REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 1, Fascicola 1, 1972, pp. 83–86

O GENERALIZARE A NOŢIUNII DE CENTRU AL UNUI GRAF

de

VASILE PETEANU
(Cluj)

În lucrările [4], [5] am studiat o structură algebrică denumită semigrup de drumuire sau C-semigrup. O serie din noţiunile şi rezultatele cunoscute în teoria grafelor pot fi generalizate, ponderînd arcele unui graf cu elemente ale C-semigrupului. În lucrarea de faţă ne propunem să generalizăm noţiunea de centru al unui graf. În prealabil vom reaminti definiţia C-semigrupului şi unele proprietăţi ale sale.

Definiţia 1. *Se numeşte semigrup de drumuire sau C-semigrup, o mulţime nevidă $\mathcal{C}$ în care sînt definite două legi de compoziţie internă „$\oplus$" şi „$\circ$" denumite adunare, respectiv înmulţire, cu următoarele proprietăţi*:

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

$$a \oplus b = b \oplus a$$

$$a \oplus a = a$$

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

$$a \circ (b \oplus c) = (a \circ b) \oplus (a \circ c)$$

$$(b \oplus c) \circ a = (b \circ a) \oplus (c \circ a)$$

$$\exists\, e \in \mathcal{C},\ a \circ e = e \circ a = a$$

oricare ar fi a, b, c aparţinînd mulţimii $\mathcal{C}$.

Elementul e se numeşte *element unitate* şi este unic. Proprietatea de idempotenţă a operaţiei $\oplus$ poate fi înlocuită cu: $e \oplus e = e$.

Într-un C semigrup există o relaţie de ordine. Fie a şi b două elemente ale sale. Vom spune că $a > b$ dacă şi numai dacă $a \oplus b = a$. Relaţia „$>$" verifică cele trei axiome ale unei relaţii de ordine.

D e f i n i ţ i a 2. *Un element a aparţinînd C-semigrupului* $\mathscr{C}$ *se numeşte supraunitar, dacă* $a > e$. Un C-semigrup avînd toate elementele supraunitare se numeşte C-semigrup supraunitar. Elementul a se numeşte subunitar dacă $e > a$ iar C-semigrupul cu toate elementele subunitare se numeşte C-semigrup subunitar.

Vom nota în continuarea lucrării

$$a^0 = e,\ a^k = a^{k-1} \circ a$$

şi

$$\underset{k=1}{\overset{n}{\boxplus}} a_k = a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n$$

D e f i n i ţ i a 3. *Un element a aparţinînd C-semigrupului* $\mathscr{C}$ *se numeşte p-stabil, dacă* $a^p = a^{p+1}$. *Elementul* a^p *se numeşte puterea stabilă a elementului a.*

D e f i n i ţ i a 4. *Elementul* θ *aparţinînd C-semigrupului* $\mathscr{C}$, *cu proprietăţile*

$$a \oplus \theta = a,\ a \circ \theta = \theta \circ a = \theta,\ \forall a \in \mathscr{C}$$

se numeşte elementul neutru al C-semigrupului.

Elementul neutru, dacă există este unic. Dacă un C-semigrup nu are element neutru, există o extindere a C-semigrupului care conţine elementul neutru. Elementul neutru este cel mai mic element din $\mathscr{C}$ în sensul că oricare ar fi $a \in \mathscr{C}$, avem $a > \theta$.

În cazul în care pentru oricare două elemente a şi b aparţinînd C-semigrupului $\mathscr{C}$ avem fie $a \oplus b = a$ fie $a \oplus b = b$, C-semigrupul este total ordonat.

Într-un C-semigrup total ordonat se introduce operaţia „$\ominus$" definită în modul următor: dacă $a \oplus b = a$ atunci $b = a \ominus b$. Vom nota

$$\underset{i=1}{\overset{n}{\boxminus}} a_i = a_1 \ominus a_2 \ominus \ldots \ominus a_n$$

Fie acum $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ matrici de ordinul n ale căror elemente aparţin unui C-semigrup $\mathscr{C}$. Legile de compoziţie internă „$\oplus$" şi „$\circ$" ale C-semigrupului se pot extinde fără dificultate la matrici, prin

analogie cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire a matricilor. Astfel suma a două matrici A şi B este matricea C unde $c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$, iar produsul lor ete D unde

$$d_{ij} = \underset{k=1}{\overset{n}{\boxplus}} a_{ik} \circ b_{kj}$$

Se notează $A \oplus B = C$, respectiv $A \circ B = D$

Mulţimea matricilor de ordinul n pe un C-semigrup $\mathscr{C}$ o vom nota cu $\mathscr{M}_n(\mathscr{C})$. În mulţimea $\mathscr{M}_n(\mathscr{C})$ un rol important îl are matricea $E = (e_{ij})$ unde

$$e_{ij} = \begin{cases} e \text{ pentru } i = j \\ \theta \text{ pentru } i \neq j \end{cases}$$

O vom numi matrice unitate şi se bucură de proprietatea

$$A \circ E = E \circ A = A,\ \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathscr{C})$$

Se poate demonstra [5] că mulţimea matricilor de ordinul n pe un C-semigrup constituie, cu adunarea şi înmulţirea definite mai sus, un C-semigrup.

Vom nota în cele ce urmează cu $\mathscr{A}_n(\mathscr{C})$ mulţimea matricilor de ordinul n definite pe $\mathscr{C}$ pentru care $a_{ii} = e$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Fie A o matrice de ordinul n ale cărei elemente aparţin unui C-semigrup $\mathscr{C}$ Acestei matrici i se poate asocia în mod unic un graf orientat, complet, ponderat, $G(A)$ cu n vîrfuri, notate cu indici 1, 2, ..., n, în care fiecare arc (i, j) are ponderea a_{ij}. Invers, fiecărui graf orientat, complet, ponderat cu elemente din C-semigrupul $\mathscr{C}$, i se poate pune în corespondenţă o matrice $A(G)$ în care elementul a_{ij} este ponderea arcului (i, j). Dacă graful G nu este complet, el poate fi transformat într-un graf complet, adăugînd arcele care lipsesc şi atribuindu-le o pondere egală cu θ.

D e f i n i ţ i a 5. *Ponderea unui drum în graf este produsul ponderilor arcelor care compun acel drum. De exemplu, ponderea drumului* (i, j, k, l) *din figura de mai jos*

$$i \xrightarrow{a_{ij}} j \xrightarrow{a_{jk}} k \xrightarrow{a_{kl}} l$$

va fi egală cu $a_{ij} \circ a_{jk} \circ a_{kl}$.

Fie acum G un graf orientat, ponderat cu elemente din C-semigrupul total ordonat $\mathscr{C}$ şi fie $A = A(G)$. Notăm cu $\hat{a}_{ij}$ elementele matricii $\hat{A} = A^{n-1}$. Matricea A este presupusă $(n-1)$-stabilă.

D e f i n i ţ i a 6. *Se numeşte ecartament generalizat al vîrfului i, elementul*

$$\mathcal{E}(i) = \overset{n}{\underset{k=1}{\boxed{-}}} \hat{a}_{ij}$$

D e f i n i ţ i a 7. *Se numeşte centru generalizat al grafului G în C-semigrupul* $\mathcal{C}$, *un vîrf c al grafului, pentru care*

$$\mathcal{E}(c) = \overset{n}{\underset{i=1}{\boxed{+}}} \mathcal{E}(i), \ \mathcal{E}(c) \neq \theta$$

Evident, un graf poate avea mai multe centre generalizate sau poate să nu aibă nici unul.

D e f i n i ţ i a 8. *Dacă graful G admite un centru generalizat c, atunci* $\rho = \mathcal{E}(c)$ *se numeşte raza generalizată a grafului.*

O b s e r v a ţ i e. Dacă $\mathcal{C} = \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{+\infty\}$ $\oplus = \min$, $\circ = +$, $\ominus = \max$, $\theta = +\infty$ şi $e = 0$ (se poate verifica uşor că acesta este un C-semigrup total ordonat), atunci ecartamentul generalizat, centrul generalizat şi raza generalizată ale grafului G coincid cu noţiunile de ecartament, centru şi rază cunoscute în teoria grafelor (de ex. C. BERGE [1] p. 16).

GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE CENTRE D'UN GRAPHE

RÉSUMÉ

En [4] et [5], on a étudié une structure algébrique que l'on nomme semigroupe de cheminement ou C-semigroupe. Une série de notions et résultats trouvés dans la théorie des graphes peuvent être généralisées en attachant les éléments du C-semigroupe aux arcs d'un graphe.

Le présent ouvrage généralise de cette manière les notions de centre et de rayon d'un graphe.

BIBLIOGRAFIE

[1] B e r g e, C., *Théorie des graphes et ses applications.* Dunod, Paris (1963).

[2] C r u o n, R., H e r v é, Ph., *Quelques résultats relatifs a une structure algebrique et a son applications au probleme central de l'ordonnancement.* Revue Francaise de Recherche Opérationnelle **34** (1965).

[3] P e t e a n u, V., *On the Optimal Path in Networks.* Mathematica (Cluj), **9, (32),** 335–342 (1967).

[4] — *Optimal paths in networks and generalizations* (I). Mathematica (Cluj), **11 (34),** *2*, 311–327 (1969).

[5] — *Optimal paths in networks and generalizations* (II). Mathematica (Cluj), **12, (35),** *1*, 159–186 (1970).

[6] T o m e s c u I., *Sur l'algorithme matriciel de B. Roy* R.I.R.O., **7,** 87–91 (1968).

Primit la 1. XI. 1971.