REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola 2, 1974, pp. 215–223

UN SISTEM DINAMIC UNIVERSAL

de

GH. TOADER

(Cluj)

§ 1. Introducere.

Teoria sistemelor dinamice a apărut la sfîrşitul secolului trecut ca un capitol special al teoriei ecuaţiilor diferenţiale ordinare, prin cercetările lui H. POINCARÉ legate de studiul proprietăţilor topologice ale soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale ordinare autonome din plan. Aceste cercetări au fost continuate de I. BENDIXON dar mai ales de G. D. BIRKHOFF care a trecut la studiul ecuaţiilor autonome într-un spaţiu euclidian arbitrar R^n, a introdus multe noţiuni noi şi a demonstrat o serie de rezultate fundamentale legate de ele.

Cea mai remarcabilă proprietate a mulţimii soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale autonome, cu unicitate, este următoarea (proprietate de grup): fie ecuaţia autonomă

$$dx/dt = f(x) \tag{1}$$

unde $x \in R^n$, $t \in R^1 = R$ iar $f: R^n \to R^n$ este o funcţie continuă. Presupunem că această ecuaţie are proprietatea de existenţă globală a soluţiilor şi de unicitate a problemei iniţiale. Să notăm cu $x(x_0, t)$ acea soluţie a ecuaţiei (1) care verifică condiţia iniţială $x(0) = x_0$. Pentru un $t_1 \in R$ să notăm $x(x_0, t_1) = x_1$. Din autonomia sistemului rezultă că odată cu $x(x_0, t)$ e soluţie şi $x(x_0, t + t_1)$. Dar atunci avem două soluţii $x(x_1, t)$ şi $x(x_0, t + t_1)$ ce iau valoarea x_1 pentru $t = 0$. În baza unicităţii problemei iniţiale, ele coincid peste tot deci pentru orice $t_2 \in R$ avem $x(x_1, t_2) = x(x_0, t_1 + t_2)$, sau înlocuindu-l pe x_1:

$$x(x(x_0, t_1), t_2) = x(x_0, t_1 + t_2). \tag{2}$$

§ 2. Sisteme dinamice.

Proprietatea de grup amintită anterior i-a servit lui A. A. MARKOV (1931) la definirea (pe spaţii metrice) a sistemelor dinamice abstracte (ne-diferenţiale).

Definiţia 1. *Fie X un spaţiu topologic iar $\pi : X \times R \to X$ o aplicaţie continuă* (se consideră topologia produs pe $X \times R$). *Perechea (X, π) se numeşte sistem dinamic dacă sînt satisfăcute axiomele:*

(i) $\pi(x, 0) = x$ *pentru orice* $x \in X$

(ii) $\pi(\pi(x, t + s)) = \pi(x, t + s)$ *pentru orice* $x \in X$ şi $t, s \in R$.

Vom mai spune, fără pericol de confuzie, că π este sistem dinamic pe X şi de obicei vom nota $\pi(x, t)$ cu $x\pi t$.

Observaţia 1. *Definind pentru orice t din R aplicaţia $\pi_t : X \to X$ prin $\pi_t(x) = \pi(x, t)$ se vede cu uşurinţă că $\{\pi_t ; t \in R\}$ formează un grup faţă de operaţia de compunere, elementul unitate fiind π_0 iar inversul lui π_t fiind π_{-t}. In plus, fiecare π_t este un automorfism al lui X. Deci un sistem dinamic constitue un grup uniparametric de transformări topologice.*

Observaţia 1. *Avantajele introducerii sistemelor dinamice sînt multiple. Majoritatea noţiunilor şi rezultatelor privind ecuaţiile diferenţiale autonome au fost extinse la sisteme dinamice* (care pe baza celor arătate mai sus includ ecuaţiile autonome cu unicitate şi existenţă globală a soluţiilor). *Mai mult, formulările şi în multe cazuri demonstraţiile au fost mult simplificate. In plus, pe lîngă îmbogăţirea mulţimii sistemelor definite pe un spaţiu dat, s-a putut trece uşor de la sisteme definite pe spaţii euclidiene la sisteme definite pe spaţii topologice arbitrare.*

Un exemplu de sistem dinamic, pe care-l vom folosi în cele ce urmează, este următorul: sistemul translaţiilor pe spaţiul topologic Y, sau sistem Bebutov, este sistemul dinamic (Y^R, ρ) unde Y^R reprezintă spaţiul funcţiilor continue $x : R \to Y$, înzestrat cu topologia compact-deschisă, iar $\rho(x, t) = x_t$ (ca de obicei, $x_t(s) = x(t + s)$).

§ 3. Transformări.

Lărgirea mulţimii ecuaţiilor diferenţiale este utilă şi în studiul transformărilor ecuaţiilor (deci în organizarea sa în categorii). De exemplu, din ecuaţia (1) printr-o transformare $h : R^n \to R^n (x = h(y))$ se obţine ecuaţia

$$\frac{dh}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = f(h(y)) \tag{1'}$$

cu condiţia derivabilităţii lui h şi cu riscul ca ecuaţia transformată să piardă proprietatea de unicitate. Aceste restricţii dispar în cazul siste-

melor dinamice. Astfel, avînd sistemul dinamic (X, π), spaţiul topologic Y şi homeomorfismul $h : Y \to X$ obţinem totdeauna un sistem dinamic ρ pe Y definind $y\rho t = h^{-1}(h(y)\pi t)$. Pornind de aici dăm următoarea:

Definiţia 2. *Spunem că sistemul dinamic (X, π) se aplică pe sistemul (Y, ρ), sau că sistemul (Y, ρ) este ridicat la sistemul (X, π), dacă există surjecţia continuă $h : X \to Y$ care face comutativă următoarea diagramă:*

$$\begin{tikzcd} X \times R \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "{(h, 1)}"] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \times R \arrow[r, "\rho"] & Y \end{tikzcd}$$

adică: $h(x\pi t) = h(x)\rho t$, pentru orice $(x, t) \in X \times R$. Dacă există un homeomorfism h cu proprietatea de mai sus, cele două sisteme se numesc izomorfe.

Observaţia 3. *În acest ultim caz, unul se obţine din celălalt prin transformarea indicată anterior.*

Definiţia 3. *Fie sistemul dinamic (X, π) şi submulţimea X' a lui X invariantă, adică pentru orice x' din X' şi orice t din R avem $x'\pi t \in X'$. Atunci, notînd $\pi' = \pi|X' \times R$, perechea (X', π') formează un sistem dinamic numit subsistem al lui (X, π).*

În anul 1940, M. BEBUTOV [2] a demonstrat că orice sistem dinamic definit pe un spaţiu metric compact şi care are cel mult un punct critic (adică un punct x din X cu proprietatea că $x\pi t = x$ pentru orice t din R) este izomorf cu un subsistem al sistemului translaţiilor pe R. În 1949 V. V. NEMÎŢKI [8] a demonstrat că orice sistem dinamic definit pe un spaţiu local compact, cu bază numărabilă, se aplică pe un spaţiu metric compact şi care are un singur punct critic. Cum un spaţiu local compact este cu bază numărabilă dacă şi numai dacă este metric separabil [4], avem în definitiv următoarea:

TEOREMA A. *Orice sistem dinamic, definit pe un spaţiu metric separabil local compact se aplică pe un subsistem al sistemului translaţiilor pe R.*

Definiţia 4. *Sistemul dinamic (Y, ρ) se numeşte quasi-universal* (universal) *în raport cu clasa $\mathfrak{C}$ de spaţii topologice, dacă oricare ar fi X din $\mathfrak{C}$, orice sistem dinamic π pe X este ridicat la* (respectiv izomorf cu) *un subsistem al lui (Y, ρ). In al doilea caz se mai spune că (X, π) este scufundat în (Y, ρ).*

Observaţia 4. *Inlocuind în definiţiile anterioare grupul aditiv R al numerelor reale cu cel al numerelor întregi Z, se obţin sisteme dinamice discrete şi noţiuni legate de ele. Pentru acestea* R. D. ANDERSON [1] *a demonstrat că sistemul discret al translaţiilor pe cubul lui* HILBERT *este universal în raport cu clasa spaţiilor metrice separabile. Pentru sisteme dinamice a dat doar sisteme quasi-universale. Scopul nostru este de a indica un sistem universal pentru clasa de spaţii ce intervine şi în teorema lui* V. V. NEMÎŢKI. *Pentru aceasta vom extinde o teoremă a lui* S. KAKUTANI [7] *de caracterizare a sistemelor dinamice ce se scufundă în sistemul translaţiilor pe R la:*

TEOREMA 1. *Fie X un spaţiu metric compact. Pentru ca sistemul dina-*
mic π definit pe X să poată fi scufundat în sistemul translaţiilor pe spaţiul
Banach Y este necesar şi suficient ca mulţimea punctelor sale critice să fie
homeomorfă cu o submulţime a lui Y.

Demonstraţia o urmăreşte întocmai pe cea dată de Kakutani în ca-
zul $Y = R$, schimbînd unele motivaţii şi făcînd cîteva modificări formale
impuse de noua situaţie.

Necesitatea condiţiei este evidentă căci mulţimea punctelor critice ale
sistemului (Y^R, ρ) este formată din toate funcţiile constante, deci este ho-
meomorfă cu Y.

Suficienţa. Fie Γ mulţimea punctelor critice ale lui (X, π) iar $\gamma : \Gamma \to Y$
funcţia ce dă homeomorfismul lui Γ pe $\gamma(\Gamma) \subset Y$.

Fie $C(X, Y)$ spaţiul Banach al tuturor funcţiilor continue $f: X \to Y$
cu norma $||f|| = \sup \{||f(x)||_Y ;\ x \in X\}$. Punem
$C_0 = \{f \in C(X, Y), f(x) = \gamma(x)$, pentru orice x din $\Gamma\}$.

Pe baza teoremei de prelungire a lui Dugundji [4], $C_0 \neq \emptyset$ şi fiind
o submulţime închisă a lui $C(X, Y)$ este spaţiu metric complet faţă de
metrica $d(f, g) = ||f - g||$. Mai notăm cu $\Delta = \{(x, x), x \in X\}$ şi $A^* =$
$= X \times X \setminus ((\Gamma \times \Gamma) \cup \Delta)$. Demonstraţia teoremei se reduce la demon-
strarea următoarelor:

Lema 1. *Pentru orice submulţime compactă $K^* \subset A^*$, mulţimea:*
$C_0(K^*) = \{f \in C_0$: pentru orice $(x, y) \in K^*$ există $t \in R$, $f(x\pi t) \neq f(y\pi t)\}$
este o o submulţime deschisă a lui C_0.

Lema 2. *Pentru orice $(x, y) \in A^*$, există o vecinătate compactă K^**
a lui (x, y) în A^* astfel că $C_0 (K^*)$ este densă în C_0.

Lema. 3. *Există $f \in C_0$ astfel că oricare ar fi punctele x, y din X*
$x \neq y$, să avem $f(x\pi t) \neq f(y\pi t)$ pentru cel puţin un t din R.

Intr-adevăr, presupunînd lemele demonstrate, fie $f \in C_0$ o funcţie dată
de lema 3. Vom construi funcţia $h : X \to Y^R$ astfel: pentru orice $x \in X$
punem

$$h(x)(s) = f(x\pi s),\ \text{pentru } s \text{ din } R.$$

Se vede că h este bine definită ($h(x) : R \to Y$ este continuă) şi din proprie-
tăţile funcţiei f deducem că h este o injecţie continuă. Deoarece X este
compact iar Y^R este Hausdorff rezultă [4] că h este un homeomorfism al
lui X pe $h(X) \subset Y^R$. În plus:

$$h(x\pi t)(s) = f((x\pi t)\pi s) = f(x\pi(t + s)) = h(x)(t + s) = h(x)_t(s)$$

deci: $h(x\pi t) = h(x)\rho t$, adică mulţimea $h(X)$ este invariantă faţă de ρ şi h
scufundă sistemul (X, π) în (Y^R, ρ).

Demonstraţia lemei 1. Fie f_0 din $C_0(K^*)$ arbitrar, pentru moment
fixat şi punem

$$d(x, y) = \sup \{||f_0(x\pi t) - f_0(y\pi t)||_Y : t \in R\}.$$

Prin ipoteză, $d(x, y) > 0$ pentru orice $(x, y) \in K^*$. Să arătăm că există un $d_0 > 0$ astfel ca $d(x, y) \geqslant d_0$ pentru orice (x, y) din K^*. Presupunem că n-ar fi aşa, deci există şirul $\{(x_n, y_n)\} \subset K^*$ astfel ca $d(x_n, y_n)$ tinde la 0 cînd n tinde la $+\infty$. Deoarece K^* e compact putem presupune că există $(x_0, y_0) \in K^*$ astfel ca $x_n \to x_0$ şi $y_n \to y_0$. Dar atunci $f_0(x_n\pi t) \to$ $\to f_0(x_0\pi t)$ şi $f_0(y_n\pi t) \to f_0(y_0\pi t)$ şi cum din definiţia lui d avem $||f_0(x\ \pi t) -$ $- f_0(y_n\ \pi t)|| \leqslant d(x_n, y_n)$, deducem ca $f_0(x_0\pi t) = f_0(y_0\pi t)$ pentru orice t din R, în contradicţie cu faptul că $d(x_0, y_0) > 0$. Existenţa lui d_0 este astfel demonstrată. Cum $f \in C_0$, $||f - f_0|| \leqslant d_0/2$ implică $f \in C_0(K^*)$ demonstraţia este încheiată.

Demonstraţia lemei 2. Fie (x_0, y_0) din A^*. Putem presupune că $x_0 \in X \setminus$ $\setminus \Gamma$, $y_0 \in X$, $x_0 \neq y_0$. Deoarece X este compact Hausdorff, Γ *e* mulţime închisă şi $x_0 \notin \Gamma \cup \{y_0\}$, există o vecinătate (deschisă) V a lui x_0 astfel ca $\Gamma \cup \{y_0\} \subset X \setminus \overline{V}$. Pentru $M \in X$ şi $I \subset R$ notăm $\pi(M, I) = \{\pi(x, t) :$ $: x \in M, t \in I\}$. Punctul x_0 ne fiind critic, există $\eta_1 > 0$ astfel că x_0 $x_0 \notin \pi(x_0, (0, \eta_1])$. De asemenea, pentru orice $y \neq x_0$ există $\eta_y > 0$ astfel ca $\pi(x_0, [0, \eta_y]) \cap \pi(y, [0, \eta_y]) = \emptyset$. Mulţimea $X \setminus V$ fiind compactă, $\eta_2 = \min \{\eta_y : y \in X \setminus V\} > 0$. În definitiv, pentru $\eta = \min \{\eta_1, \eta_2\}$ avem:

$$\pi(x_0, \eta) \neq x_0 \text{ şi } \pi(x_0, [0, \eta]) \cap \pi(X \setminus V, [0, \eta]) = \emptyset.$$

Analog alegem o vecinătate deschisă W a lui x_0 astfel ca $\overline{W}$, $\pi(\overline{W}, \eta)$ şi $\pi(X \setminus V, [0, \eta])$ să fie disjuncte două cîte două. Notăm cu $K^* = \overline{W} \times (X \setminus V)$. Deoarece $(x_0, y_0) \in W \times (X \setminus \overline{V})$, K^* este o vecinătate compactă a lui (x_0, y_0) şi $K^* \subset A^*$. Vom arăta că $C_0(K^*)$ e densă în C_0.

Fie $f \in C_0$ şi $\varepsilon > 0$. Pentru $\alpha > 0$, notăm

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(x\pi s) ds$$

şi fixăm un α astfel ca $||f - f_\alpha|| < \varepsilon/2$ (existenţa unui astfel de α rezultă din continuitatea lui f pe compactul X şi din continuitatea lui π). Pentru $x \in \Gamma$ avem $f_\alpha(x) = f(x) = \gamma(x)$ deci $f \in C_0$. Ca mai sus alegem $0 <$ $< \delta < \eta$ astfel ca

$$\pi(\overline{W}, [0, \delta]),\ \pi(\overline{W}, [\eta, \eta + \delta]) \text{ şi } \pi(X \setminus V, [0, \eta + \delta])$$

să fie disjuncte două cîte două şi definim:

$$u_0(x) = 0 \text{ pentru } x \in \pi(\overline{W}, [0, \delta]) \cup \pi(X \times V, [0, \eta + \delta])$$

şi

$$u_0(x) = 1 \text{ pentru } x \in \pi(\overline{W}, [\eta, \eta + \delta]).$$

Pe baza teoremei lui Tietze există o prelungire $u \in C(X, R)$ a lui u_0 astfel ca $0 \leqslant u(x) \leqslant 1$. Pentru $x \in X$ punem

$$v(x) = \int_0^{\eta} u(x\pi s)ds$$

şi

$$g(x) = f_\alpha(x) + \frac{1}{p}\sin(q \cdot v(x))e$$

cu $e \in Y$, $||e|| = 1$ iar p, q numere naturale. Avem (pentru orice p şi q) $g \in C_0$ căci pentru $x \in \Gamma \subset X \setminus \bar{V}$, $v(x) = u(x) = 0$, deci $g(x) = f_\alpha(x) = \gamma(x)$. De asemenea:

$$||f - g|| \leqslant ||f - f_\alpha|| + \frac{1}{p} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{p}$$

deci alegînd un $p > \frac{2}{\varepsilon}$ avem $||f - g|| < \varepsilon$. Pentru demonstrarea lemei e suficient să găsim un q astfel ca $g \in C_0(K^*)$.

Avem, pe de o parte, pentru $x \in \overline{W}$ şi $0 < t < \delta$:

$$v(x\pi t) = \int_0^{\eta} u(x\pi(t + s))ds = \int_t^{t+\eta} u(x\pi s)ds + \int_0^t u(x\pi s)ds = \int_0^{\eta} u(x\pi s)ds +$$

$$+ \int_{\eta}^{\eta+t} u(x\pi s)ds \text{ şi deci } v(x\pi t) = v(x) + t$$

şi

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\alpha(x\pi t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} f((x\pi t)\pi s)ds\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\int_t^{t+\alpha} f(x\pi s)ds =$$

$$= \frac{1}{\alpha}[f(x\pi(t + s) - f(x\pi t)]$$

deci

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t} f_\alpha(x\pi t)\right\| \leqslant \frac{2||f||}{\alpha} \text{ pentru orice } t \text{ din } R \text{ şi } x \text{ din } X.$$

Deci pentru x din $\overline{W}$ şi $0 < t < \delta$:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t} g(x\pi t)\right\| \geqslant \frac{1}{p}\left|\frac{\partial}{\partial t}\sin[q \cdot v(x\pi t)]\right| - \left\|\frac{\partial}{\partial t} f_\alpha(x\pi t)\right\| \geqslant \frac{q}{p}|\cos[q \cdot v(x\pi t)]| - \frac{2||f||}{\alpha}.$$

Dacă $q\delta > \pi$, există $0 < t < \delta$ astfel ca $qv(x\pi t) = 0 \pmod{\pi}$. Presupunînd în plus $q > 4p\,||f||/\alpha$, pentru $x \in \overline{W}$ găsim $t \in (0, \delta)$ astfel ca

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t} g(x\pi t)\right\| > 2||f||/_\alpha.$$

Pe de altă parte, dacă $y \in X \setminus V$ şi $0 < t < \delta$, $v(x\pi t) = 0$, deci

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t} g(y\pi t)\right\| = \left\|\frac{\partial}{\partial t} f_\alpha(y\pi t)\right\| \leqslant \frac{2||f||}{\alpha}.$$

În concluzie, pentru $(x, y) \in K^*$, există un $t \in (0, \delta)$ astfel ca

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x\pi t) \neq \frac{\partial}{\partial t} g(y\pi t).$$

Dar atunci $g \in C_0(K^*)$.

Demonstraţia lemei 3. Spaţiul X fiind Hausdorff, Δ este închisă şi la fel fiind şi Γ (deci şi $\Gamma \times \Gamma$), A^* este o submulţime deschisă a unui spaţiu metric compact deci e spaţiu metric separabil. Folosind teorema de acoperire a lui Lindelöf, din lemele anterioare deducem existenţa unui şir de submulţimi compacte $K_n^* \subset A^*$ astfel ca $A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^*$ şi fiecare $C_0(K_n^*)$ este o mulţime deschisă şi densă în C_0. Deoarece C_0 este spaţiu metric complet, pe baza teoremei lui Baire $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_0(K_n^*) \neq \emptyset$. Fie $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_0(K_n^*)$ şi punctele x, y din X, $x \neq y$. Dacă $x, y \in \Gamma$, pentru orice $t \in R$:

$$f(x\pi t) = f(x) = \gamma(x) \neq \gamma(y) = f(y) = f(y\pi t)$$

căci γ este injecţie. Dacă x (sau y) nu aparţine lui Γ, $(x, y) \in A^*$ deci aparţin unei vecinătăţi K_n^* şi deoarece $f \in C_0(K_n^*)$ există t din R astfel ca $f(x\pi t) \neq f(y\pi t)$ şi cu aceasta demonstraţia lemei 3 e încheiată deci şi a teoremei 1.

Observaţia 5. S. KAKUTANI afirmă că C_0 este separabil, ceeace e fals în general şi oricum superfluu în demonstraţie.

Acum sîntem în măsură să demonstrăm rezultatul principal al lucrării:

TEOREMA 2. *Sistemul translaţiilor pe l^2 este universal în raport cu clasa spaţiilor metrice separabile, local compacte.*

Demonstrație. Fie X un spațiu metric separabil, local compact. După cum am mai observat, aceasta e echivalent cu a spune că X este local compact, cu bază numărabilă [4]. Dar atunci compactificatul său Alexandrov $\hat{X}$ este metrizabil. Fie π un sistem dinamic pe X. Definim funcția $\hat{\pi}: \hat{X} \times R \to \hat{X}$ prin:

$$\hat{\pi}(\hat{x}, t) = \begin{cases} \pi(x, t) & \text{dacă } \hat{x} = x \in X \\ \omega & \text{dacă } \hat{x} = \omega \end{cases}$$

unde s-a notat cu ω punctul din $\hat{X} \setminus X$. După cum se știe [5] se obține un sistem dinamic $(\hat{X}, \hat{\pi})$. Spațiul $\hat{X}$ fiind metric separabil, se poate scufunda în cubul Hilbert (pe baza teoremei lui URÎSON [4]) deci și în spațiul Banach 1^2. Cu atît mai mult mulțimea punctelor critice ale sistemului π este homeomorfă cu o submulțime a lui 1^2. În baza teoremei 1, sistemul $(\hat{X}, \hat{\pi})$ se scufundă în sistemul translațiilor pe 1^2 și odată cu el se scufundă și (X, π).

Observația 6. *Există sisteme dinamice definite pe spații metrice separabile, local compacte, cu mulțimea punctelor critice ne-scufundabilă în nici-un spațiu euclidian (de exemplu sistemul trivial—toate punctele sale fiind critice—pe cubul lui Hilbert), deci teorema 2 acoperă golul lăsat de o teoremă a lui* O. HÁJEK [6].

§ 4. Sisteme dinamice locale

Singura restricție făcută prin considerarea sistemelor dinamice în locul ecuațiilor diferențiale autonome cu unicitate, este ipoteza existenței globale a soluțiilor. Această situație a fost depășită prin introducerea de către O. HAJEK a următoarei:

D e f i n i ț i a 5. *Perechea* (X, π) *formată din spațiul topologic* X *și aplicația continuă* $\pi: D_\pi \to X$ *se numește sistem dinamic local, dacă sînt satisfăcute axiomele:*

(1) $D_\pi \subset X \times R$ *e deschisă*

(2) *Pentru orice* $x \in X$ *există* $-\infty \leqslant \alpha_x < 0 < \beta_x \leqslant \infty$ *astfel că* $(x, t) \in D_\pi$ *dacă și numai dacă* $t \in (\alpha_x, \beta_x)$

(3) $\pi(x, 0) = x$ *pentru orice* $x \in X$

(4) *Dacă* $(x, t) \in D_\pi$, *atunci* $\pi((\pi(x, t)s) = \pi(x, t + s)$ *cînd unul din membrii e definit.*

Pentru astfel de sisteme, izomorfismul este modificat astfel:

D e f i n i ț i a 6. *Sistemele dinamice locale* (X, π) *și* (Y, ρ) *sînt GH izomorfe* (izomorfe în sens Gottschalk și Hedlund) *dacă există homeomorfismul* $h: X \to Y$ *și aplicația continuă* $\Phi: D_\pi \to R$ *astfel ca:*

(i) *Pentru* $x \in X$, $\Phi(x, 0) = 0$ *și* $\Phi(x, .)$ *este un homeomorfism al lui* (α_x, β_x) *pe* $(\alpha_{h(x)}, \beta_{h(x)})$

(ii) *Pentru* $(x, t) \in D_x$: $h(\pi(x, t)) = \rho(h(x), \Phi(x, t))$.

Extinzînd o teoremă demonstrată pentru sisteme autonome de VINOGRAD, D. CARLSON [3] a demonstrat următoarea:

TEOREMA B. *Dacă* π *este un sistem dinamic local definit pe un spațiu metric* X, *atunci există un sistem dinamic* (global) *pe* X *care este GH izomorf cu el.*

Folosind acest rezultat, din teorema 2 se deduce imediat:

TEOREMA 3. *Orice sistem dinamic local definit pe un spațiu metric separabil local compact* X *se poate GH scufunda în sistemul translațiilor pe* 1^2.

O b s e r v a ț i a 7. *Noțiunea de GH scufundare a sistemelor dinamice locale se subînțelege a fi analoagă scufundării sistemelor dinamice, dar prin GH izomorfisme.*

A UNIVERSAL DYNAMICAL SYSTEM

ABSTRACT

Using a generalization of a theorem of Bebutov-Kakutani (theorem 1), the universality of the shift system on 1^2 with respect to the class of locally compact separable metric spaces is proved (theorem 2).

BIBLIOGRAFIE

[1] A n d e r s o n R. D., *Universal and quasi-universal flows.* Topological Dynamics, Edited by J. Auslander and W. Gottschalk (Colorado), 1968.

[2] B e b u t o v M. V., *A dinamiceskih sistemah v prostranstve neprerîvnîh funkții*, D.A.N. SSSR **27**, 904–906 (1940).

[3] C a r l s o n D. H., *A generalization of Vinograd's thereom for dynamical systems*, J. Diff. Equations **11**, 193–201 (1972).

[4] D u g u n d j i J., *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.

[5] H á j e k O., *Dynamical systems in the plane*, Academic Press, N. Y., 1968.

[6] H á j e k O., *Representation of dynamical systems*, Funkcialaj Ekvacioj **14**, 25–34 (1971).

[7] K a k u t a n i S., *A proof of Bebutov's theorem*, J. Diff. Equations **4**, 194–201 (1968).

[8] N e m î ț k i V. V., *Topologhiceskie problemî dinamiceskih sistem*, Uspehi Matem. Nauk 98–153 (1949).

Institutul de calcul din Cluj al Academiei Republicii Socialiste România

Primit la 23. II. 1974