REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 1, Fascicola 1, 1972, pp. 87–95

OBSERVAŢII ASUPRA NOŢIUNII DE ALURĂ

de

ELENA POPOVICIU

(Cluj)

1. Această lucrare încearcă să prezinte cititorului unele aspecte ale problematicii legate de definiţia noţiunii de alură. Termenul ,,alură'' apare azi, destul de frecvent, în literatura matematică. Astfel, se vorbeşte despre ,,alura de monotonie'' a unei funcţii, ,,alura de convexitate a unei funcţii'' sau se spune uneori despre o funcţie că are ,,o alură asemănătoare cu cea a unui polinom''. Este clar că în exemplele citate, terminologia utilizată caută să exprime o anumită comportare a graficului unei funcţii, comportare care se exprimă analitic în mod adecvat.

Noţiunile de monotonie, convexitate, convexitate de ordin superior precum şi altele, înrudite în diverse moduri cu acestea, au fost în ultimele decenii mult generalizate. Ele au ajuns în contact direct cu teoria calculului şi cu alte domenii ale matematicii moderne. Termenului ,,alură'', a început să i se atribuie accepţiuni diferite. Această situaţie impune adoptarea unor definiţii care să conducă la precizarea conţinutului noţiunii de ,,alură''.

2. Să notăm cu $\mathcal{F}$ o mulţime de funcţii reale de o variabilă reală, definite pe X. Presupunem despre X că are cel puţin n puncte distincte, unde n este un număr întreg, pozitiv, fixat. Să considerăm o mulţime de puncte $Y \subseteq X$, astfel ca Y să conţină cel puţin n puncte distincte. Dacă X se reduce la o mulţime de n puncte, este clar că unicul mod de alegere a submulţimii Y revine la $Y = X$. Pentru cele ce urmează, se face ipoteza că funcţiile din $\mathcal{F}$ sînt continue pe mulţimea Y.

D e f i n i ţ i a 1. *Mulţimea $\mathcal{F}$ este interpolatoare de ordinul n pe Y, dacă pentru orice sistem de n puncte distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$, din Y şi oricare ar fi numerele $y_1, y_2, \ldots, y_n$, există în $\mathcal{F}$ o funcţie φ şi una singură, astfel ca $\varphi(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Pentru simplificarea exprimării, dacă sînt îndeplinite condiţiile din definiţia 1, se spune că mulţimea $\mathcal{F}$ este de tipul $I_n\{Y\}$. Pentru funcţia φ care figurează în definiţia 1 se utilizează notaţia

$$\varphi = L(\mathcal{F};\ x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Dacă numerele $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt valorile pe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale unei funcţii f şi anume $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, atunci se mai utilizează pentru funcţia φ şi notaţia $\varphi = L(\mathcal{F};\ x_1, x_2, \ldots, x_n; f)$.

3. În lucrarea [1], am considerat o mulţime $\mathcal{F}$ de tipul $I_n\{Y\}$, $n \geqq 1$ unde despre Y am presupus că este un interval mărginit şi închis $[a, b]$ şi am introdus noţiunea de funcţie de ordinul n faţă de $\mathcal{F}$, pe o mulţime $Z \subseteq Y$, unde despre Z am presupus că are cel puţin $n + 1$ puncte distincte. Reproducem definiţia dată în [1]. Pentru aceasta, să considerăm o funcţie f definită pe Z şi un sistem de $n + 1$ puncte

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \tag{1}$$

din Z. Diferenţa

$$f(x_{n+1}) - L(\mathcal{F};\ x_1, x_2, \ldots, x_n; f)(x_{n+1}) \tag{2}$$

poate fi pozitivă, egală cu zero sau negativă.

D e f i n i ţ i a 2. *Spunem că funcţia f este $\mathcal{F}$-convexă, $\mathcal{F}$-neconcavă, $\mathcal{F}$-polinomială, $\mathcal{F}$-neconvexă, respectiv $\mathcal{F}$-concavă pe mulţimea de puncte Z, după cum, pe orice sistem* (1) *de puncte din Z, sînt satisfăcute relaţiile*

$$f(x_{n+1}) - L(\mathcal{F};\ x_1, x_2, \ldots, x_n; f)(x_{n+1}) >,\ \geqq,\ =,\ \leqq \text{ respectiv } < 0. \tag{3}$$

D e f i n i ţ i a 3. *Spunem că funcţia f este de ordinul n faţă de $\mathcal{F}$, pe mulţimea de puncte Z, dacă diferenţa* (2) *nu schimbă semnul, cînd sistemul* (1) *de cîte $n + 1$ puncte din Z se alege în toate modurile posibile.*

Din definiţia 3 rezultă că dacă f este de ordinul n faţă de $\mathcal{F}$, pe Z, atunci este satisfăcută una şi întotdeauna aceiaşi relaţie dintre cele cinci relaţii care figurează în (3). Prin urmare, dacă funcţia f are una dintre proprietăţile specificate în definiţia 2, atunci ea este de ordinul n faţă de $\mathcal{F}$ pe Z.

4. Dacă în locul mulţimii $\mathcal{F}$, se consideră mulţimea $\mathcal{P}_n$ a polinoamelor reale, de o variabilă reală şi de grad cel mult egal cu n, se observă că $\mathcal{P}_n$ este de tipul $I_{n+1}\{Y\}$ oricare ar fi mulţimea Y care conţine cel puţin $n + 1$ puncte distincte. Fie, spre exemplu $Y = [a, b]$. Atunci definiţiile 2 şi 3 ne conduc la noţiunea de funcţie de ordinul n în sensul definiţiilor din [4]. Astfel, dacă $Z \subseteq [a, b]$, conţine cel puţin $n + 2$ puncte distincte, se poate considera sistemul de puncte

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2} \tag{4}$$

din Z şi diferenţa

$$f(x_{n+2}) - L(\mathcal{P}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, f)(x_{n+2}) = \tag{5}$$
$$= (x_{n+2} - x_1)(x_{n+2} - x_2) \ldots (x_{n+2} - x_{n+1})\ [x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f],$$

unde cu $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$ se notează diferenţa divizată a funcţiei f pe punctele (4).

În cazul particular $\mathcal{F} = \mathcal{P}_n$, se regăsesc astfel definiţiile din [4]. Noţiunea de funcţie de ordinul $n + 1$ faţă de $\mathcal{P}_n$ pe mulţimea Z, în sensul definiţiei 3, revine la noţiunea de funcţie de ordinul n pe Z în sensul atribuit acestei noţiuni în [4].

Dacă utilizăm relaţia de egalitate (5), atunci *funcţia f, definită pe Z, se spune că este convexă, neconcavă, polinomială, neconvexă respectiv concavă de ordinul n pe Z, în sensul definiţiilor din* [4] *dacă sînt satisfăcute relaţiile*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] >,\ \geqq,\ =,\ \leqq \text{ respectiv } < 0, \tag{6}$$

oricare ar fi punctele distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ din Z. Aici nu este necesar să impunem o ordine punctelor x_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 2$ din cauza simetriei diferenţei divizate $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$, în raport cu argumentele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 2$. Dacă se pleacă de la studiul semnului diferenţei care figurează în membrul întîi din (5), atunci se presupune în prealabil că punctele le x_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 2$, sînt aşezate în ordinea din (4).

Se observă că definiţiile 2 şi 3 sînt generalizări imediate ale definiţiilor din [4], dar, dacă asupra mulţimii $\mathcal{F}$ nu se face ipoteza de liniaritate, atunci aceste generalizări sînt esenţiale, o relaţie de forma (5) neavînd loc, în acest caz. Multe proprietăţi ale funcţiilor de ordinul n faţă de o mulţime $\mathcal{F}$, de tipul $I_n\{[a, b]\}$, pe o mulţime $Z \subseteq [a, b]$, sînt consecinţe ale unei teoreme de medie pe care am demonstrat-o în [1] şi pe care o reproducem aici. Să presupunem, pentru a putea enunţa această teoremă, că $\mathcal{F}$ este de tipul $I_n\{[a, b]\}$, $n \geqq 2$ şi că se dau punctele

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m, \tag{7}$$

unde $m \geqq n + 1$, iar $x_i \in [a, b)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Fie $x_m < x_0 \leqq b$ şi f o funcţie definită pe punctele x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$.

TEOREMA 1. *Dacă $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ sînt puncte din* (7) *astfel ca $1 \leqq i_1 \leqq i_2 < \ldots < i_n \leqq m$, atunci sînt satisfăcute inegalităţile*

$$\min_{j=i_1, i_1+1, \ldots, i_n-n+1} L(\mathcal{F};\ x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}; f)(x_0) \leqq \tag{8}$$
$$\leqq L(\mathcal{F};\ x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}; f)(x_0) \leqq$$
$$\max_{j=i_1, i_1+1, \ldots, i_n-n+1} L(\mathcal{F};\ x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}; f)(x_0),$$

egalitatea avînd loc simultan și atunci și numai atunci cînd toate funcțiile $L(\mathcal{F};\ x_j,\ x_{j+1},\ \ldots,\ x_{j+n-1};\ f)$ $j = i_1, i_1 + 1, \ldots, i_n - n + 1$, *sînt egale.*

5. $\mathcal{F}$ fiind o mulțime de tipul $I_n\{[a, b]\}$ și $Z \subseteq [a, b]$, mulțimea funcțiilor $\mathcal{F}$-convexe pe Z se notează cu simbolul $\mathcal{C}(\mathcal{F};\ Z;\ +)$, iar mulțimea funcțiilor $\mathcal{F}$-concave pe Z, cu simbolul $\mathcal{C}(\mathcal{F};\ Z;\ -)$. Vom mai utiliza și notația $\mathcal{C}(\mathcal{F};\ Z) = \mathcal{C}(\mathcal{F};\ Z;\ +) \cup \mathcal{C}(\mathcal{F};\ Z;\ -)$. Evident, se presupune că Z conține, așa cum se cere în definiția 2, cel puțin $n + 1$ puncte distincte.

Fie $\mathcal{F}$ de tipul $I_n\ \{[a, b]\}$, $n \geqq 1$ și $Z \subseteq [a, b]$ conținînd cel puțin n puncte distincte.

Definiția 4. *Funcția f, definită pe Z, se zice că este n-valentă față de $\mathcal{F}$ pe mulțimea Z, dacă f coincide pe cel mult n puncte distincte din Z cu orice funcție din $\mathcal{F}$.*

În lucrarea [1] am demonstrat

TEOREMA 2. *Dacă f este continuă pe $[a, b]$, condiția necesară și suficientă ca f să aparțină mulțimii $\mathcal{C}(\mathcal{F};\ [a, b])$, este ca f să fie n-valentă față de $\mathcal{F}$ pe $[a, b]$.*

Pentru precizarea legăturii dintre proprietatea de continuitate și proprietatea unei funcții de a fi de ordinul n față de o mulțime interpolatoare de ordinul n, reproducem din [1] și

TEOREMA 3. *Dacă $\mathcal{F}$ este de tipul $I_n\{[a, b]\}$ și $n \geqq 2$, atunci din $f \in \mathcal{C}(\mathcal{F};\ [a, b])$ rezultă continuitatea funcției f pe intervalul deschis (a, b).*

6. Incercările în vederea generalizării proprietăților exprimate prin inegalitățile (6), cînd se trece de la mulțimea $\mathcal{P}_n$ la o mulțime interpolatoare oarecare, nesupusă la condiția de liniaritate, întîmpină dificultăți din cauză că nu se poate obține o imediată generalizare a noțiunii de diferență divizată. Așa se explică faptul că în [6] se ia ca definiție a „convexității unei funcții f, continue pe $[a, b]$, față de mulțimea $\mathcal{F}$, de tipul $I_n[\{a, b]\}$," propoziția „f este n-valentă față de $\mathcal{F}$ pe $[a, b]$". Evident, mulțimea funcțiilor convexe, în acest sens, față de $\mathcal{F}$, este mult mai restrînsă decît mulțimea funcțiilor de ordinul n față de $\mathcal{F}$ pe o mulțime $Z \subseteq [a, b]$. Rezultă totuși din definiția dată în [6], importanța noțiunii de n-valență a unei funcții, față de o mulțime interpolatoare de ordinul n, noțiune care în cazul cînd se ia ca mulțime interpolatoare de ordinul n mulțime $\mathcal{P}_{n-1}$, $n \geqq 1$, a fost dată de Tiberiu Popoviciu în [4].

Dacă se urmărește extinderea proprietății din definiția 3, la elemente ale unui spațiu abstract, se impune o generalizare care diferă esențial de cea care s-a realizat prin trecerea de la noțiunea de funcție de ordinul n în sensul adoptat în [4] la noțiunea de funcție de ordinul n față de o mulțime oarecare, interpolatoare de ordinul n.

În cele ce urmează, ne oprim asupra problematicii semnalate.

7. Noțiunile introduse prin definițiile 2 și 3, pot fi considerate ca rezultat al comparării funcției f cu funcțiile din mulțimea $\mathcal{F}$, prin intermediul diferenței (2). În realitate, se consideră restrîngerea g a funcției f pe punctele $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ și se construiește funcția din $\mathcal{F}$ care coincide cu restrîngerea g, pe punctele x_n, $i = 1, 2, \ldots, n$, adică

$$L(\mathcal{F};\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ g), \tag{9}$$

care este egală cu $L(\mathcal{F};\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ f)$. Funcția (9) este o prelungire a funcției g pe mulțimea de definiție a funcției f (numai prelungirea pe *această* mulțime ne interesează aici). Este firesc să se pună problema „comparării" funcției f cu toate prelungirile de forma (9) ale restrîngerilor funcției f pe cîte n puncte distincte din mulțimea de definiție a funcției f. Un mod de a efectua această „comparare" este furnizat de studiul semnului diferenței (2). Acest studiu conduce la împărțirea mulțimii funcțiilor definite pe Z în două clase (care atunci cînd *există* funcții de ordinul n față de $\mathcal{F}$, pe Z și Z nu se reduce la o mulțime de $n + 1$ puncte, sînt ambele nevide): clasa funcțiilor *comparabile* cu funcțiile din $\mathcal{F}$, formată din funcțiile pentru care diferența (2) nu schimbă semnul și clasa funcțiilor care nu sînt comparabile cu funcțiile din $\mathcal{F}$. Este clar că semnul diferenței (2) nu rămîne unicul criteriu în studiul comportării funcției f față de funcțiile din $\mathcal{F}$.

8. Dacă, în ipoteza că $\mathcal{F}$ este de tipul $I_n\{[a, b]\}$, $n \geqq 1$, ne fixăm asupra mulțimii $\mathcal{C}(\mathcal{F};\ [a, b])$, despre care presupunem că nu este vidă, atunci observăm că este adevărată

TEOREMA 4. *Dacă $f \in \mathcal{C}(\mathcal{F};\ [a, b])$ atunci, oricare ar fi două sisteme distincte $x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n$ și $x''_1,\ x''_2,\ \ldots,\ x''_n$ de cîte n puncte distincte din $[a, b]$, funcțiile $L(\mathcal{F};\ x'_1,\ x'_2,\ \ldots\ x'_n;\ f)$ și $L(\mathcal{F};\ x''_1,\ x''_2,\ \ldots,\ x''_n;\ f)$ sînt distincte.*

Pentru *demonstrația* teoremei 4 să presupunem că $f \in \mathcal{C}(\mathcal{F};\ [a, b])$ și există două sisteme distincte $x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n$ și $x''_1,\ x''_2,\ \ldots,\ x''_n$, de cîte n puncte distincte din $[a, b]$, astfel ca $L\ (\mathcal{F};\ x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n;\ f) = L(\mathcal{F};\ x''_1,\ x''_2,\ \ldots,\ x''_n,\ f)$. De aici rezultă că există cel puțin un punct printre punctele $x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n$, de exemplu x'_l, astfel ca el să nu coincidă cu nici unul dintre punctele x''_i, $i=1, 2, \ldots, n$ și astfel ca $L(\mathcal{F};\ x''_1,\ x''_2, \ldots, x''_n;\ f)\ (x'_l) = f(x'_l)$. Să renumerotăm, acum, punctele $x''_1,\ x''_2,\ \ldots,\ x''_n,\ x'_l$ în ordinea lor crescătoare: $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$. Este satisfăcută relația $f(x_{n+1}) - L(\mathcal{F};\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ f)(x_{n+1}) = 0$, care contrazice ipoteza $f \in \mathcal{C}(\mathcal{F};\ [a, b])$. Teorema 4 este demonstrată.

TEOREMA 5. *Dacă f este continuă pe $[a, b]$ și $\mathcal{F}$ este de tipul $I_n\{[a, b]\}$, $n \geqq 1$, atunci din $L(\mathcal{F};\ x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n;\ f) \neq L(\mathcal{F};\ x''_1,\ x''_2,\ \ldots,\ x''_n;\ f)$, pentru orice pereche de sisteme distincte $x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n$ și $x''_1,\ x''_2,\ \ldots,\ x''_n$, de cîte n puncte distincte din $[a, b]$, rezultă că $f \in \mathcal{C}(\mathcal{F};\ [a, b])$.*

Demonstrația rezultă pe baza teoremei 2.

9. Dacă $\mathcal{F}$ este de tipul $I_n\{[a,b]\}$, $n \geqq 1$ şi există o mulţime $\mathcal{G}$ de tipul $I_{n+1}\{[a,b]\}$, astfel ca $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, atunci se poate face o precizare în plus asupra comportării funcţiilor din $\mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b])$.

TEOREMA 6. *Dacă $f \in \mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b])$, atunci nu există nici un sistem de $n + 1$ puncte distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, în $[a,b]$, astfel ca $L(\mathcal{G}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$ să aparţină mulţimii $\mathcal{F}$.*

Pentru demonstraţia teoremei 6, să presupunem că $f \in \mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b])$ şi $L(\mathcal{G}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f) \in \mathcal{F}$, x_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$ fiind puncte distincte din $[a,b]$. De aici, din cauza ipotezelor făcute asupra mulţimilor $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{G}$, rezultă că $L(\mathcal{F}; x_1, x_2, \ldots, x_n; f) = L(\mathcal{G}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$ adică $L(\mathcal{F}; x_1, x_2, \ldots, x_n; f)(x_{n+1}) = f(x_{n+1})$. Putem presupune $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$. Rezultă că $f(x_{n+1}) - L(\mathcal{F}; x_1, x_2, \ldots, x_n; f)(x_{n+1}) = 0$ ceea ce contrazice ipoteza $f \in \mathcal{C}(\mathcal{F}; [a,b])$.

10. Dacă $\mathcal{F}$ este de tipul $I_n\{[a,b]\}$, $n \geqq 1$ şi există o mulţime $\mathcal{G}$ de tipul $I_{n+1}\{[a, b]\}$, astfel ca $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, se observă imediat [2], că elementele mulţimii $\mathcal{G}$ care nu se reduc la elemente din $\mathcal{F}$, aparţin mulţimii $\mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b])$. În felul acesta funcţiile $\mathcal{F}$ — convexe pe $[a, b]$ şi funcţiile $\mathcal{F}$— concave pe $[a, b]$ care nu se reduc la funcţii din $\mathcal{G}$ pot fi considerate ca funcţii a căror comportare faţă de elementele mulţimii $\mathcal{F}$ imită comportarea funcţiilor din $\mathcal{G}$, care nu aparţin mulţimii $\mathcal{F}$, faţă de elementele din $\mathcal{F}$.

11. Mulţimea $\mathcal{F}$ fiind de tipul $I_n\{[a, b]\}$ pentru punerea în evidenţă a importanţei mulţimilor $\mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b]; +)$ şi $\mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b]; -)$, vom enunţa şi un rezultat din teoria celei mai bune aproximaţii. Să observăm mai întîi că dacă $h \in \mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b]; +)$ şi $g \in \mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b]; -)$ iar h şi g sînt funcţii continue pe $[a, b]$, atunci diferenţa $g - h$ nu se poate anula pe mai mult de n puncte din (a, b) schimbînd semnul [3]. O consecinţă a acestei observaţii, în ipoteza că $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ satisfac condiţiile de interpolare de la punctul 10, este

TEOREMA 7. *Dacă f este continuă pe $[a, b]$ şi $f \in \mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b]; +)$ (sau $f \in \mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b]; -)$) atunci elementul de cea mai bună aproximaţie a funcţiei f, prin elemente din $\mathcal{G}$, pe $[a, b]$ aparţine mulţimii $\mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b]; +)$ (sau mulţimii $\mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b]; -)$).*

Pentru demonstraţie să presupunem că $h^* \in \mathcal{G}$ şi $\max\limits_{x \in [a, b]} |f(x) - h^*(x)| = \inf\limits_{h \in \mathcal{G}} \{\max\limits_{x \in [a, b]} |f(x) - h(x)|\}$. Pe baza teoremei de alternanţă a lui Cebîşev, există $n + 2$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$, în $[a, b]$, astfel ca

$$|f(x_i) - h^*(x_i)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - h^*(x)|, \; i = 1, 2, \ldots, n + 2$$

şi

$$\operatorname{sg} [f(x_i) - g^*(x_i)] = - \operatorname{sg} [f(x_{i+1}) - h^*(x_{i+1})], \; i = 1, 2, \ldots, n + 1.$$

De aici rezultă că diferenţa $f - h^*$ se anulează schimbînd semnul pe $n + 1$ puncte din (a, b). Prin urmare h^* nu poate aparţine mulţimii $\mathcal{F}$ pentru că $f \in \mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b])$. De asemenea din cauza comportării diferenţei $f - h^*$, funcţiile f şi h^* trebuie să aparţină ambele sau mulţimii $\mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b]; +)$ sau mulţimii $\mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b]; -)$. Teorema 7 este demonstrată.

12. Să considerăm acum mulţimea $\mathcal{D}[a, b]$ a funcţiilor definite pe intervalul $[a, b]$, mulţimea $\mathcal{F}$ de tipul $I_n\{[a, b]\}$ şi o mulţime $\mathcal{U}$, nevidă, de operatori definiţi pe $\mathcal{D}[a, b]$ şi cu valorile în $\mathcal{D}[a, b]$.

Definiţia 5. *Spunem despre tripletul $(\mathcal{F}, \mathcal{D}[a, b], \mathcal{U})$ că este un procedeu de interpolare dacă pentru orice funcţie $f \in \mathcal{D}[a, b]$ şi pentru orice element $U \in \mathcal{U}$, funcţia $U(f)$ aparţine mulţimii $\mathcal{F}$.*

Un caz particular important îl constituie cel în care $\mathcal{F} = \mathcal{P}_n$ iar $\mathcal{U}$ este mulţimea operatorilor $U = U_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}}$, unde x_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$ sînt puncte distincte din $[a, b]$, iar $U_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}}(f) = L(\mathcal{P}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$. Se observă că $L(\mathcal{P}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$ este polinomul de interpolare al lui Lagrange, de gradul n, ataşat funcţiei f, pe punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Ceea ce se mai constată la acest procedeu particular de interpolare, este următoarea proprietate: dacă $f \in \mathcal{P}_n$, atunci $U_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}}(f) = f$. Această observaţie ne sugerează ideia de a considera procedee de interpolare $(\mathcal{F}, \mathcal{D}[a, b], \mathcal{U})$, în care, dacă $f \in \mathcal{F}$ şi $U \in \mathcal{U}$, atunci $U(f) = f$.

Definiţia 6. *Despre procedeul de interpolare $(\mathcal{F}, \mathcal{D}[a, b], \mathcal{U})$, în care pentru orice $f \in \mathcal{F}$ şi oricare ar fi $U \in \mathcal{U}$ este satisfăcută relaţia $U(f) = f$, se zice că este de tip polinomial.*

Definiţia 7. *Dacă $(\mathcal{F}, \mathcal{D}[a, b], \mathcal{U})$ este un procedeu de interpolare de tip polinomial, spunem că el defineşte o alură de tip* (C) *în $\mathcal{L}[a, b]$, dacă există o înpărţire în două clase $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$a mulţimii $\mathcal{D}[a, b]$, astfel ca: 1) $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}'$; 2) dacă $f \in \mathcal{D}'$ şi $f \notin \mathcal{F}$, atunci oricare ar fi perechea de operatori distincţi U_1, $U_2 \in \mathcal{U}$, este satisfăcută condiţia $U_1(f) \neq U_2(f)$; 3) ori care ar fi $f \in \mathcal{D}''$, există o pereche de operatori distincţi U_1, U_2 din $\mathcal{U}$ astfel ca $U_1(f) = U_2(f)$. Dacă $h \in \mathcal{D}'$ şi $h \notin \mathcal{F}$ spunem că h are alură de tip* (C) *relativă la procedeul $(\mathcal{F}, \mathcal{D}[a, b], \mathcal{U})$.*

Se observă cu uşurinţă că prin definiţia 7 s-a generalizat mulţimea $\mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b])$, şi că această definiţie are sens numai dacă mulţimea $\mathcal{U}$ conţine cel puţin două elemente distincte.

Definiţia 8. *Dacă $(\mathcal{F}, \mathcal{D}[a, b], \mathcal{U})$) este un procedeu de interpolare de tip polinomial, spunem că el defineşte în $\mathcal{D}[a, b]$ o alură de tip* (C) *slabă, dacă există o împărţire în două clase $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ a mulţimii $\mathcal{D}[a, b]$, astfel ca: 1) $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}'$; 2) dacă $f \in \mathcal{D}'$* şi *$f \notin \mathcal{F}$, atunci oricare ar fi perechea de operatori distincţi V_1, $V_2 \in \mathcal{U}$ este satisfăcută relaţia $V_1(f) \neq V_2(f)$ sau*

$V_1(f) = V_2(f) = g \in \mathcal{F}$ *și există un subinterval* $[\alpha, \beta]$ *în* $[a, b]$, *astfel ca restrîngerea funcției* g *pe* $[\alpha, \beta]$ *să fie egală cu restrîngerea funcției* f *pe* $[\alpha,\beta]$; 3) *dacă* $f \in \mathcal{D}''$, *există doi operatori distincți* $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$ *astfel ca* $V_1(f) = V_2(f) = g \in \mathcal{F}$ *și oricare ar fi* $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, *restrîngerea funcției* g *pe* $[\alpha, \beta]$ *este diferită de restrîngerea funcției* f *pe* $[\alpha, \beta]$.

Ca o aplicație a celor două definiții 7 și 8, să considerăm perechea de mulțimi interpolatoare $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, unde $\mathcal{F}$ este de tipul $I_n\{[a, b]\}$, iar $\mathcal{G}$ este de tipul $I_{n+1}\{[a, b]\}$ $n \geq 1$. Fie $\mathcal{U}_1$ și $\mathcal{U}_2$ două mulțimi nevide de operatori definiți pe $\mathcal{D}[a, b]$ și cu valori în $\mathcal{D}[a, b]$. Fie $(\mathcal{F}, \mathcal{D}[a, b], \mathcal{U}_1)$ și $(\mathcal{G}, \mathcal{D}[a, b], \mathcal{U}_2)$ două procedee de interpolare de tip polinomial.

D e f i n i ț i a 9. *Spunem că perechea de mulțimi interpolatoare* $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ *are proprietatea* (*P*) *dacă oricare ar fi* $f \in \mathcal{D}[a, b]$ *astfel ca în* $\mathcal{U}_1$ *să existe doi operatori distincți* V_1, V_2 *care să satisfacă condiția* $V_1(f) = V_2(f)$, *există în* $\mathcal{U}_2$ *un operator* U, *astfel ca* $U(f) \in \mathcal{F}$.

TEOREMA 8. *Dacă*: 1) *perechea de mulțimi interpolatoare* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ *are proprietatea* (*P*); 2) *procedeul de interpolare* $(\mathcal{F}, \mathcal{D}[a, b], \mathcal{U}_1)$ *definește în* $\mathcal{D}[a, b]$ *o alură de tip* (*C*); *atunci elementele din* $\mathcal{G}$, *care nu aparțin mulțimii* $\mathcal{F}$, *au alura de tip* (*C*) *față de procedeul de interpolare* $(\mathcal{F}, \mathcal{D}[a, b], \mathcal{U}_1)$.

Pentru demonstrație este suficient să observăm că pentru un element g din $\mathcal{G}$ care nu aparține mulțimii $\mathcal{F}$ nu pot exista două elemente distincte V_1, V_2 din $\mathcal{U}_1$ astfel ca $V_1(g) = V_2(g)$, din cauza condiției (*P*) și a condiției de polinomialitate impuse procedeului de intepolare $(\mathcal{G}, \mathcal{D}[a, b], \mathcal{U}_2)$.

Particularizarea convenabilă a procedeelor de interpolare considerate mai sus ne conduce la diferite generalizări ale funcțiilor de ordinul n față de o mulțime de tipul $I_n\{[a, b]\}$. Studiul acestora poate să devină interesant dacă operatorii din mulțimile $\mathcal{U}_1$ și $\mathcal{U}_2$ sînt înzestrați cu proprietăți precizate de continuitate.

Definițiile date se extind și la interpolarea în spații abstracte [2].

OBSERVATIONS CONCERNANT LA NOTION D'ALLURE

RÉSUMÉ

On considère un ensemble $\mathcal{F}$, interpolatoire d'ordre n, $n \leq 1$ sur l'intervalle $[a, b]$ et les fonctions f pour lesquelles la différence (2) garde un signe constant quand on considère tous les systèmes (1) de points de l'intervalle $[a, b]$. Parmi les fonctions qui satisfont cette condition et qui s'appellent fonctions d'ordre n par rapport à l'ensemble $\mathcal{F}$, on distingue les fonctions qui appartiennent à la classe $\mathcal{C}(\mathcal{F}; [a, b])$ de fonctions pour lesquelles on a dans (3) ou bien toujours le signe $>$ ou bien toujours $<$.

Le but du travail est de donner une définition de la notion d'allure.

B I B L I O G R A F I E

[1] M o l d o v a n, E l e n a, *Asupra unei generalizări a noțiunii de convexitate.* Studii și cerc. șt., Seria Mat. (Cluj), **VI**, 3–4, 65–73 (1955).

[2] — *Sur l'interpolation généralisée.* Mathematica (Cluj), **2 (25)**, 143–147 (1960).

[3] P o p o v i c i u, E l e n a, *Sur la notion de convexité par rapport à un procédé d'interpolation.* I.S.M.M., **10** Abstract Spaces and Approximation 321–327 (1969).

[4] P o p o v i c i u, T i b e r i u, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Mathematica (Cluj), **VIII**, 1–85 (1933).

[5] — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (I)* Mathematica (Cluj), **XII**, 81–92 (1936).

[6] T o r n h e i m, L., *An n-Parameter Families of Functions and Associated Convex Functions.* Trans. Amer. Math. Soc., **69**, 457–467 (1950).

Primit la 15. V. 1971.