, **1**, fasc. **1**, 97—107 (1972).

[15] Safronova G. P., *On a method of summing divergent series connected with the singular integral of Jackson*. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR, **73**, 277—279 (1950).

[16] Schaefer, H. H., *Topological vector spaces*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1970.

[17] Sikkema, P. C., *On the asymptotic approximation with operators of Meyer-König and Zeller*. Indag. Math., **XXXII**, 428—440 (1970).

Primit la 13.III. 1974.

Institutul de Calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România.