REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola 2, 1974, pp. 147—152

ASUPRA PRODUSULUI OMOMORF DE MĂSURI RELATIV INVARIANTE PE GRUPURI TOPOLOGICE LOCAL COMPACTE

de

CONSTANŢA MOCANU
(Cluj)

1. *Definiţie. O măsură pozitivă* $\mu \neq 0$ *pe grupul local compact* G *se zice relativ invariantă, dacă pentru orice* $s \in G$ *există un număr* $\Delta(s) > 0$ *astfel ca*

$$\mu(sf) = \Delta(s)\mu(f) \qquad \forall f \in \mathcal{K}(G),$$

unde prin $\mathcal{K}$ (G) *se notează spaţiul vectorial al funcţiilor continue cu suport compact.*

Funcţia $\Delta : G \to R$ se numeşte *modulul la stînga* al măsurii μ

Vom mai nota măsura relativ invariantă μ prin δx, adică

$$\mu(f) = \int_G f(x)\, \delta x.$$

Prin urmare, δx este o măsură *relativ invariantă la stînga pe* G *de modul* Δ.

Δ este un *omomorfism continuu* pe G,

$$\Delta(st) = \Delta(s)\Delta(t), \qquad s,\ t \in G$$

$$\Delta(s^{-1}) = [\Delta(s)]^{-1}$$

Se ştie că dacă dx este o măsură Haar invariantă la stînga pe G şi $\Delta : G \to R$ un omomorfism continuu, atunci măsura δx definită de

$$\int_G f(x)\, \delta x = \int_G \Delta(x) f(x) dx \tag{1}$$

este o măsură relativ invariantă la stînga pe G de modul Δ. Invers orice mă-
sură relativ invariantă la stînga de modul Δ se poate scrie sub forma (1)

2. Fie G şi K două grupuri local compacte şi $\varphi : G \to K$ un omomorfism
surjectiv (epimorfism) continuu, deschis. Să notăm $H = \text{Ker}\,(\varphi)$. Vom no-
ta cu x, y, z elementele generice ale grupurilor G, H, K.

Fie δy şi δz măsuri relativ invariante la stînga pe H, respectiv K
de module Δ_H şi Δ_K. Vom presupune că Δ_H se prelungeşte la un omomor-
fism continuu pe G.

Fiind date aplicația φ şi măsurile δy şi δz, vom construi pe G o măsură
relativ invariantă la stînga, (notată $\delta x = \delta y \times \delta z$, şi pe care o vom numi
produsul omomorf al măsurilor relativ invariante δy, δz), în felul următor:

Conform formulei (1) putem scrie

$$\forall f \in \mathcal{K}(H),\ \int_H f(y)\,\delta y = \int_H \Delta_H(y) f(y)\,dy,$$

$$\forall f \in \mathcal{K}(K),\ \int_K f(z)\,\delta z = \int_K \Delta_K(z) f(z)\,dz,$$

unde dy şi dz sînt măsuri Haar invariante la stînga pe H şi K.

Fie $f \in \mathcal{K}(G)$. Vom nota

$$\forall x \in G,\ f'(x) = \int_H \Delta_H(xy)\, f(xy)\,dy,\quad f' : G \to R$$

Avem

$$\forall t \in H,\ f'(xt) = \int_H \Delta_H(xty) f(xty)\,dy = \int_H \Delta_H(xy) f(xy)\,dy = f'(x),$$

deci f' are aceeaşi valoare pe toate punctele clasei xH şi putem defini
funcția $f'_* : G/H \to R$ prin $f'_*(xH) = f'(x)$.

Ştim că aplicația canonică $i : G/H \to K$ este un izomorfism topologic
definit de

$$i(xH) = \varphi(x),$$

prin urmare, putem defini în mod unic funcția $\bar f : K \to R$ prin $\bar f = f'_* \circ i^{-1}$
care face comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd} G/H \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f'_*"'] & K \arrow[d, "\bar f"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Deci, $\bar f \circ i = f'_*$, adică $\bar f[i(xH)] = f'_*(xH)$, ceea ce înseamnă că avem

$$\forall x \in G,\ \bar f[\varphi(x)] = f'(x) = \int_H \Delta_H(xy) f(xy)\,dy.$$

Se poate arăta că $\bar f \in \mathcal{K}(K)$.

În acest fel, fiecărei funcții $f \in \mathcal{K}(G)$, îi corespunde o funcție unică
$\bar f \in \mathcal{K}(K)$ cu proprietatea că

$$\forall x \in G,\ \bar f[\varphi(x)] = \int_H \Delta_H(xy) f(xy)\,dy. \tag{2}$$

Am construit deci o aplicație

$$\bar\varphi : \mathcal{K}(G) \to \mathcal{K}(K)$$

prin

$$\forall f \in \mathcal{K}(G),\ \bar\varphi(f) = \bar f.$$

Fie $f \in \mathcal{K}(G)$. Vom defini o măsură pozitivă δx pe G prin

$$\int_G f(x)\,\delta x = \int_K \bar f(z)\,\delta z = \int_K \Delta_K(z) \bar f(z)\,dz. \tag{3}$$

Să arătăm că δx este *relativ invariantă la stînga* şi are modulul Δ_G dat
de formula

$$\forall s \in G,\ \Delta_G(s) = \Delta_H(s)\, \Delta_K[\varphi(s)]. \tag{4}$$

Mai întîi vom demonstra formula

$$\forall s \in G,\ \overline{sf} = \Delta_H(s)\,[\varphi(s)\bar f]. \tag{5}$$

Intr-adevăr, pentru $s \in G$, avem

$$\overline{sf}\,[\varphi(x)] = \int_H \Delta_H(xy)(sf)(xy)\,dy = \int_H \Delta_H(xy) f(s^{-1}xy)\,dy =$$

$$= \int_H \Delta_H(ss^{-1}xy) f(s^{-1}xy)\,dy = \Delta_H(s) \int_H \Delta_H(s^{-1}xy) f(s^{-1}xy)\,dy =$$

$$= \Delta_H(s)\bar{f}[\varphi(s^{-1}x)] = \Delta_H(s)\bar{f}[\varphi(s^{-1})\varphi(x)] =$$

$$= \Delta_H(s)\bar{f}[\varphi(s))^{-1}\varphi(x)] = \Delta_H(s)[\varphi(s)\bar{f}][\varphi(x)],$$

de unde deducem formula (5).

Mai departe, avem

$$\int_G (sf)(x)\,\delta x = \int_K \Delta_K(z)\overline{sf}(z)dz = \int_K \Delta_K(z) \cdot \Delta_H(s)[\varphi(s)\bar{f}](z)dz =$$

$$= \Delta_H(s)\int_K \Delta_K(z)\bar{f}[\varphi(s)^{-1}z]dz = \Delta_H(s)\int_K \Delta_K(z)\bar{f}[\varphi(s^{-1})z]dz =$$

$$= \Delta_H(s)\int_K \Delta_K[\varphi(s)\varphi(s^{-1})z]\bar{f}[\varphi(s^{-1})z]dz = \Delta_H(s)\Delta_K(\varphi(s))\int_K \Delta_K(\varphi(s^{-1})z)\bar{f}[\varphi(s^{-1})z]dz =$$

$$= \Delta_H(s)\Delta_K(\varphi(s))\int_K \Delta_K(z)\bar{f}(z)dz = \Delta_H(s)\Delta_K(\varphi(s))\int_G f(x)\,\delta x,$$

de unde, formula (4).

3. Măsura δx pe G definită de (3) depinde, evident, de epimorfismul φ. Se pune în mod natural, problema de a vedea ce efect poate avea asupra produsului omomorf schimbarea epimorfismului φ cu condiția ca nucleul H să rămînă neschimbat.

Familia epimorfismelor cu această proprietate este dată de formula

$$\forall x \in G, \ \varphi_s(x) = \varphi(s^{-1}xs),$$

unde $s \in G$.

Avem $H = \operatorname{Ker} \varphi_s$.

Pentru un $s \in G$ și $f \in \mathcal{K}(G)$ fixați, vom nota $\bar{f}^s$ funcția din $\mathcal{K}(K)$, care verifică condiția

$$\forall x \in G, \ \bar{f}^s[\varphi(x)] = \int_H \Delta_H(xy)f(xy)dy. \tag{6}$$

Avem, evident,

$$\bar{f}^s \circ \varphi_s = \bar{f} \circ \varphi, \qquad \forall s \in G.$$

Vom nota cu $\delta^s x$ măsura relativ invariantă corespunzătoare epimorfismului φ_s. Avem

$$\forall f \in \mathcal{K}(G), \ \int_G f(x)\,\delta^s x = \int_K \bar{f}^s(z)\,\delta z = \int_K \Delta_K(z)\bar{f}^s(z)dz.$$

Măsura $\delta^s x$ va fi proporțională cu δx, adică există o funcție pozitivă $\lambda : G \to R^+$, astfel ca

$$\int_G f(x)\,\delta^s x = \lambda(s)\int_G f(x)\,\delta x.$$

Să arătăm că

$$\lambda(s) = \Delta_r^K(\varphi(s)),$$

unde Δ_r^K este funcția modulară la dreapta a grupului K.

Se arată că

$$\bar{f}^s = \varphi(s)^{-1}\bar{f}\varphi(s).$$

Avem

$$\int_G f(x)\,\delta^s x = \int_K \bar{f}^s(z)\,\delta z = \int_K \Delta_K(z)\bar{f}^s(z)dz = \int_K \Delta_K(z)[\varphi(s)^{-1}\bar{f}\varphi(s)](z)dz =$$

$$= \int_K \Delta_K(z)[\bar{f}(\varphi(s)](\varphi(s)z)dz = \int_K \Delta_K(\varphi(s^{-1})\varphi(s)z[\bar{f}\varphi(s)](\varphi(s)z)dz =$$

$$= \Delta_K(\varphi(s^{-1}))\int_K \Delta_K(z)[\bar{f}\varphi(s)](z)dz = \Delta_K(\varphi(s)^{-1})\int_K \Delta_K(z\varphi(s^{-1})\varphi(s))\bar{f}(z\varphi(s^{-1}))dz =$$

$$= \int_K \Delta_K(z\varphi(s^{-1}))\bar{f}(z\varphi(s^{-1}))dz$$

sau

TEOREMĂ. *Dacă δx este o măsură relativ invariantă la stînga pe G de modul Δ, atunci $\delta^s x$ este o măsură relativ invariantă la dreapta de modul $\Delta \cdot \Delta_r^G$, unde Δ_r^G este funcția modulară la dreapta a grupului G.*

Avem, deci,

$$\int_G f(x)\,\delta^s x = \int_K [\varphi(s^{-1})\bar{f}\varphi(s)](z)\,\delta z = \Delta_K(\varphi(s)^{-1}) \cdot \Delta_K(\varphi(s)) \cdot \Delta_r^K[\varphi(s)]\int_G f(x)\,\delta x.$$

20—93

SUR LE PRODUIT HOMOMORPHE DES MESURES RÉLATIVEMENT INVARIANTES SUR DES GROUPES TOPOLOGIQUES LOCALLEMENT COMPACTES

RÉSUMÉ

Le but de ce travail est de généraliser le produit homomorphe des mesures Haar, dans le cas des mesures rélativement invariantes.

On construit le produit homomorphe des mesures rélativement invariantes à gauche, δy et δz, et on obtient une mesure définie par la relation (3). On montre que c'est une mesure rélativement invariante à gauche.

On étudie le problème du changement de 1 épimorphisme φ et on obtient un théorème qui repond à cette question.

BIBLIOGRAFIE

[1] Nachbin, Leopoldo, The Haar Integral.

[2] Mocanu, Constanţa, *O proprietate a produsului omomorf de măsuri Haar* (sub tipar).

Lucrarea a fost prezentată la Sesiunea de comunicări a corpului didactic de la Univ. „Babeş-Bolyai", din Cluj, mai 1973.

Catedra de Analiză
Universitatea „Babeş-Bolyai" din Cluj

Primit la 19. XI. 1973.