REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 1, Fascicola 2, 1972, pp. 211–214

ASUPRA HAMILTONEITĂŢII GRAFELOR PRODUS

de

SILVIA TOADER
(Cluj)

Peste tot în această notă, prin graf înţelegem un graf finit, simplu, fără bucle şi neorientat. Noţiunile generale ce intervin sînt definite în [4].

Sînt cunoscute mai multe tipuri de produs a două grafe [3]. În nota de faţă se foloseşte operaţia de compunere a două grafe în sensul definiţiei lui Harary [1].

Definiţia 1. *Compunerea (sau produsul lexicografic)* $G_1[G_2]$ *a două grafe* $G_1 = (X_1, U_1)$ *şi* $G_2 = (X_2, U_2)$ *este un graf care are ca mulţime de vîrfuri* $X_1 \times X_2$, *iar între două vîrfuri* (u_1, v_1), (u_2, v_2) *există o muchie dacă şi numai dacă* $u_1u_2 \in U_1$, *sau* $u_1 = u_2$ *şi* $v_1v_2 \in U_2$.

În [3] s-a făcut observaţia că din definiţia compunerii $G_1[G_2]$, rezultă că are loc

Proprietatea 0. *Graful* $G_1[G_2]$ *este conex dacă şi numai dacă* G_1 *este conex.*

În nota de faţă ne propunem să studiem legătura dintre hamiltoneitatea grafelor $G_1[G_2]$ şi G_1. Vom demonstra că hamiltoneitatea grafului G_1 nu este nici necesară nici suficientă pentru hamiltoneitatea grafului $G_1[G_2]$. De asemenea vom da cîteva condiţii suficiente de hamiltoneitate a grafului $G_1[G_2]$.

Demonstraţia faptului că hamiltoneitatea lui G_1 nu este nici necesară nici suficientă pentru ca $G_1[G_2]$ să fie hamiltonian o facem prin următoarele:

Exemplul 1. Fie $X_1 = \{a, b, c\}$, $U_1 = \{ab, bc\}$, $X_2 = \{x, y\}$, $U_2 = \emptyset$ şi grafele $G_i = (X_i, U_i)$, $i = 1, 2$. Atunci G_1 este hamiltonian dar $G_1[G_2]$, nu.

Exemplul 2. Fie grafele $G_i(X_i, U_i)$, $i = 1, 2$, unde $X_1 = \{a, b, c, d\}$, $U_1 = \{ab, ac, ad\}$, $X_2 = \{x, y\}$ şi $U_2 = \{xy\}$. Graful G_1 nu este hamiltonian dar $G_1[G_2]$ este, avînd drumul hamiltonian ce trece succesiv prin vîrfurile (d, y) (d, x), (a, x), (c, x), (c, y), (a, y), (b, y), (b, x).

În ciuda acestor rezultate negative, are loc

P r o p r i e t a t e a 1. *Dacă graful G_1 este hamiltonian şi are un număr par de vîrfuri, atunci $G_1[G_2]$ este hamiltonian oricare ar fi graful G_2.*

Demonstraţie. Alegem un drum hamiltonian în G_1 şi numerotăm vîrfurile sale în ordinea în care apar în acest drum. Fie $x_1, \ldots, x_{2p}$ aceste vîrfuri, iar $y_1, \ldots, y_q$ vîrfurile lui G_2. Atunci un drum hamiltonian în $G_1[G_2]$ este cel ce uneşte succesiv vîrfurile (x_1, y_1), (x_2, y_1) (x_1, y_2), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_1, y_{q-1}), (x_2, y_{q-1}), (x_1, y_q), (x_2, y_q), (x_3, y_q), (x_4, y_q), (x_3, y_{q-1}), (x_4, y_{q-1}), $\ldots$, (x_3, y_2), (x_4, y_2), (x_3, y_1), (x_4, y_1), (x_5, y_1), (x_6, y_1), (x_5, y_1), (x_6, y_2), ... încheindu-se în (x_{2p}, y_1) dacă p este par, sau în (x_{2p}, y_q) dacă p este impar.

Pentru enunţarea rezultatelor următoare introducem următoarea definiţie:

D e f i n i ţ i a 2. *Numim grad de conexitate al unui vîrf al grafului G, numărul de componente conexe ce se obţin prin scoaterea vîrfului respectiv şi a muchiilor adiacente lui.*

Atunci are loc următoarea proprietate:

P r o p r i e t a t e a 2. *Dacă G_2 este un graf hamiltonian cu $q \geqslant 2$ vîrfuri, iar G_1 un graf conex cu p vîrfuri al căror grad maxim de conexitate este $q+1$, atunci $G_1[G_2]$ este hamiltonian.*

Demonstraţie. Aranjăm vîrfurile grafului compus într-o reţea de p linii şi q coloane, astfel: pe linii, care ca subgrafe ale grafului compus sînt izomorfe cu G_2, aşezăm vîrfurile în ordinea în care apar în drumul hamiltonian, iar pe coloane, care sînt subgrafe izomorfe cu G_1, aşezăm cele p vîrfuri corespunzătoare. Conform proprietăţii 0, graful compus este conex. Atunci, drumul hamiltonian se construieşte folosind următorul algoritm:

1) fie v_1 un vîrf cu gradul de conexitate maxim;

2) se alege o componentă conexă C_1 corespunzătoare lui v_1;

3) fie v_{11} un vîrf din C_1 cu gradul de conexitate (în G_1) maxim; din definiţia gradului de conexitate se deduce că există o singură componentă conexă corespunzătoare lui v_{11} din subgraful determinat de componenta conexă C_1, incidentă cu v_1;

4) se alege o componentă conexă corespunzătoare lui v_{11} din subgraful determinat de C_1, diferită de cea incidentă cu v_1;

5) se continuă acest procedeu, urmărind vîrful cu gradul de conexitate maxim din componentele conexe considerate, pînă se ajunge la un vîrf cu gradul de conexitate minim;

6) se parcurge în $G_1[G_2]$ linia corespunzătoare acestui vîrf;

7) se uneşte ultimul vîrf atins pe linie cu o extremitate a liniei corespunzătoare unui vîrf incident celui considerat la 5);

8) parcurgînd liniile corespunzătoare componentei conexe C_1 din aproape în aproape (în sensul invers în care s-au fixat componentele), se uneşte ultimul vîrf atins pe linie cu un vîrf al liniei corespunzătoare lui v_1;

9) se uneşte acest vîrf cu extremitatea unei linii corespunzătoare unui vîrf incident cu v_1 din altă componentă conexă C_2;

10) se parcurg vîrfurile pe coloană pînă la un vîrf cu gradul de conexitate maxim în subgraful coloană determinat de C_2 (este posibil datorită conexităţii lui C_2);

11) se repetă paşii 2—9 pentru vîrful considerat la 10), şi aşa mai departe;

12) epuizînd liniile corespunzătoare unei componente conexe a lui v_1, ne întoarcem de fiecare dată la linia lui v_1 atingînd succesiv vîrfurile drumului hamiltonian existent pe linie şi întorcîndu-ne la liniile unei componente conexe neparcursă.

Se observă că în fiecare punct cu gradul de conexitate cel puţin 3 se aplică algoritmul indicat pentru v_1.

Se demonstrează uşor

P r o p r i e t a t e a 3. *Dacă grafele G_1 şi G_2 sînt hamiltoniene, atunci graful compus $G_1[G_2]$ este hamiltonian conex (adică orice două vîrfuri pot fi unite printr-un drum hamiltonian) şi are un circuit hamiltonian.*

O b s e r v a ţ i e. Deşi peste tot am folosit hamiltoneitatea unuia din grafele G_1 sau G_2, acest lucru nu este necesar. Mai mult, G_2 poate să fie disconex după cum arată următorul exemplu:

Exemplul 3. Fie grafele $G_i = (X_i, U_i)$ $(i = 1, 2)$, unde $X_1 = \{a, b, c, d\}$, $U_1 = \{ab, ac, ad\}$ şi $X_2 = \{x, y, z, u, v\}$, $U_2 = \{xy, yz, zu\}$. Atunci grafele G_1 şi G_2 nu sînt hamiltoniene, G_2 nu este conex, dar $G_1[G_2]$ este hamiltonian avînd drumul hamiltonian: (d, v), (a, v), (c, v), (a, u), (b, v), (a, z), (d, u), (d, z), (d, y), (d, x), (a, x), (c, x), (c, y), (c, z), (c, u), (a, y), (b, x), (b, y), (b, z), (b, u).

ON THE PROPERTY TO BE HAMILTONIAN OF THE PRODUCT GRAPHS

ABSTRACT

In this note are given sufficient conditions for the graph G_1 $[G_2]$ obtained by the composition operation, to be Hamiltonian. As there is shown by examples, the condition that G_1 is Hamiltonian is neither necessary nor sufficient for the graph G_1 $[G_2]$ to be Hamiltonian. There are de-

monstrated the properties: 1) if G_2 is a Hamiltonian graph with q vertices, G_1 is a connected graph with p vertices and the connected degree is at most $q + 1$, then the graph $G_1 [G_2]$ is Hamiltonian.

2) if G_1 and G_2 are Hamiltonian graphs, then $G_1[G_2]$ is Hamiltonian connected.

BIBLIOGRAFIE

[1] Harary, F., *On the group of the composition of two graphs.* Duke Math. J., **26**, 29–34 (1959).

[2] Ore, O., *Hamilton connected graphs.* J. de Math. Pures et Appliquées, **42**, *1*, 21–27 (1963).

[3] Harary, F., Gordon W. Wilcox, *Boolean operations on graphs.* Math. Scandinavica, **20**, *1*, 41–51 (1967).

[4] Berge, C., *Théorie des graphes et ses applications.* Dunod, Paris (1958).

Primit la 18. II. 1972.

Academia Republicii Socialiste România
Filiala din Cluj
Institutul de calcul