REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola 2, 1974, pp. 203–207

EFECTUL SUMĂRII PRIN MEDII ARITMETICE ŞI AL OPERAŢIEI EI INVERSE ASUPRA RAPIDITĂŢII DE CONVERGENŢĂ A SERIILOR NUMERICE CU TERMENI POZITIVI

de

CECILIA STRÎMBU
(Cluj)

1. Introducere

Metodele regulare de sumare a seriilor convergente păstrează suma seriei originale. Nu s-a pus în evidenţă (a se consulta [3]) dacă o astfel de metodă păstrează sau nu rapiditatea de convergenţă. În prezenta lucrare studiez efectul pe care *sumarea prin medii aritmetice (Hölder)* precum şi operaţia ei inversă, pe care o numesc *„demediere"*, îl au asupra rapidităţii de convergenţă a seriei supuse transformării.

*

* *

1. Fie Σv_n, o serie convergentă cu termeni pozitivi, avînd suma $\sigma = \sum_1^\infty v_n$. Notînd sumele ei parţiale prin $\sigma_n = \sum_{k=1}^n v_k$ $(n \in N)$, se obţin prin mediere Hölder, sumele

$$S_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n}{n} \qquad (n \in N),$$

iar şirul (S_n) va avea tot limita σ. Din faptul că S_n este media şirului finit, strict crescător, $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, rezultă inegalitatea $S_n < \sigma_n$ $(n \in N)$, deci (S_n) nu poate tinde mai repede către σ decît (σ_n). Prin urmare:

sumarea prin medii aritmetice poate păstra sau încetini rapiditatea de convergență a unei serii convergente cu termeni pozitivi, dar nu o poate accelera. Pe baza acestei constatări se pune următoarea problemă: dacă se inversează operația de sumare prin medii, adică, dacă se consideră seria Σv_n ca fiind obținută în urma aplicării procedeului lui Hölder asupra unei serii, Σu_n, tot cu termeni pozitivi, atunci, în ce condiții converge seria Σu_n la fel de repede sau mai repede decît seria Σv_n? (Potrivit sumării lui Hölder, seria cu termeni pozitivi Σu_n, are aceeaşi sumă ca şi seria Σv_n).

În cele ce urmează, seria Σv_n va fi numită *seria originală*, iar seria Σu_n obținută pe calea descrisă mai sus va fi numită *demediata lui* Σv_n.

Notăm $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ $(n \in N)$ — sumele parțiale ale demediatei, de unde $\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}$ $(n \in N)$. De aici rezultă

(1) $$s_n = n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1} = \Delta((n-1)\sigma_{n-1}) \qquad (n \in N)$$

şi

(2) $$u_n = s_n - s_{n-1} = n\sigma_n - 2(n-1)\sigma_{n-1} + (n-2)\sigma_{n-2} \qquad (n \in N),$$

cu accepțiunea $\sigma_0 = \sigma_{-1} = 0$.

Se deduce şi o legătură între termenii celor două serii, utilizînd formulele (1) şi (2), astfel:

$$u_n = \Delta s_{n-1} = \Delta(\Delta((n-2)\sigma_{n-2})) = \Delta((n-2)(\sigma_{n-1} - \sigma_{n-2}) + \sigma_{n-1}) =$$
$$= \Delta((n-2)v_{n-1} + \sigma_{n-1}) = nv_n - (n-2)v_{n-1},$$

deci

(3) $$u_n = nv_n - (n-2)v_{n-1}, \quad n \in N \quad (v_0 = 0).$$

Condiția ca demediata să aibă termeni pozitivi o putem impune celor două expresii echivalente ale lui u_n, astfel:

— din (2) rezultă

(4) $$n\sigma_n - 2(n-1)\sigma_{n-1} + (n-2)\sigma_{n-2} > 0,$$

ceea ce se transcrie

(5) $$(n-1)\sigma_{n-1} < \frac{(n-2)\sigma_{n-2} + n\sigma_n}{2} \qquad (n \in N);$$

inegalitatea (5) este *condiția de convexitate în sens Jensen pentru şirul* $(n\sigma_n)$ — *necesară şi suficientă ca să aibă loc* $u_n > 0$ $(n \in N)$;

— din (3) rezultă

(6) $$nv_n - (n-2)v_{n-1} > 0$$

ceea ce se transcrie

(7) $$\frac{v_n}{v_{n-1}} > \frac{n-2}{n} \qquad \text{pentru } n = 2, 3, \ldots$$

— *altă formă a condiției necesare şi suficiente ca să aibă loc* $u_n > 0$ $(n \in N)$.

Deoarece, pentru seriile cu termeni pozitivi studiul comparativ al rapidității de convergență se face prin intermediul raportului termenilor generali, [1], — în cazul nostru are loc

(8) $$\frac{u_n}{v_n} = n - (n-2)\frac{v_{n-1}}{v_n}.$$

Pe baza celor de mai sus, se poate enunța

TEOREMA 1. *Σv_n fiind o serie convergentă cu termeni pozitivi, pentru care inegalitatea (7) are loc, atunci prin demediere (adică prin operația de inversare a sumării Hölder) se obține tot o serie convergentă cu termeni pozitivi, Σu_n, — evident, cu aceeaşi sumă. Dacă:*

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\left[n - (n-2)\frac{v_{n-1}}{v_n}\right] = l \qquad (0 < l < +\infty),$$

atunci demedierea conservă rapiditatea de convergență;

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\left[n - (n-2)\frac{v_{n-1}}{v_n}\right] = 0,$$

atunci demedierea accelerează rapiditatea de convergență.

Exemplul 1. Aplicînd teorema 1 la clasa seriilor convergente: $\sum \frac{1}{n^p}$ $(p > 1)$, se obține:

— pentru $1 < p < 2$, prin demediere rapiditatea de convergență se conservă; şi reciproc, dacă se aplică sumarea lui Hölder la o serie din clasa $\sum \frac{1}{n^p}$ $(1 < p < 2)$, atunci rapiditatea de convergență se păstrează,

— pentru $p = 2$, prin demediere rapiditatea de convergență creşte; efectiv se obține seria $\sum \frac{1}{n(n-1)^2}$. ($p > 2$ infirmă (7).)

2. Procedeul demedierii se poate itera. La iterarea de ordinul k în locul condiţiei (5) se impune ca şirul

$$\{n\,\Delta\,((n-1)\Delta((n-2)\Delta(\dots\Delta(n-k)\mathbb{S}_k)\dots))\}_{n\in N,\, n>k}$$

să fie convex în sens Jensen, unde $(\mathbb{S}_k)$ este şirul sumelor parţiale ale seriei supuse demedierii de ordinul k.

3. Cercetăm, acum, problema rapidităţii de convergenţă a demediatei, folosind caracterizarea seriilor numerice cu termeni pozitivi — convergente — prin formula de reprezentare analitică a termenului general dat în [2]. Termenul general, c_n, al unei serii cu termeni pozitivi, convergente admite reprezentarea:

$$c_n = \frac{(a_1+1)c_1}{a_n \prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_\nu}\right)} \qquad (n \in N), \tag{10}$$

unde (a_n) este un şir de termeni strict pozitivi, pentru care $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{a_n} = +\infty$.

Utilizînd (10), se găseşte, aplicînd (7), următoarea inegalitate

$$\frac{a_{n-1}}{1+a_n} > \frac{n-2}{n} \qquad (n = 2, 3, \dots) \tag{11}$$

condiţie necesară şi suficientă ca demediata seriei Σc_n să aibă termeni pozitivi. În acest caz raportul termenilor generali, al demediatei Σu_n şi al celei originale Σc_n, are următoarea formă:

$$\frac{u_n}{c_n} = n - (n-2)\,\frac{1+a_n}{a_{n-1}}. \tag{12}$$

Se poate enunţa în consecinţă

TEOREMA 2. *Dacă Σc_n este o serie convergentă cu termeni pozitivi, pentru care şirul (a_n) folosit în reprezentarea (10) verifică inegalitatea (11), atunci, prin demediere se obţine tot o serie convergentă cu termeni pozitivi şi cu aceeaşi sumă ca seria Σc_n. Dacă:*

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty}\left[n-(n-2)\,\frac{1+a_n}{a_{n-1}}\right] = l \quad (0 < l < +\infty),$$

atunci demedierea conservă rapiditatea de convergenţă;

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty}\left[n-(n-2)\,\frac{1+a_n}{a_{n-1}}\right] = 0,$$

atunci demedierea accelerează rapiditatea de convergenţă.

Exemplul 2. Demediata Σu_n a seriei Σc_n, — $(c_n)_{n\in N}$ fiind construit conform reprezentării (10) cu ajutorul şirului $a_n = n + a^n$, $n \in N$ $(0 < a < 1)$, respectiv cu ajutorul şirului $a_n = na^n$, $n \in N$ $(0 < a < 1)$, va converge mai repede respectiv tot atît de repede ca seria Σc_n.

L'EFFET DE LA SOMMATION PAR LES MOYENNES ARITHMÉTIQUES ET DE SON OPÉRATION INVERSE SUR LA RAPIDITÉ DE CONVERGENCE DES SÉRIES NUMÉRIQUES À TERMES POSITIFS

(RÉSUMÉ)

Après qu'on montre que la sommation au sens de Hölder ne peut pas accélérer la convergence d'une série à termes positifs, convergente, on passe à l'étude de la transformation inverse de cette sommation — nommée par l'auteur: *la démédiation* (c'est-à-dire, dans des conditions bien présisées on détermine une série à termes positifs — *la démédiée* — dont la sommation Hölder nous conduit à la série originelle). On met en évidence des *conditions pour que la série obtenue par démédiation, converge avec la même rapidité, respectivement plus rapidement* (bien entendu à la même somme) *que la série originelle.* Comme exemple, on applique la méthode à la classe des séries harmoniques généralisées.

BIBLIOGRAFIE

[1] Knopp, K., *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. Berlin, J. Springer Verlag. 1931

[2] Ney, A., *Studiu asupra seriilor numerice cu termeni pozitivi convergente sau divergente.* Studii şi Cerc. Mat. (Bucureşti) **22**, 4, 631—640, (1970)

[3] Zeller, K., *Theorie der Limitierungsverfahren*. Berlin. Springer Verlag. 1958

Primit la 4. IV. 1974