REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola 2, 1974, pp. 141–145

ASUPRA APROXIMĂRII FUNCŢIILOR CU VARIAŢIE MĂRGINITĂ DE ORDIN SUPERIOR.

de

LUCIANA LUPAŞ
(Cluj)

1. Fie $B[0, 1]$ spaţiul funcţiilor $f: [0, 1] \to R$, mărginite pe $[0, 1]$. Vom considera în cele ce urmează şiruri de operatori liniari şi pozitivi $B[0, 1] \to B[0, 1]$ de tip Bernstein în sensul definiţiei date de H. BRASS [1].

Definiţia 1. *Un operator* $L_n : B[0, 1] \to B[0, 1]$ *definit prin*

$$L_n(f) = \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) p_{nj},\ f \in B[0, 1],$$

cu p_{nj}, $j = 0, 1, \ldots, n$, *polinoame de gradul* n, *se numeşte operator de tip Bernstein dacă sînt verificate următoarele proprietăţi*:

1. $p_{nj}(x) \geqslant 0$, *pentru* $x \in [0, 1]$, $j = 0, 1, \ldots, n$;

2. $L_n(1)(x) = 1$ şi $L_n(x)(x) = x$, *pentru* $x \in [0, 1]$;

3. *dacă* $\Delta^k f\left(\frac{j}{n}\right) \geqslant 0$, $j = 0, 1, \ldots, n - k$; $k = 1, 2, \ldots$ *atunci* $\frac{d^k}{dx^k} L_n(f)(x) \geqslant 0$ *pe* $[0, 1]$.

Am notat în definiţia 1 prin simbolul $\Delta^k f\left(\frac{j}{n}\right)$ diferenţa finită a funcţiei f, de ordinul k pe punctul $x = \frac{j}{n}$, definită astfel:

$$\Delta^0 f\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{j}{n};\ \Delta^k f\left(\frac{j}{n}\right) = \Delta^{k-1} f\left(\frac{j+1}{n}\right) - \Delta^{k-1} f\left(\frac{j}{n}\right),\ k = 1, 2, \ldots .$$

Definiţia 2. *O funcţie $f: [0, 1] \to R$ se numeşte neconcavă de ordinul k pe $[0, 1]$ dacă pentru orice sistem de $k + 2$ puncte distincte $x_1, x_2, \dots, x_{k+2}$ din $[0, 1]$ are loc inegalitatea*

$$[x_1, x_2, \dots, x_{k+2}; f] \geq 0.$$

Fie $\mathcal{C}_k[0, 1]$ mulţimea funcţiilor neconcave de ordinul n pe $[0, 1]$.

Observaţia 1. *Proprietatea 3 din definiţia 1 revine la faptul că un operator de tip Bernstein conservă convexitatea de orice ordin cu alte cuvinte, dacă $f \in \mathcal{C}_k[0, 1]$ atunci $L_n(f) \in \mathcal{C}_k[0, 1]$.*

Observaţia 2. *Fie funcţiile $e_{k,\lambda}: [0, 1] \to R$, $0 \leq \lambda < 1$, $k = 1, 2, \dots$ definite prin*

$$e_{k,\lambda}(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in [0, \lambda] \\ (x - \lambda)^k, \text{ dacă } x \in]\lambda, 1]. \end{cases}$$

Se observă imediat că $e_{k,\lambda} \in \mathcal{C}_m[0, 1]$, pentru orice $\lambda \in [0, 1[$, $m = 0, 1, \dots, k$.

2. În [1] se demonstrează că dacă $f: [0, 1] \to R$ este cu variaţie mărginită pe $[0, 1]$ atunci are loc inegalitatea

$$V(L_n f; [0, 1]) \leq V(f; [0, 1]),$$

unde $V(g; [0,1])$ este variaţia totală în sens obişnuit a funcţiei g pe intervalul $[0, 1]$.

Vom arăta că are loc o proprietate asemănătoare dacă considerăm funcţii cu variaţie mărginită de ordin superior pe $[0, 1]$ (vezi [2]).

Definiţia 3. *Fie $(d): 0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 1$ un sistem de m puncte distincte din $[0, 1]$, $f: [0, 1] \to R$* şi

$$V_k(f; [0, 1]; d) = \sum_{j=1}^{m-k-1} |[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}; f]|(x_{j+k+1} - x_j).$$

O funcţie $f: [0, 1] \to R$ se numeşte cu variaţie mărginită de ordinul k pe $[0, 1]$ dacă

$$V_k(f; [0, 1]) = \sup_{(d)} V_k(f; [0, 1]; d) < +\infty.$$

Supremumul în formula de mai sus se consideră relativ la toate sistemele finite (d) de puncte din intervalul $[0, 1]$.

Lema 1. *Dacă $f: [0, 1] \to R$ este cu variaţie mărginită de ordinul k pe $[0, 1]$ şi este derivabilă pe $[0, 1]$ atunci f' este cu variaţie mărginită de ordinul $k - 1$ pe $[0, 1]$ şi $V_{k-1}(f' [0, 1]) = kV_k(f; [0, 1])$.*

Demonstraţia lemei a fost dată în [3].

Lema 2. *Dacă $f \in B[0, 1]$ şi $L_n: B[0, 1] \to B[0, 1]$ este un operator de tip Bernstein atunci are loc identitatea*

$$L_n(f)(x) = \sum_{j=k}^{n} \Delta^k f\left(\frac{j-k}{n}\right) P_{j,k}(x), \tag{1}$$

unde

$$P_{j,0} = p_{nj}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \tag{2}$$

$$P_{j,k+1} = P_{j,k} + P_{j+1,k} + \dots + P_{n,k}, \quad k = 0, 1, \dots; \; j = k + 1, \dots, n.$$

Lema 3. *Polinoamele definite prin formula (2) sînt nenegative şi au următoarele proprietăţi:*

1. $P^{(i)}_{j,k+1}(x) \geq 0$, *pentru* $x \in [0, 1]$ *şi* $i = 1, 2, \dots, k + 1$;

2. $0 \leq P^{(k)}_{j,k+1}(x) \leq \frac{n^k}{k!} L_n^{(k)}(e_{k,0})(x)$, *pentru* $x \in [0, 1]$ *şi* $j = k + 1, \dots, n$.

Demonstraţie. Prima afirmaţie a lemei rezultă din proprietatea de conservare a convexităţii prin operatorii L_n şi alegînd în mod convenabil o funcţie neconcavă de ordinul $1, 2, \dots, k + 1$. De exemplu

$$P_{n,k+1}(x) = \frac{1}{n^{k+1}} L_n(e_{k+1,\lambda_n})(x), \quad \lambda_n = \frac{n-1}{n}.$$

Utilizînd proprietatea precedentă şi lema 2 obţinem:

$$0 \leq P^{(k)}_{j,k+1}(x) = P^{(k)}_{j,k}(x) + \dots + P^{(k)}_{n,k}(x) \leq \sum_{j=k}^{n} P^{(k)}_{j,k}(x) =$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \frac{k!}{n^k}\left[\frac{j-k}{n}, \dots, \frac{j}{n}; e_{k0}\right] \frac{n^k}{k!} P^{(k)}_{j,k}(x) =$$

$$= \frac{n^k}{k!} \sum_{j=k}^{n} \Delta^k e_{k0}\left(\frac{j-k}{n}\right) P^{(k)}_{j,k}(x) = \frac{n^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} L_n(e_{k0})(x).$$

ceea ce trebuia demonstrat la punctul 2 din enunţul lemei.

TEOREMA. *Dacă f este cu variaţie mărginită de ordinul k pe $[0,1]$ şi dacă*

$$\frac{d^k}{dx^k} L_n(e_{k0})(x) \leq k! \text{ pe } [0, 1] \text{ atunci}$$

$$V_k(L_n(f); [0, 1]) \leq V_k(f; [0, 1])$$

pentru orice $n = 1, 2, \dots$.

Demonstrație. Pentru $n < k + 1$ proprietatea fiind verificată, fie $n \geqslant k + 1$. Din lema 1 deducem că

$$V_k(L_n(f)\,;\ [0,\ 1]) = \frac{1}{k!}\, V_0(L_n^{(k)}(f)\,;\ [0,\ 1]).$$

Pe de altă parte

$$V_0(L_n^{(k)}(f)\,;\ [0,\ 1]) = \int_0^1 \left| \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} L_n(f)(x) \right| dx.$$

Utilizînd formula (1) pentru $k + 1$ obținem

$$L_n(f)(x) = \sum_{j=k+1}^{n} f\left(\frac{j-k-1}{n}\right) P_{j,k+1}(x) =$$

$$= \frac{k!}{n^k} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{k+1}{n} \left[\frac{j-k-1}{n},\ \frac{j-k}{n},\ \ldots,\ \frac{j}{n};\ f\right] P_{j,k+1}(x)$$

iar din lema 3 rezultă

$$\left| \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} L_n(f)(x) \right| \leqslant \frac{k!}{n^k} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{k+1}{n} \left| \left[\frac{j-k-1}{n},\ \frac{j-k}{n},\ \ldots,\ \frac{j}{n};\ f\right] \right| P_{j,k+1}^{(k+1)}(x).$$

Deci

$$V_0(L_n^{(k)}(f)\,;\ [0,\ 1]) \leqslant \frac{k!}{n^k} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{k+1}{n} \left| \left[\frac{j-k-1}{n},\ \frac{j-k}{n},\ \ldots,\ \frac{j}{n};\ f\right] \right| P_{j,k+1}^{(k)}(1) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=k+1}^{n} \frac{k+1}{n} \left| \left[\frac{j-k-1}{n},\ \frac{j-k}{n},\ \ldots,\ \frac{j}{n};\ f\right] \right| L_n^{(k)}(e_{k0})(1) \leqslant$$

$$\leqslant k!\, V_k(f;\ [0,\ 1]).$$

Deci $V_k(L_n(f)\,;\ [0,\ 1]) \leqslant V_k(f;\ [0,\ 1])$ pentru orice $n = 1,\ 2,\ \ldots$.

Dacă $p_{nj}(x) = \binom{n}{j} x^j(1-x)^{n-j}$, pentru $x \in [0,\ 1]$ şi $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, se obține ca un caz particular inegalitatea

$$V_k(B_n(f)\,;\ [0,\ 1]) \leqslant V_k(f;\ [0,\ 1])$$

demonstrată în [2] pentru operatorii lui S. N. Bernstein

$$B_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}.$$

ON THE APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF BOUNDED k^{th} VARIATION

ABSTRACT

Let $B[0,\ 1]$ be the space of all real functions which are defined and bounded on $[0,\ 1]$. In this paper one considers sequences $L_n : B[0,\ 1] \to B[0,\ 1]$ $n = 1,\ 2,\ \ldots,$ of linear positive operators of the Bernstein type [1]. It is proved that if f is with bounded k^{th} variation, $k = 1,\ 2,\ \ldots,$ then the following inequality

$$V_k(L_n(f)\,;\ [0,\ 1]) \leqslant V_k(f;\ [0,\ 1]),\ n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

is valid, where $V_k(g;\ [0,\ 1])$ denotes the total k^{th} variation of a function g on $[0,\ 1]$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Brass, H., *Eine Verallgemeinerung der Bernsteinschen Operatoren.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **36**, 111–122 (1971).

[2] Popoviciu, T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur.* Mathematica (Cluj), **X**, 49–54 (1935).

[3] Popoviciu, T., *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles.* Mathematica (Cluj), **VIII**, 1–85 (1933).

Universitatea „Babeş-Bolyai" din Cluj.
Facultatea de Matematică-Mecanică
Catedra de Analiză.

Primit la 29.III. 1974