REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ȘI TEORIA APROXIMAȚIEI
Volumul 1, Fascicola 1, 1972, pp. 65—81

UN NOU STUDIU STRUCTURAL ÎN MULȚIMEA ȘIRURILOR NUMERICE

de
ANDREI NEY
(Cluj)

§ 1. Preliminarii

În prezenta lucrare vom utiliza rezultatele de mai jos ale autorului, cuprinse în lucrările [2], [3], și [4].

Termenul general, c_n, al unei serii convergente cu termeni strict pozitivi (oarecare) admite *reprezentarea*

$$c_n = \frac{(a_1+1)c_1}{a_n \prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_\nu}\right)} \quad (n \in N), \tag{1}$$

unde (a_n) este un șir de termeni strict pozitivi, pentru care $\sum_1^\infty \frac{1}{a_n} = +\infty$. Totodată rezultă că suma seriei convergente, respectiv restul ei de rang n, se exprimă prin:

$$S = (a_1+1)c_1, \quad \text{respectiv} \quad r_n = a_n c_n = \frac{(a_1+1)c_1}{\prod_1^n\left(1+\frac{1}{a_\nu}\right)}. \tag{2}$$

Notînd prin Σd_n o serie divergentă cu termeni pozitivi, reprezentarea (1) respectiv reprezentările (2) se scriu sub următoarea *formă canonică*:

$$c_n = \frac{\left(\frac{1}{d_1}+1\right)c_1}{\prod_1^n (1+d_\nu)} d_n, \quad r_n = \frac{c_n}{d_n} \quad (n \in N);\ S = \left(\frac{1}{d_1}+1\right)c_1. \tag{3}$$

Am arătat în [2], că:

Operatorul K aplicat unei serii oarecare cu termeni strict pozitivi, Σu_n, *astfel:*

$$Ku_n = \frac{a \cdot u_n}{\prod\limits_1^n (1 + u_\nu)} \qquad (a, \text{ constantă pozitivă}) \tag{4}$$

este un operator de convergenţă, care transformă orice serie cu termeni strict pozitivi într-o serie convergentă cu termeni strict pozitivi. În cazul unei serii convergente, rapiditatea de convergenţă este un invariant al transformării.

În adevăr, dacă Σu_n converge, atunci există limita finită, nenulă $\prod\limits_1^\infty (1 + u_n)$ şi în consecinţă, există şi limita finită nenulă $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{Ku_n}{u_n}$. De aici rezultă că seria Σu_n şi transformata ei $\Sigma K u_n$ converg la fel de repede. Dacă însă seria Σu_n diverge, atunci proprietatea de convergenţă a transformatei $\Sigma K u_n$ este o consecinţă imediată a lui (3).

T e r m i n o l o g i e şi n o t a ţ i i. În lucrarea de faţă vom nota *mulţimea şirurilor reale cu termeni strict pozitivi*, prin $\mathcal{S}_+$. Submulţimea lui $\mathcal{S}_+$, formată din toate şirurile avînd drept prim termen numărul 1, se va numi *mulţimea restrînsă a şirurilor cu termeni strict pozitivi* şi se va nota prin s_+. Evident, orice element din $\mathcal{S}_+$ se poate obţine dintr-un element al lui s_+ prin multiplicare cu un factor pozitiv convenabil ales (după cum un element oarecare din s_+ se obţine dintr-un element corespunzător al lui $\mathcal{S}_+$, împărţind fiecare termen al unui şir cu primul său termen). Introducem de asemenea notaţiile:

$\overline{\underline{\Sigma}}_+$ pentru *mulţimea şirurilor cu termeni strict pozitivi şi simplu sumabile*, adică

$$(c_n) \in \overline{\underline{\Sigma}}_+ \Leftrightarrow \sum_1^\infty c_n < +\infty \qquad (c_n > 0, \ n \in N);$$

$\overline{\underline{\reflectbox{\ensuremath{\Sigma}}}}_+$ pentru *mulţimea şirurilor cu termeni strict pozitivi şi care nu sînt simplu sumabile*, adică

$$(d_n) \in \overline{\underline{\reflectbox{\ensuremath{\Sigma}}}}_+ \Leftrightarrow \sum_1^\infty d_n = +\infty \qquad (d_n > 0, \ n \in N);$$

precum şi notaţiile referitoare la subşirurile analoage acestora, din mulţimea s_+, adică $\overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+$, respectiv $\overline{\underline{\reflectbox{\ensuremath{\Sigma}}}}{}^1_+$.

Au loc, evident, următoarele relaţii:

$$s_+ \subset \mathcal{S}_+ \ ; \ \overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+ \subset \overline{\underline{\Sigma}}_+ \ ; \ \overline{\underline{\reflectbox{\ensuremath{\Sigma}}}}{}^1_+ \subset \overline{\underline{\reflectbox{\ensuremath{\Sigma}}}}_+ ;$$

$$\mathcal{S}_+ = \overline{\underline{\Sigma}}_+ \cup \overline{\underline{\reflectbox{\ensuremath{\Sigma}}}}_+, \ \overline{\underline{\Sigma}}_+ \cap \overline{\underline{\reflectbox{\ensuremath{\Sigma}}}}_+ = \emptyset; \ s_+ = \overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+ \cup \overline{\underline{\reflectbox{\ensuremath{\Sigma}}}}{}^1_+, \ \overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+ \cap \overline{\underline{\reflectbox{\ensuremath{\Sigma}}}}{}^1_+ = \emptyset.$$

Precizăm, în sfîrşit, că reprezentarea unui element $(c_n) \in \overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+$ este dată prin

$$c_n = \frac{a_1 + 1}{a_n \prod\limits_1^n \left(1 + \frac{1}{a_\nu}\right)} \quad (n \in N), \qquad \text{unde} \left(\frac{1}{a_n}\right) \in \overline{\underline{\reflectbox{\ensuremath{\Sigma}}}}_+, \tag{5}$$

sau, punînd $d_n = \frac{1}{a_n}$, se ajunge la *forma canonică*

$$c_n = \frac{\frac{1}{d_1} + 1}{\prod\limits_1^n (1 + d_\nu)} \, d_n \quad (n \in N) \quad \text{cu} \quad (d_n) \in \overline{\underline{\reflectbox{\ensuremath{\Sigma}}}}_+. \tag{6}$$

O b s e r v a ţ i a. 1. Amintim (a se vedea lucrarea [1]), că, pentru restul seriei Σc_n avem formula $r_n = a_n c_n = \frac{c_n}{d_n}$. Deoarece $\Sigma c_n \in \overline{\underline{\Sigma}}_+$, rezultă că

$$\Sigma \frac{c_n}{r_n} \in \overline{\underline{\reflectbox{\ensuremath{\Sigma}}}}_+, \quad \text{căci} \quad \frac{c_n}{r_n} = d_n \quad \text{şi} \quad \Sigma \, d_n \in \overline{\underline{\reflectbox{\ensuremath{\Sigma}}}}_+.$$

Această afirmaţie constituie de fapt *teorema lui Dini* (vezi şi [4]). Arătăm aici, ca un rezultat în plus, că şi *seria* $\Sigma \frac{1}{d_n}$, *adică* $\Sigma \frac{r_n}{c_n}$, *este divergentă*. În adevăr,

$$\frac{1}{d_n} = \frac{r_n}{c_n} = \frac{r_n}{r_{n-1} - r_n} = \frac{1}{\frac{r_{n-1}}{r_n} - 1} \qquad (r_{n-1} > r_n).$$

Distingem următoarele cazuri:

a) $\underline{\lim} \frac{r_{n-1}}{r_n} = 1$. În acest caz $\overline{\lim} \frac{1}{d_n} = +\infty$, deci seria $\Sigma \frac{1}{d_n}$ diverge,

b) $\underline{\lim} \frac{r_{n-1}}{r_n} > 1$. În acest caz $\overline{\lim} \frac{1}{d_n} > 0$, deci şi în acest caz seria $\Sigma \frac{1}{d_n}$ diverge.

D e f i n i ţ i a 1. *Un şir* (d_n), *cu termeni strict pozitivi şi simplu nesumabil* $\left(\text{adică } \sum d_n \in \overline{\not\Sigma}_+\right)$, *pentru care şirul* $\left(\frac{1}{d_n}\right)$ *este de asemenea simplu nesumabil* $\left(\text{adică } \sum \frac{1}{d_n} \in \overline{\not\Sigma}_+\right)$ *se va numi şir al lui Kummer.*

C o n s e c i n ţ a 1. Din observaţia 1 şi din [1] rezultă că *un şir al lui Kummer şi numai un astfel de şir* (α_n), *poate satisface forma egalitate* prin

$$\alpha_n c_n - \alpha_{n+1} c_{n+1} = c_{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n c_n = 0,$$

a criteriului de convergenţă al lui Kummer.

§ 2. Grupul multiplicativ $(\mathcal{S}_+, \cdot)$ şi operatorul $\mathcal{K}$

Se consideră grupul multiplicativ abelian $(\mathcal{S}_+, \cdot)$, al şirurilor cu termeni strict pozitivi, operaţia de grup definindu-se în mod obişnuit prin $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n b_n)$, elementul neutru fiind şirul constant $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$.

Inversa în raport cu operaţia de înmulţire a oricărui element din $\overline{\Sigma}_+$ este evident un element din $\overline{\not\Sigma}_+$. Pentru elementele din $\overline{\not\Sigma}_+$ există două alternative, care se exclud reciproc:

$$(d_n) \in \overline{\not\Sigma}_+ \Rightarrow \begin{cases} \text{fie } \left(\frac{1}{d_n}\right) \in \overline{\Sigma}_+, \\ \text{fie } \left(\frac{1}{d_n}\right) \in \overline{\not\Sigma}_+. \end{cases}$$

De exemplu: $(n^2) \in \overline{\not\Sigma}_+$ dar $\left(\frac{1}{n^2}\right) \in \overline{\Sigma}_+$, pe cînd $(n) \in \overline{\not\Sigma}_+$, şi simultan $\left(\frac{1}{n}\right) \in \overline{\not\Sigma}_+$.

TEOREMA 1. *Există submulţimi ale lui* $\overline{\not\Sigma}_+$, *care sînt grupuri multiplicative abeliene.*

(Astfel de grupuri le vom putea numi *subgrupuri de elemente nesumabile* ale grupului multiplicativ $(\mathcal{S}_+, \cdot)$, sau altfel: *grupuri ale lui Kummer.*)

Demonstraţia teoremei se face prin exemplificări:

Exemplul 1. Fie grupul multiplicativ cu elementul generic $(\ln^k n)_{n=2}^{\infty}$ $(k \in Z)$, unde $\ln^k n$ înseamnă $(\ln n)^k$. Pentru $k = 0$ se obţine elementul neutru şi pentru orice k întreg (pozitiv sau negativ) are loc:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln^k n = +\infty.$$

Exemplul 2. Grupul multiplicativ cu elementul generic $(\ln_p{}^l n)_{n=n_p}^{\infty}$ $(k \in Z)$, unde $\ln_p$ înseamnă logaritmul natural iterat de p ori (p fiind un număr natural arbitrar, dar fixat), iar n_p reprezintă primul număr întreg astfel ca logaritmul iterat să aibă sens.

Exemplul 3. Grupuri cu elementul generic obţinut prin înmulţirea elementelor generice ale diferitelor grupuri tratate în exemplele 1 şi 2, de pildă, cel cu elementul generic dat prin

$$([\ln n]^k [\ln \ln n]^l)_{n=3}^{\infty}$$

D e f i n i ţ i a 2. *Se concepe pe* $\mathcal{S}_+$ *operatorul* $\mathcal{K}$ *astfel*:

$$\mathcal{K}u_n = \frac{\left(\frac{1}{u_1} + 1\right) u_n}{\prod_{1}^{n} (1 + u_\nu)} \quad (n \in N); \ (u_n) \in \mathcal{S}_+. \tag{7}$$

(Se menţionează, că în cele ce urmează nu va cauza dificultăţi faptul că efectul lui $\mathcal{K}$ asupra şirului (u_n) s-a notat ca un efect direct asupra termenilor acestui şir).

Relevăm următoarele proprietăţi ale operatorului $\mathcal{K}$, respectiv proprietăţile unor restrîngeri ale lui $\mathcal{K}$ pe anumite părţi ale lui $\mathcal{S}_+$.

P r o p r i e t a t e a 1. *Operatorul* $\mathcal{K}$ *este un operator de convergenţă şi aplică* $\mathcal{S}_+$ *pe* $\overline{\Sigma}^1_+$. *Privitor la imaginile prin* $\mathcal{K}$ *ale unor submulţimi ale lui* $\mathcal{S}_+$ *au loc*

$$\mathcal{K}\left(\overline{\not\Sigma}_+\right) = \overline{\Sigma}^1_+; \quad \mathcal{K}\left(\overline{\Sigma}_+\right) \subset \overline{\Sigma}^1_+.$$

În adevăr, $\mathcal{K}$ se obţine din operatorul K definit prin (4), substituindu-se a prin $\frac{1}{u_1} + 1$; totodată $\mathcal{K}u_1 = 1$. Privitor la $\mathcal{K}\left(\overline{\Sigma}_+\right) \subset \overline{\Sigma}^1_+$, aceasta rezultă imediat, iar egalitatea $\mathcal{K}\left(\overline{\not\Sigma}_+\right) = \overline{\Sigma}^1_+$ s-a pus în evidenţă în [3] şi [4], ca bijecţia $\overline{\not\Sigma}_+ \leftrightarrow \overline{\Sigma}_+$. Mai menţionăm, că operatorul $\mathcal{K}$, ca şi cel definit prin (4), aplică o clasă de serii de o rapiditate de convergență dată, în ea însăşi.

În scopul *reprezentării seriei* $\Sigma\mathcal{K}c_n$ $\left(\text{unde } (c_n) \in \overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+\right)$ sub forma dată de (1), adică

$$\mathcal{K}c_n = \frac{A_1 + 1}{A_n \prod\limits_1^n \left(1 + \frac{1}{A_\nu}\right)}, \text{ unde } \sum_1^\infty \frac{1}{A_n} = +\infty \text{ şi } \mathcal{K}c_1 = 1,$$

se determină şirul (A_n) în conformitate cu metoda dată în [3], astfel:

$$A_n = \frac{\rho_n}{\mathcal{K}c_n} = \frac{1}{c_n} - \frac{2}{P \cdot \mathcal{K}c_n} = \frac{1}{c_n}\left(1 - \frac{\prod\limits_1^n (1 + c_\nu)}{\prod\limits_1^\infty (1 + c_\nu)}\right) < \frac{1}{c_n}.$$

O b s e r v a ţ i a 2. Fie $\sum\limits_1^\infty c_n = S_0$ unde $(c_n) \in \overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+$. Vom calcula suma transformatei prin $\mathcal{K}$, adică $S = \sum\limits_1^\infty \mathcal{K}c_n$. Au loc egalităţile

$$\mathcal{K}c_n = \frac{2c_n}{\prod\limits_1^n (1 + c_\nu)} \text{ şi } \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{K}c_n}{c_n} = \frac{2}{\prod\limits_1^\infty (1 + c_n)} = \frac{2}{P}, \text{ unde } P = \prod_1^\infty (1 + c_n).$$

Seria $\Sigma\mathcal{K}c_n$ are drept rest $\rho_n = \frac{\mathcal{K}c_n}{c_n} - \frac{2}{P}$ (în conformitate cu condiţiile care caracterizează restul seriei convergente, [3]). Are loc relaţia

$$S = \sum_1^\infty \mathcal{K}c_n = \mathcal{K}c_1 + \rho_1 = 2\left(1 - \frac{1}{P}\right) < 2.$$

Rezultă, că un element din $\overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+$ cu suma mai mare sau egală cu 2 nu poate fi transformata nici unui element din $\overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+$, ci doar transformata unui element din $\underline{\Sigma}_+ \setminus \overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+$. Aceasta justifică *incluziunea strictă* $\mathcal{K}\left(\overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+\right) \subset \overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+$.

O b s e r v a ţ i a 3. Fie $(d_n) \in \underline{\Sigma}_+$. Rezultă din (7), ţinînd seama de (2), că $S = \sum\limits_1^\infty \mathcal{K}d_n = \frac{1}{d_1} + 1$. Deci primul termen al şirului (d_n) deter-

mină suma transformatei prin $\mathcal{K}$. În particular, clasa „$d_1 = 1$" ne conduce prin transformarea $\mathcal{K}$ la „subclasa şirurilor restrînse sumabile către 2."

P r o p r i e t a t e a 2. *Aplicaţia* : $\mathcal{K} : \overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+ \to \overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+$ *este o injecţie, nu şi o bijecţie.*

În adevăr, dacă $(u_n) \in \overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+$ şi $(v_n) \in \overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+$, iar $(u_n) \neq (v_n)$ în sensul că p $(p > 1)$ este primul indice pentru care $u_p \neq v_p$, atunci din (7) rezultă

$$\mathcal{K}u_p = \frac{u_p}{\left[\prod\limits_2^{p-1} (1 + u_\nu)\right] \cdot (1 + u_p)} \text{ şi } \mathcal{K}v_p = \frac{v_p}{\left[\prod\limits_2^{p-1} (1 + v_\nu)\right] \cdot (1 + v_p)},$$

de unde

$$\frac{\mathcal{K}u_p}{\mathcal{K}v_p} = \left(1 + \frac{1}{v_p}\right) : \left(1 + \frac{1}{u_p}\right) \neq 1, \text{ adică } \mathcal{K}u_p \neq \mathcal{K}v_p$$

deci $\mathcal{K} : \overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+ \to \overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+$ este o injecţie. Privind a doua parte a enunţului proprietăţii 2, a se vedea concluzia finală din observaţia 2.

P r o p r i e t a t e a 3. *Operatorul* $\mathcal{K}$ *nu are elemente proprii, deci nu are punct fix în* $\underline{\Sigma}_+$

În adevăr, dacă s-ar presupune $\mathcal{K}c_n = \lambda c_n$ $(\lambda \in \mathbf{R})$ unde $(c_n) \in \underline{\Sigma}_+$, atunci din (7) ar rezulta $\prod\limits_2^n (1 + c_\nu) = \frac{1}{\lambda c_1}$ pentru orice $n \geqslant 2$, ceace este imposibil, dată fiind stricta pozitivitate a lui c_n $(n \in N)$.

§ 3. Grupul de compoziţie $\left(\overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+, \mho\right)$

Fie în $\overline{\underline{\Sigma}}{}^1_+$, şirurile (c'_n), (c''_n) date prin

$$(8) \qquad c'_n = \frac{\left(\frac{1}{d'_1} + 1\right) d'_n}{\prod\limits_1^n (1 + d'_\nu)}, \quad c''_n = \frac{\left(\frac{1}{d''_1} + 1\right) d''_n}{\prod\limits_1^n (1 + d''_\nu)}, \text{ cu } (d'_n), (d''_n) \in \underline{\Sigma}_+.$$

Pornind de la şirul produs (d_n) definit prin $d_n = d'_n d''_n$ $(n \in N)$, formăm şirul obţinut după cum urmează:

$$c_n = \frac{\left(\frac{1}{d_1}+1\right) d_n}{\prod\limits_1^n (1+d_\nu)} = \frac{\left(\frac{1}{d'_1 d''_1}+1\right) d'_n d''_n}{\prod\limits_1^n (1+d'_\nu d''_\nu)} \quad (n \in N).$$

Rezultă uşor că $(c_n) \in \overline{\sum}{}^1_+$, deoarece (c_n) *este* transformata lui (d_n) prin $\mathcal{K}$ (vezi definiţia 2 şi proprietatea 1). Pe această bază *se poate concepe în* $\overline{\sum}{}^1_+$ *o lege de compoziţie internă, notată* $\mho$ *şi definită prin*

$$c'_n \mho c''_n = c_n \quad (n \in N), \quad \forall (c'_n), (c''_n) \in \overline{\sum}{}^1_+.$$

Faţă de această operaţie $\mho$, există şi un element neutru, anume

$$c^0_n = \mathcal{K}\, 1 = \frac{\frac{1}{1}+1}{\prod\limits_1^n (1+1)} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n \in N),$$

iar elementul invers, faţă de operaţia $\mho$, al unui element oarecare $(c'_n) \in \overline{\sum}{}^1_+$ este elementul $(c'_n)^{-1} = (c'^{-1}_n)$ reprezentat prin

$$c'^{-1}_n = \mathcal{K}\frac{1}{d'_n} = \frac{(d'_1+1)\frac{1}{d'_n}}{\prod\limits_1^n \left(1+\frac{1}{d'_\nu}\right)} \quad (n \in N).$$

Rezultă nemijlocit

TEOREMA 2. $\overline{\sum}{}^1_+$ *este un grup abelian faţă de operaţia de compunere* $\mho$, *definită mai sus.*

Observaţia 4. Pînă cînd reprezentările (8) sînt cele *canonice* pentru (c'_n) respectiv (c''_n) — vezi (6) —, reprezentarea (9) petru compusa (c_n) nu este neapărat cea canonică. În adevăr, distingem două cazuri posibile:

Cazul a) : $\sum\limits_1^\infty d'_n d''_n = +\infty$; în acest caz reprezentarea (9) este cea canonică pentru (c_n),

Cazul b) : $\sum\limits_1^\infty d'_n d''_n < +\infty$; în acest caz, bine înţeles (9) nu este reprezentarea canonică a lui (c_n), dar (c_n) poate fi adus la reprezentarea canonică, căutînd un şir $(\delta_n) \in \overline{\sum}_+$, astfel ca să aibă loc

$$\frac{\left(\frac{1}{\delta_1}+1\right)\delta_n}{\prod\limits_1^n (1+\delta_\nu)} = \frac{\left(\frac{1}{d'_1 d''_1}+1\right) d'_n d''_n}{\prod\limits_1^n (1+d'_\nu d''_\nu)} \quad (n \in N).$$

Privind restul seriei Σc_n, trebuie să se îndeplinească

$$r_n = \frac{c_n}{\delta_n} = \frac{\frac{1}{\delta_1}+1}{\prod\limits_1^n (1+\delta_\nu)} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

(a se vedea (3)). Totodată, din (9), urmează

$$\frac{c_n}{d'_n d''_n} = \frac{\frac{1}{d'_1 d''_1}+1}{\prod\limits_1^n (1+d'_\nu d''_\nu)} \to \frac{\frac{1}{d'_1 d''_1}+1}{P} \quad (n \to \infty), \text{ unde } P = \prod_1^\infty (1+d'_n d''_n) < +\infty.$$

Astfel, dacă se pune

$$\frac{c_n}{\delta_n} = \frac{c_n}{d'_n d''_n} - \frac{\frac{1}{d'_1 d''_1}+1}{P},$$

adică

$$\frac{1}{\delta_n} = \frac{1}{d'_n d''_n} - \frac{\frac{1}{d'_1 d''_1}+1}{P \cdot c_n},$$

atunci se îndeplinesc condiţiile necesare şi suficiente ale convergenţei seriei Σc_n, anume

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta_n} c_n \to 0 \quad (n \to \infty) \\ \frac{1}{\delta_n} c_n - \frac{1}{\delta_{n+1}} c_{n+1} = c_{n+1} \quad (n \in N) \end{cases}$$

conţinute în *forma egalitate* a criteriului lui Kummer, de unde mai rezultă şi faptul că $\sum\limits_1^\infty \delta_n = +\infty$ (vezi [1]).

În altă ordine de idei, expresia lui $\frac{1}{\delta_n}$ se poate pune sub forma

$$\text{(10)} \qquad \frac{1}{\delta_n} = \frac{1}{d_n d_n''}\left(1 - \frac{P_n}{P}\right), \text{ unde } P_n = \prod_1^n (1 + d_\nu' d_\nu'') < P < +\infty$$

şi rezultă $\delta_n > d_n' d_n''$, ba chiar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_n' d_n''}{\delta_n} = 0$.

În cele ce urmează vom stabili *legături între sumele seriilor componente* ($\Sigma c_n'$, $\Sigma c_n''$) *şi suma seriei compuse* ($\Sigma c_n' \mho c_n''$). Privitor la sumele seriilor componente au loc pe baza celor de sub (3) formulele

$$s' = \sum_1^\infty c_n' = \frac{1}{d_1'} + 1 \quad \text{şi} \quad s'' = \sum_1^\infty c_n'' = \frac{1}{d_1''} + 1.$$

Privitor la suma compusei distingem şi de astă dată cele două cazuri tratate mai sus:

Cazul a). Deoarece $\sum\limits_1^\infty d_n' d_n'' = +\infty$, are loc în baza lui (3) $s = \sum\limits_1^\infty c_n' \mho c_n'' = \frac{1}{d_1' d_1''} + 1$. Un calcul simplu arată, că

$$s - 1 = (s' - 1)(s'' - 1) \quad \text{sau altfel} \quad s = s's'' - s' - s'' + 2.$$

Deoarece $s' > 1$ şi $s'' > 1$, rezultă $s < s's''$.

Cazul b). Dacă $\sum\limits_1^\infty d'd'' < +\infty$, atunci după aducerea termenului $c_1' \mho c_n''$ la forma canonică, are loc pe baza lui (10)

$$s = \sum_1^\infty c_n' \mho c_n'' = \frac{1}{\delta_1} + 1 = \frac{1}{d_1' d_1'}\left(1 - \frac{P_1}{P}\right) + 1 = \frac{1}{d_1' d_1''}\left(1 - \frac{1 + d_1' d_1''}{P}\right) + 1,$$

de unde în baza unui simplu calcul, rezultă

$$s = \left(\frac{1}{d_1' d_1''} + 1\right)\left(1 - \frac{1}{P}\right) = (s's'' - s' - s'' + 2)\left(1 - \frac{1}{P}\right) < s's''\left(1 - \frac{1}{P}\right) < s's'',$$

sau şi $s < s's'' - s' - s'' + 2 = (s' - 1)(s'' - 1) + 1$, deci $s - 1 < (s' - 1)(s'' - 1)$. În concluzie — pentru ambele cazuri are loc $s < s's''$ adică *suma compusei este mai mică decît produsul sumelor componentelor*,

Observaţia 5. În teoria clasică a seriilor se cunoaşte compunerea a două serii sub forma de „*produs al lui Cauchy*":

$$u_n = \sum_{i=1}^n u_i' u_{n-i+1}'' \qquad (n \in N),$$

iar cu privire la convergenţa seriei Σu_n are loc cunoscuta teoremă a lui Mertens; pentru suma compusei şi a componentelor se deduce egalitatea $s = s's''$. Compunerea noastră, $\mho$, conduce la $s - 1 \leqslant (s' - 1)(s'' - 1)$, egalitatea avîndu-se loc în cazul a), tratat mai sus. Dacă se consideră şirurile $(u_n')_{n=1}^\infty \in \overline{\sum}_+$ şi $(u_n'')_{n=1}^\infty \in \overline{\sum}_+$, atunci pentru compusa lor Cauchy are loc $S = s' s''$. Dacă se ataşază numărul $u_0' = u_0'' = 1$ la fiecare dintre şirurile $(u_n')_1^\infty$, $(u_n'')_1^\infty$, atunci se obţin şirurile $(u_n')_0^\infty$, $(u_n'')_0^\infty$ şi are loc egalitatea

$s' + 1 = \sum\limits_0^\infty u_n'$, respectiv $s'' + 1 = \sum\limits_0^\infty u_n''$, iar şirurile $(u_n')_0^\infty$, $(u_n'')_0^\infty$, vor face parte din $\overline{\sum}^1_+$. Dacă în reprezentarea canonică a şirurilor $(u_n')_1^\infty$, $(u_n'')_1^\infty$, figurează şirurile $(d_n')_1^\infty$ respectiv $(d_n'')_1^\infty$, atunci pentru reprezentarea canonică a şirurilor $(u_n')_0^\infty$, $(u_n'')_0^\infty$ se determină d_0' prin $\frac{1}{d_0'} u_0' - \frac{1}{d_1'} u_1' = u_1'$, iar d_0'' prin $\frac{1}{d_0''} u_0'' - \frac{1}{d_1''} u_1'' = u_1''$ (în conformitate cu forma egalitate a criteriului lui Kummer, [1]), de unde

$$\frac{1}{d_0'} = \left(\frac{1}{d_1'} + 1\right) u_1' \qquad \text{şi} \qquad \frac{1}{d_0''} = \left(\frac{1}{d_1''} + 1\right) u_1''.$$

Reprezentările canonice ale noilor şiruri $(u_n')_0^\infty$, $(u_n'')_0^\infty$, vor fi

$$u_n' = \frac{\left(\frac{1}{d_0'} + 1\right) d_n'}{\prod\limits_0^n (1 + d_\nu')}, \text{ respectiv } u_n'' = \frac{\left(\frac{1}{d_0''} + 1\right) d_n''}{\prod\limits_0^n (1 + d_\nu'')} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,).$$

Dacă are loc $\sum\limits_{n=0}^\infty d_n' d_n'' = +\infty$, atunci rezultă în baza celor văzute mai sus, egalitatea

$$\sum_{n=0}^\infty u_n' \mho u_n'' - 1 = \left(\sum_0^\infty u_n' - 1\right)\left(\sum_0^\infty u_n'' - 1\right),$$

ceea ce se scrie altfel

$$\sum_{n=1}^\infty u_n' \mho u_n'' = \left(\sum_1^\infty u_n'\right)\left(\sum_1^\infty u_n''\right),$$

adică, exact sub aceeaşi formă ca şi în cazul compusei lui Cauchy, relativ la şirurile $(u'_n)_1^\infty$, $(u''_n)_1^\infty$.

O b s e r v a ţ i a 6. Fie $(\Gamma, \cdot)$ un grup Kummer în sensul celor precizate în §2. Fie două elemente distincte din Γ, anume (d'_n) şi (d''_n) precum şi transformatele lor prin $\mathcal{K}$. Considerăm şi transformata prin $\mathcal{K}$ a compusei lor, $(d'_n\, d''_n)$, (vezi (7), (8), (9)). Rezultă nemijlocit

TEOREMA 3. *Operaţia $\mathcal{K}_\Gamma$, restrîngerea lui $\mathcal{K}$ pe Γ, este un omomorfism al grupului multiplicativ Kummer $(\Gamma, \cdot)$, în grupul de compoziţie* $\left(\overline{\sum}_+^1, \mho\right)$.

§ 4. Asupra compunerii ω în mulţimea şirurilor cu termeni pozitivi, simplu sumabile către 1

Compunerea ω pe care o introducem mai jos, în mulţimea precizată în titlul paragrafului diferă de compunerea $\mho$, deşi au trăsături comune. În conformitate cu (3) orice şir simplu sumabil către 1 se reprezintă prin

$$c_n = \frac{d_n}{\prod\limits_1^n (1 + d_\nu)}, \text{ unde } \sum_1^\infty d_n = +\infty,$$

căci

$$s = \left(\frac{1}{d_1} + 1\right) c_1 = 1.$$

D e f i n i ţ i a 3. *Prin compunerea ω a două elemente, (c'_n) şi (c''_n), din mulţimea şirurilor cu termeni strict pozitivi, simplu sumabile către 1 se înţelege şirul (c_n) format astfel:*

$$c_n = c'_n\, \omega\, c''_n = \frac{d'_n\, d''_n}{\prod\limits_1^n (1 + d'_\nu\, d''_\nu)} \qquad (n \in N), \tag{12}$$

unde (c'_n) respectiv (c''_n) se reprezintă în conformitate cu (11) *cu ajutorul şirurilor (d'_n) respectiv (d''_n).*

Privitor la suma $\sum\limits_1^\infty c_n$ distingem două cazuri:

Cazul a): $\sum\limits_1^\infty d'_n\, d''_n = +\infty$. Rezultă în mod evident egalitatea $\sum\limits_1^\infty c_n = 1$, adică şirul compus este simplu sumabil către 1.

Cazul b): $\sum\limits_1^\infty d'_n\, d''_n < +\infty$. În acest caz se va căuta reprezentarea canonică a şirului obţinut prin compunere, adică se va determina şirul (d_n) pentru care $\sum\limits_1^\infty d_n = +\infty$, astfel, ca $c_n = c'_n\, \omega\, c''_n$ să se poată scrie sub forma (3) $\left(\text{din (12) rezultă imediat primul termen al compusei } c_1 = \frac{d'_1\, d''_1}{1 + d'_1\, d''_1}\right)$. Din convergenţa presupusă aici, a seriei $\sum d'_n\, d''_n$ rezultă existenţa numărului pozitiv $P = \prod\limits_1^\infty (1 + d'_n\, d''_n)$ şi astfel, din (12) se obţine

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{d'_n d''_n} c_n = \frac{1}{P} \cdot$$

Şirul (d_n) ce se caută, se obţine (cum s-a mai văzut şi în § 3), punînd

$$\frac{1}{d_n} = \frac{1}{d'_n d''_n} - \frac{1}{P \cdot c_n} = \frac{1}{d'_n d''_n}\left(1 - \frac{P_n}{P}\right),$$

de unde $d_n = d'_n\, d''_n \dfrac{P}{P - P_n}$, iar pentru suma seriei compuse avem

$$\sum_1^\infty c_n = \left(\frac{1}{d_1} + 1\right) c_1 = \left(\frac{1}{d'_1\, d''_1}\left(1 - \frac{P_1}{P}\right) + 1\right) \frac{d'_1\, d''_1}{1 + d'_1\, d''_1} = 1 - \frac{1}{P} \cdot$$

În concluzie se enunţă

TEOREMA 4. *ω-compusa a două şiruri cu termeni strict pozitivi, simplu sumabili către 1, este un şir cu termeni strict pozitivi simplu sumabil către un număr pozitiv* $s \leq 1$.

O b s e r v a ţ i a 7. Fie Γ un grup al lui Kummer (vezi §2). Considerăm mulţimmea $\overline{\sum}_\Gamma$ a şirurilor cu termeni strict pozitivi, simplu sumabile către 1, construite cu elementele lui Γ. Rezultă, din cazul a). anterior tratat, că $\overline{\sum}_\Gamma$ *este un grup abelian faţă de operaţia de compunere* ω, cu elementul neutru $\left(\frac{1}{2^n}\right)_1^\infty$, obţinut prin intermediul lui (11) pentru $d_n = 1$ $(n \in N)$. Pornind de la un element (c_n) din $\overline{\sum}_\Gamma$, iterata $(c_n)_p$ definită inductiv prin

$$(c_n)_2 = (c_n)\, \omega\, (c_n), \quad (c_n)_p = (c_n)_{p-1}\, \omega (c_n)$$

este tot un element din $\overline{\sum}_\Gamma$, avînd reprezentarea $\dfrac{d_n^p}{\prod\limits_1^n (1 + d_\nu^p)}$ $\quad (n \in N)$.

O b s e r v a ţ i a 8. Deoarece orice şir Kummer înmulţit cu o constantă strict pozitivă este tot un şir Kummer, cele afirmate în cazul mulţimii $\sum_{\Gamma}$ sînt valabile şi pentru mulţimea de şiruri simplu sumabile construite cu ajutorul elementelor unui grup Kummer cu multiplicatori reali, strict pozitivi, notat $(\Gamma;\ R_{+})$. Totodată remarcăm faptul, că dacă seria Σc_n este dată prin $c_n = \dfrac{d_n}{\prod_1^n (1+d_\nu)}$ $(n \in N)$ cu $\sum_1^\infty d_n = +\infty$ (şi bine înţeles $\sum_1^\infty c_n = 1$), atunci seriile cu termenul general

$$\frac{Sd_n}{\prod_1^n (1+d_\nu)} \quad \text{respectiv} \quad \frac{d_n}{\prod_1^n \left(1+\frac{1}{S}\,d_\nu\right)}$$

au amîndouă suma S (S fiind o constantă strict pozitivă).

O b s e r v a ţ i a 9. Fie un şir (c_n) de numere *nenegative* simplu sumabile către 1. Eliminînd din şir termenii nuli — locurile acestora în şir fiind indicate prin j_l $(l \in N)$ — subşirul rămas, notat (c_{i_k}), va avea reprezentarea de tipul (11), anume

$$c_{i_k} = \frac{d_{i_k}}{\prod_{\nu=1}^{k} (1+d_{i_\nu})} \quad (k \in N).$$

Dacă se reîntroduc termenii nuli în şir, atunci ataşînd unui termen nul, de exemplu lui c_{j_l} numărul $d_{j_l} = 0$, şirul (c_n) de numere *nenegative*, simplu sumabil către 1 va avea de asemenea reprezentarea

$$(13) \qquad c_n = \frac{d_n}{\prod_1^n (1+d_\nu)} \quad (n \in N),$$

unde pentru $n = i_k$ are loc $d_n > 0$, iar pentru $n = j_l$ are loc $d_n = 0$.

O b s e r v a ţ i a 10. Dacă (d_n) este un şir de numere raţionale strict pozitive pentru care $\sum_1^\infty d_n = +\infty$, atunci în baza reprezentării (11) se obţine seria Σc_n de suma 1 şi cu toţi termenii raţionali şi pozitivi. Astfel s-a ajuns la *o descompunere infinită, raţională a unităţii*. Se obţine mulţimea tuturor descompunerilor infinite raţionale ale unităţii, făcînd ca (d_n) să parcurgă mulţimea tuturor şirurilor cu termeni pozitivi şi raţionali, simplu nesumabile.

O b s e r v a ţ i a 11. Dacă se dă şirul cu termeni strict pozitivi şi simplu sumabil către 1, reprezentarea (11) se poate obţine folosind şirul (c_n) al termenilor, formula sumei $1 = \left(\frac{1}{d_1} + 1\right) c_1$ $\left(\text{de unde se determină } d_1 = \frac{c_1}{1-c_1}\right)$ şi relaţia de recurenţă pentru (d_n), anume $d_{n+1} = \dfrac{c_{n+1}\,d_n}{c_n - c_{n+1}\,d_n}$.

§ 5. Despre sfera unitate din spaţiul l^α $(\alpha \geqslant 1)$

În conformitate cu [3] şi ţinînd seama de observaţia 9 din prezenta lucrare, reprezentarea unui element oarecare, (u_n), *de pe sfera unitate* (propriu zis frontiera sferei) a spaţiului l^α $(\alpha \geqslant 1)$:

$$(14) \quad u_n = \varepsilon_n \frac{d_n^{\frac{1}{\alpha}}}{\prod_1^n (1+d_\nu)^{\frac{1}{\alpha}}} \quad \text{cu } \varepsilon_n = \pm 1,\ d_n \geqslant 0 \ (n \in N) \text{ şi } \sum_1^\infty d_n = +\infty.$$

deoarece şirul (c_n) dat prin

$$c_n = |u_n|^\alpha = \frac{d_n}{\prod_1^n (1+d_\nu)} \qquad (n \in N)$$

este simplu sumabil către 1 şi în consecinţă are loc $\left(\sum_1^\infty |u_n|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 1$. Rezultă imediat, că un element al spaţiului l^α, care se află *pe sfera de rază* $\rho > 0$, se reprezintă prin

$$(15) \quad u_n = \varepsilon_n \frac{\rho d_n^{\frac{1}{\alpha}}}{\prod_1^n (1+d_\nu)^{\frac{1}{\alpha}}} \quad \text{cu } \varepsilon = \pm 1,\ d_n \geqslant 0 \ (n \in N) \text{ şi } \sum_1^\infty d_n = +\infty,$$

deoarece
$$\left(\sum_1^\infty |u_n|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \rho.$$

ω-compunerea referitoare la două elemente de pe sfera unitate se efectuiază (folosind simbolica obişnuită) astfel:

$$u'_n \omega u''_n = \varepsilon_n \frac{(d'_n d''_n)^{\frac{1}{\alpha}}}{\prod_1^n (1 + d'_\nu d''_\nu)^{\frac{1}{\alpha}}} \quad \text{unde } \varepsilon_n = \varepsilon'_n \varepsilon''_n = \pm 1 \qquad (n \in N).$$

ω-compusa a două elemente de pe sfera unitate din l^α este un element de pe această sferă, dacă $\sum_1^\infty d'_n d''_n = +\infty$, respectiv un element din interiorul sferei unitate dacă $\sum_1^\infty d'_n d''_n < +\infty$ (a se vedea §3 privitor la suma seriei compuse). Rezultă nemijlocit

TEOREMA 5. *Operaţia de compunere ω, în mulţimea elementelor de pe sfera unitate a spaţiului l^α ($\alpha \geqslant 1$) păstrează compusa fie pe sfera unitate, fie că o situiază în interiorul ei. În acesta din urmă caz există compuse oricît de aproape de frontiera sferei şi compuse oricît de aproape de centrul sferei.*

TEOREMA 6. *Mulţimea de elemente de pe sfera unitate a spaţiului $l^\alpha(\alpha \geqslant 1)$, obţinute prin (14) din elementele unui grup Kummer, formează şi ea un grup de compoziţie (G, ω) cu elementul neutru*

$$u_n^0 = \frac{1^{\frac{1}{\alpha}}}{\prod_1^n (1+1)^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{\alpha}}} \qquad (n \in N).$$

O b s e r v a ţ i a 12. Remarcăm, că în l^α ($\alpha \geqslant 1$) există o infinitate de elemente pe care le numim *absolut neutre* faţă de compunerea ω în l^α, anume acelea care admit reprezentarea

$$\overline{u_n^0} = \varepsilon_n \frac{1^{\frac{1}{\alpha}}}{\prod_1^n (1+1)^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{\varepsilon_n}{2^{\frac{n}{\alpha}}}, \quad \varepsilon_n = \pm 1 \qquad (n \in N),$$

totodată $\left(\sum_1^\infty |\overline{u_n^0}|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 1$ deci ele se află pe sfera unitate şi are loc egalitatea $|u_n \omega \overline{u^0}| = |u_n| \, \omega \, |\overline{u_n^0}| = |u_n|$, $(u_n) \in l^\alpha$. *Mulţimea elementelor absolut neutre faţă de compunerea ω în l^α formează de asemenea un grup.*

UNE NOUVELLE ÉTUDE STRUCTURELLE DANS L'ENSEMBLE DES SUITES NUMÉRIQUES

RÉSUMÉ

Dans les travaux [3] et [4] l'auteur a donné une formule de représentation pour le terme général d'une série convergente quelconque. À l'aide de cette formule on met en évidence diverses structures et de nouvelles compositions ($\mho$, dans le §3 et ω, dans le §4) des éléments appartenant à des ensembles de suites numériques, ainsi que des liaisons entre des sous-ensembles remarquables de suites, à l'aide des opérateurs de convergence, (4) et (7). On donne aussi *la représentation des éléments des espaces $l^\alpha(\alpha \geqslant 1)$*, ainsi qu'une loi de composition (dans le §5) des éléments de l^α et l'étude de cette composition regardant les éléments sur la sphère unitaire de l^α.

BIBLIOGRAFIE

[1] N e y. A. *Contribuţie la studiul rapidităţii de convergenţă a seriilor cu termeni pozitivi.* Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **XIII**, *1*, 147–174 (1962).

[2] — Teză de doctorat.

[3] — *Éléments de la théorie constructive des séries de quaternions.* Mathematica (Cluj) **12 (35)**, *1*, 127–147, (1970).

[4] — *Studiu asupra seriilor numerice cu termeni pozitivi, convergente sau divergente.* Studii şi cercetări matematice, (Bucureşti), **22**, *4*, 631–640 (1970).

Primit la 16. X. 1971.