REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola, 2, 1974, pp. 177—186

ASUPRA MODELULUI LUI L. NÉMETI PENTRU PLANIFICAREA ÎN TIMP A FABRICAŢIEI

PETRU POP
(Cluj)

Utilizînd algoritmul lui F. RADÓ ([4], [5]) pentru rezolvarea problemelor de programare matematică cu condiţii logice, se demonstrează că problema P este compatibilă dacă şi numai dacă problema parţială P_0 este compatibilă şi de asemenea că şirul (*) construit cu acest algoritm conţine numai probleme parţiale compatibile.

Se dă apoi un procedeu de determinare a tuturor problemelor parţiale admisibile.

1. În literatura de specialitate, problema centrală a planificării apare sub denumirea de ordonanţare („sequencing"), entităţile care trec prin atelier se numesc produse („jobs", „commodities") iar prelucrarea unui produs pe o maşină se numeşte operaţie („task"). Ordinea tehnologică cerută a operaţiilor pe fiecare produs este numită „a routing".

Problema urmăreşte ordonarea operaţiilor la maşini, pe fiecare produs, cu restricţii de succesiune („to routing constraints"), astfel încît pentru o anumită măsură de eficacitate adecvată sistemului de ordonanţare, să se obţină cea mai bună valoare. Ordonarea astfel obţinută se numeşte program optim.

Modelele abstracte propuse, pentru care există algoritmi de obţinere a soluţiei optimale, conţin, în general, restricţii dintre cele mai severe. În încercarea de a obţine soluţii acceptabile pentru problemele reale studiate, multe din aceste restricţii au fost slăbite, construindu-se modele de simulare prin observarea efectelor anumitor reguli de prioritate sau utilizînd metode euristice. O clasificare în raport cu funcţia obiectiv precum şi o discuţie cuprinzătoare asupra sistemelor de ordonanţare este făcută de P. MELLOR în [1].

În ipoteze destul de apropiate de realitatea tehnico-economică a procesului de fabricaţie ca:

α) La un moment dat, un produs oarecare se află în prelucrare pe cel mult o maşină,

β) La un moment dat, o maşină prelucrează cel mult un produs,

γ) Există anumite restricţii de succesiune a operaţiilor (în sensul că o operaţie poate începe numai după terminarea altora) şi presupunînd că din fiecare tip de maşină există un singur exemplar iar o operaţie odată începută nu se întrerupe pînă la terminarea ei, L. NÉMETI ([2], [3]) dă un model de programare matematică cu condiţii logice, avînd ca obiectiv minimizarea duratei întregului proces de prelucrare.

Cu notaţiile:

$M = \{1, 2, \ldots, m\}$ mulţimea numerelor de ordine ale maşinilor,

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ mulţimea numerelor de ordine ale operaţiilor,

N_k = mulţimea numerelor de ordine ale operaţiilor executabile pe maşina cu numărul k (presupuse în număr de n_k), avînd deci $N = \bigcup_{k \in M} N_k$,

$H \subset N \times N$ = o mulţime de perechi ordonate, $(i, j) \in H$ indicînd faptul că (conform prescripţiilor tehnologice), operaţia cu numărul j se poate executa numai după terminarea operaţiei cu numărul i,

x_i = momentul de începere (necunoscut) al operaţiei cu numărul i,

t_i = timpul de execuţie a operaţiei cu numărul i, modelul lui L. Nemeti cere să se determine vectorul $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ care minimizează funcţia

$$f(x) = \max_{i \in N} (x_i + t_i) \tag{1}$$

şi verifică: condiţiile de începere

$$x_i \geqq 0, \ i \in N \tag{2}$$

— condiţiile de succesiune

$$x_j - x_i \geqq t_i, \qquad (i, j) \in H \text{ şi} \tag{3}$$

— condiţiile de neinterferenţă

$$\begin{array}{ll} x_j - x_i \geqq t_i \vee x_i - x_j \geqq t_j, & i < j,\ i, j \in N_1 \\ x_j - x_i \geqq t_i \vee x_i - x_j \geqq t_j, & i < j,\ i, j \in N_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_j - x_i \geqq t_i \vee x_i - x_j \geqq t_j, & i < j,\ i, j \in N_m. \end{array} \tag{4}$$

Convenim să notăm cu P_0 problema determinării vectorului x care minimizează funcţia (1) în condiţiile (2) şi (3) iar cu P problema determinării vectorului $x = (x_1, \ldots, x_n)$ care minimizează funcţia (1) în condiţiile (2), (3) şi (4).

Observăm că disjuncţiile (4) sînt în număr de

$$p = C^2_{n_1} + C^2_{n_2} + \ldots + C^2_{nm} = C^2_n - (n_1 n_2 + n_1 n_3 + \ldots + n_{m-1} n_m) \tag{5}$$

unde

$$n_k = \text{card } N_k, \ k \in M \ \text{ şi } \ n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n. \tag{6}$$

Prin urmare ele pot fi numerotate în ordine de la 1 la p.

Această problemă se rezolvă cu algoritmul lui F. RADÓ ([4], [5]) care se bazează pe rezolvări succesive de probleme de programare matematică, o problemă obţinîndu-se din precedenta prin adăugarea unei singure condiţii.

2. Fie x° soluţia optimală a lui P_0 şi m_0 valoarea minimă $f(x_0)$.

Dacă $k = \{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$ este o submulţime a mulţimii de numere $\{1, 2, \ldots, p\}$, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ un şir format din numerele 1 şi 2, notăm cu

$$P^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r} \tag{7}$$

problema parţială ce se obţine din P_0 prin adăugarea a r noi condiţii şi anume: dacă $\alpha_\nu = 1$ se adaugă primul termen al disjuncţiei k_ν iar dacă $\alpha_\nu = 2$ se adaugă al doilea termen al disjuncţiei k_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, r$.

Fie

$$X^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r} \tag{8}$$

soluţia optimală a problemei parţiale (7) şi

$$m^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r} \tag{9}$$

valoarea minimă $f(x^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r})$. Dacă problema (7) este incompatibilă punem ∞ pentru expresia (9), iar dacă ea are o soluţie improprie, punem $-\infty$ pentru (9). Vectorul (8) verifică evident condiţiile (4) pentru indicii $k_1, k_2, \ldots, k_r$; dacă el verifică şi toate celelalte $p - r$ condiţii (4) se marchează acest fapt prin sublinierea vectorului (8). De asemenea subliniem vectorul ce reprezintă soluţia improprie a problemei (7) dacă el satisface toate condiţiile (4).

Se construiesc trei şiruri: şirul (*) format din probleme de tipul (7), avînd ca prim termen pe P_0; şirul (**) format din minimele problemelor din (*) şi şirul (***) format din soluţiile optime. Anumiţi termeni din (***) sînt subliniaţi; subliniem de asemenea termenii corespunzători din (**).

Presupunem că am construit un anumit număr de termeni în cele trei şiruri. Căutăm numărul cel mai mic în (**) ; dacă mai mulţi termeni au valoarea cea mai mică, alegem unul dintre ei şi să presupunem întîi că el nu este subliniat şi nu este ∞. Fie pentru fixarea ideilor, acest termen chiar (9), termenul corespunzător în şirul (*) chiar (7) iar termenul corespunzător în (***) vectorul (8). Deoarece vectorul (8) nu este subliniat există cel puţin o disjuncţie pe care el nu o verifică. Fie aceasta

$$(k_{r+1}) \qquad x_j - x_i \geqq t_i \vee x_i - x_j \geqq t_j \quad i < j,\ i,\ j \in N_k.$$

Suprimăm din şirul (*) termenul (7) şi îi adăugăm termenii

$$(10) \qquad P^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r,1}_{k_1,\ldots,k_r,k_{r+1}} \text{ şi } P^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r,2}_{k_1,\ldots,k_r,k_{r+1}}.$$

Suprimăm din (**) şi (***) termenii care corespund la termenul suprimat din (*) şi adăugăm la ele minimele celor două probleme (10), respectiv cîte o soluţie optimă a lor. Verificăm dacă acestea din urmă satisfac toate condiţiile (4) şi în caz afirmativ subliniem termenii respectivi în şirurile (***) şi (**).

Dacă este subliniat cel puţin unul dintre termenii şirului (**), care iau valoarea cea mai mică, sau dacă toţi termenii şirului (**) sînt ∞ construcţia celor 3 şiruri s-a terminat. În primul caz termenul subliniat în şirul (**) este minimul problemei P şi vectorul corespunzător din şirul (***) este soluţia optimă a problemei P (proprie sau improprie după cum minimul nu este sau este $-\infty$), iar în al doilea caz problema P este incompatibilă. Procesul iterativ se termină după un număr finit de paşi.

3. În cazul nostru atît problema parţială P_0 cît şi problemele parţiale (7) sînt probleme de potenţial.

Problema P_0 are ca soluţie, soluţia minimă universală a sistemului S_0 format din relaţiile (2) şi (3). Acestui sistem i se ataşează graful cotat $G_0 = [\overline{N}, \overline{H}]$, $\overline{N} = N \cup \{0\}$, $\overline{H} = H \cup \{(0, j) / j \in N\}$, atribuind arcelor $(i, j) \in H$ lungimea $t_i > 0$, iar arcelor $(0, j)$, $j \in N$ lungimea zero.

În [6] B. ROY a arătat că condiţia necesară şi suficientă pentru compatibilitatea sistemului S_0 este ca graful cotat G_0 să nu conţină nici un circuit de lungime strict pozitivă. De asemenea în caz de compatibilitate, condiţia necesară şi suficientă pentru existenţa soluţiei minime universale a sistemului S_0 este ca mulţimea $\{0\}$ să formeze o antibază în G_0, soluţia minimă universală fiind dată de

$$(11) \qquad x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

cu $x_i^0 = m_{0i}$ = drumul cel mai lung de la vîrful 0 la vîrful i [3].

Problema parţială (7) are ca soluţie, soluţia minimă universală a sistemului $S^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}_{k_1,\ldots,k_r}$ format din relaţiile (2), (3) şi acele relaţii (k_ν) care intră în $P^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}_{k_1,\ldots,k_r}$. Sistemului $S^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}_{k_1,\ldots,k_r}$ i se ataşează graful cotat

$$G^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}_{k_1,\ldots,k_r} = [\overline{N}, \overline{H}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}_{k_1,\ldots,k_r}], \text{ unde } \overline{H}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}_{k_1,\ldots,k_r} = \overline{H} \cup J^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}_{k_1,\ldots,k_r}$$

iar $J^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}_{k_1,\ldots,k_r}$ este mulţimea celor r perechi, de forma (i, j), $i < j$ pentru $\alpha_\nu = 1$ şi de forma (j, i), $i < j$ pentru $\alpha_\nu = 2$, $\nu = 1, 2, \ldots, r$.

În toate grafele

$$(12) \qquad G_0,\ G^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}_{k_1,\ldots,k_r}, \quad (k \subset \{1, 2, \ldots, p\})$$

mulţimea $\{0\}$ formează o antibază. Deci în caz de compatibilitate sistemele S_0, $S^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}_{k_1,\ldots,k_r}$, $(k \subset \{1, 2, \ldots, p\}$ admit soluţia minimă universală. De asemenea deoarece în grafele (12) toate arcele sînt de lungime pozitivă (cu excepţia celor de forma $(0, j)$, $j \in N$ care sînt de lungime zero), orice drum ce nu este de forma $(0, j)$, $j \in N$ este de lungime strict pozitivă iar dacă nu porneşte din vîrful 0 nu trece prin acest vîrf. Rezultă că orice circuit este de lungime strict pozitivă şi nu trece prin vîrful 0.

În concluzie condiţia necesară şi suficientă ca problemele P_0 respectiv $P^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}_{k_1,\ldots,k_r}$ să fie compatibile este ca grafele respective (12) să nu conţină circuite.

Putem demonstra acum următoarea:

TEOREMA. *Problema P este compatibilă dacă şi numai dacă problema P_0 este compatibilă, iar în acest caz şirul (*) conţine numai probleme parţiale compatibile.*

Afirmaţia, P este compatibilă numai dacă P_0 este compatibilă este evidentă. Rămîne deci de demonstrat că dacă P_0 este compatibilă atunci şi P este compatibilă. Din algoritmul lui F. Radó se observă că pentru aceasta este suficient să arătăm că dacă problema (7) este compatibilă atunci cel puţin una dintre problemele (10) este compatibilă.

Într-adevăr presupunînd că amîndouă problemele (10) ar fi incompatibile ar rezulta că în graful $G^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r,1}_{k_1, k_r,\ldots,k_r,k_{r+1}}$ arcul (i, j) ar închide un circuit, deci în graful $G^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}_{k_1,\ldots,k_r}$ ar exista un drum de la vîrful j la vîrful i. De asemenea în graful $G^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r,2}_{k_1,\ldots,k_r,k_{r+1}}$ arcul (j, i) ar închide un circuit, deci în graful $G^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}_{k_1,\ldots,k_r}$ ar exista un drum de la vîrful i la vîrful j. Prin urmare în gradul $G^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}_{k_1,\ldots,k_r}$ ar exista un circuit, deci problema (7) ar fi incompatibilă, ceea ce contrazice ipoteza. În concluzie cel puţin una din problemele (10) este compatibilă.

Mai mult, deoarece disjuncţia (k_{r+1}) s-a ales dintre cele neverificate de soluţia problemei (7) rezultă că ambele probleme (10) sînt compatibile. Într-adevăr dacă una dintre ele ar fi incompatibilă de exemplu $P^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 2}_{k_1, k_2, \ldots, k_r, k_{r+1}}$, ar rezulta că în graful $G^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r}$ ar exista un drum de la i la j, deci soluţia problemei (7) ar verifica relaţia

$$x_j - x_i \geqq t_i,$$

cu alte cuvinte ar verifica disjuncţia (k_{r+1}), ceea ce contrazice ipoteza.

Prin urmare şirul $(*)$ este format numai din probleme compatibile.

4. Disjuncţia (k_{r+1}) care generează problemele parţiale (10) se alege dintre disjuncţiile (4) neverificate de soluţia (8) a problemei (7).

În general alegerea disjuncţiei (k_{r+1}) necesită rezolvarea problemei (7). În cazul nostru vom arăta că se pot determina disjuncţiile (4) verificate de soluţia problemei (7) fără rezolvarea acesteia.

Determinăm mai întîi disjuncţiile (4) verificate de soluţia problemei P_0. Evident vor fi verificate acele disjuncţii (4) care conţin cîte un termen din (3) sau unul care este consecinţă a relaţiilor (3). Pentru determinarea acestora presupunem mulţimea elementelor lui H ordonată după primul indice. Relativ la H şi N_k definim mulţimea D^0_k a tuturor perechilor de forma (i, j) cu proprietatea $i, j \in N_k$ şi există un drum în H de la i la j. Atunci, evident disjuncţiile de forma

$$x_j - x_i \geqq t_i \vee x_i - x_j \geqq t_j, \quad (i, j) \in D^0_k$$

vor fi verificate de soluţia problemei P_0.

Procedînd în acest mod pentru toţi $k = 1, 2, \ldots, m$ şi notînd

$$D^0 = \bigcup_{k=1}^{m} D^0_k$$

rezultă că rămîn numai

$$p_0 = p - \text{card } D^0$$

disjuncţii neverificate de soluţia problemei P_0.

În general, considerăm problema parţială $P^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r}$. Relativ la $H^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r} = H \cup J^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r}$ şi N_k definim mulţimea D^r_k a tuturor perechilor de forma (i, j), $i, j \in N_k$ şi există un drum în $H^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r}$ de la i la j. Evident atunci că disjuncţiile de forma

$$x_j - x_i \geqq t_i \vee x_i - x_j \geqq t_j, \quad (i, j) \in D_k$$

vor fi verificate de soluţia problemei $P^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r}$.

Notînd

$$D^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r} = \bigcup_{k=1}^{m} D^r_k,$$

rezultă că rămîn numai

$$p^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r} = p - \text{card } D^{k_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r}$$

disjuncţii neverificate de soluţia problemei $P^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r}$. Alegînd ca disjuncţie (K_{r+1}) pe una din acestea, formarea problemelor parţiale se continuă după modul indicat în algoritmul lui Radó obţinîndu-se problemele (10) pentru care se calculează

$$p_1 = p^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 1}_{k_1, \ldots, k_r, k_{r+1}} \quad \text{şi} \quad p_2 = p^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 2}_{k_1, \ldots, k_r, k_{r+1}}.$$

Dacă $p_1 = p_2 \neq 0$ atunci ambele probleme (10) sînt admisibile şi procedeul s-a terminat.

Dacă $p_1 = 0$ şi $p_2 \neq 0$ înseamnă că prima problemă (10) este admisibilă iar cu a doua se continuă procedeul care se va termina într-un număr finit de paşi deoarece avem

$$p^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}}_{k_1, \ldots, k_r, k_{r+1}} \leqslant p^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r} - 1.$$

Această inegalitate rezultă din faptul că

$$\text{card } H^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}}_{k_1, \ldots, k_r, k_{r+1}} = \text{card } H^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r} + 1$$

şi

$$\text{card } D^{\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+1}}_{k_1, \ldots, k_{r+1}} \geqq \text{card } D^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{k_1, \ldots, k_r} + 1.$$

5. Exemplu: Să se determine programele admisibile pentru cazul cînd avem de executat 7 operaţii pe două maşini diferite, pe prima executîndu-se operaţiile numerotate cu 1, 2, 3, 4, pe a doua cele numerotate cu 5, 6 şi 7, în condiţiile de succesiune:

$$op\ 1 \to op\ 3 \to op\ 5 \to op\ 6 \to op\ 4$$

cunoscînd timpii de execuţie $t_i > 0$ $(i = \overline{1,7})$ pentru fiecare operaţie.

Pentru această problemă avem următorul model matematic: să se determine vectorul

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \tag{1}$$

care verifică:

condiţiile de nenegativitate

$$x_i \geqq 0,\ i \in N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \tag{2}$$

condiţiile de succesiune

$$\begin{aligned} &x_3 - x_1 \geqq t_1 \\ &x_5 - x_3 \geqq t_3 \\ &x_6 - x_5 \geqq t_5 \\ &x_4 - x_6 \geqq t_6 \quad \text{şi} \end{aligned} \tag{3}$$

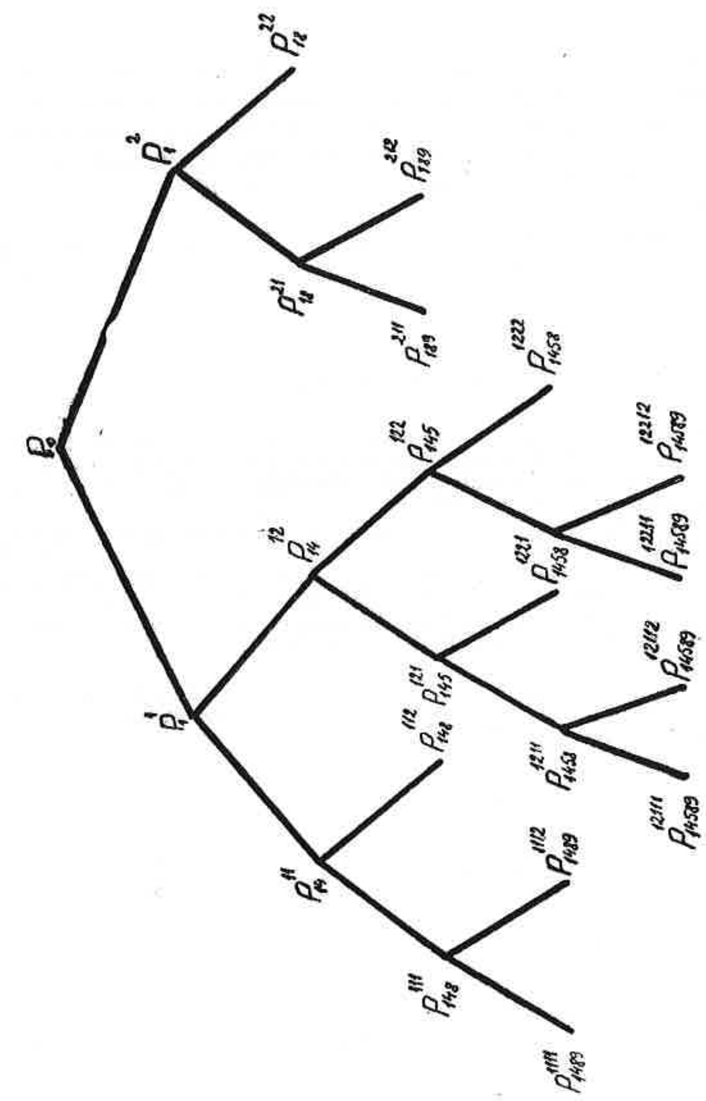
condiţiile de neinterferenţă

$$\begin{aligned} &1.\ x_2 - x_1 \geqq t_1 \vee x_1 - x_2 \geqq t_2 \\ &2.\ x_3 - x_1 \geqq t_1 \vee x_1 - x_3 \geqq t_3 \\ &3.\ x_4 - x_1 \geqq t_1 \vee x_1 - x_4 \geqq t_4 \\ &4.\ x_3 - x_2 \geqq t_2 \vee x_2 - s_3 \geqq t_3 \\ &5.\ x_4 - x_2 \geqq t_2 \vee x_2 - x_4 \geqq t_4 \\ &6.\ x_4 - x_3 \geqq t_3 \vee x_3 - x^4 \geqq t_4 \\ &7.\ x_6 - x_5 \geqq t_5 \vee x_5 - x_6 \geqq t_6 \\ &8.\ x_7 - x_5 \geqq t_5 \vee x_5 - x_7 \geqq t_7 \\ &9.\ x_7 - x_7 \geqq t_7 \vee x_7 - x_7 \geqq t_7. \end{aligned} \tag{4}$$

Se constată uşor că problema P_0 care cere determinarea vectorului (1) în condiţiile (2) şi (3) este compatibilă. Atunci conform teoremei demonstrate mai sus, întreaga problemă va fi compatibilă.

Numărul condiţiilor de neinterferenţă fiind $p = 9$, modelul furnizează $2^9 = 512$ probleme posibile. Dar chiar din prima etapă, deoarece $D^0 = \{(1, 3), (1, 4), (3, 4), (5, 6)\}$ şi $p_0 = p - \text{card}\, D^\circ = 9 - 4 = 5$, se constată că se pot forma cel mult $2^5 = 32$ probleme posibile diferite de P_0.

Continuînd procedeul indicat în paragraful 4, se obţine următorul arbore ale cărui terminale în număr de 12 sînt problemele admisibile. Soluţiile lor reprezintă programele admisibile căutate.



SUR LE MODÈLE DE L. NÉMETI POUR LA PLANIFICATION TEMPORELLE DE LA FABRICATION

RÉSUMÉ

En utilisant l'algorithme de F. RADÓ ([4], [5]) relatif à la résolution des problèmes de programmation mathématique à conditions logiques, on démontre que le problème P est compatible si et seulement si le problème partiel P_0 est compatible ; on démontre également que la suite (*) construite à l'aide de cet algorithme ne contient que des problèmes partéaux compatibles.

On présente ensuite un procédé de détermination de tous les problèmes partiaux admissibles.

BIBLIOGRAFIE

[1] Mellor, P. *A review of job shop scheduling*, Op. Res. Quart. **17**, 2, 161–171 (1966)
[2] Németi, L. *Das Reihenfolgeproblem in der Fertigungsprogrammierung und Linearplanung mit logischen Bedingungen*. Mathematica (Cluj), **6**, 1, 87–99 (1964).
[3] — , *Programarea în timp a fabricației*, Teză doctorat.
[4] Radó, F., *Programarea liniară cu condiții logice*. Comunicările Academiei R.P.R. **13**, 1039–1042 (1963).
[5] — , *Un algorithme pour résourde certains problémes de programmation mathématique*. Mathematica (Cluj), **6**, 1, 105–116 (1964).
[6] Roy, B., *Cheminement et connexité dans les graphes. Application aux problémes d'ordonnancement*. Metra, Série spéciale, Nr. **1**, 1962.

Institutul de calcul din Cluj al Academiei Republicii Socialiste România

Primit la 28. III. 1974