REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 2, Fascicola 2, 1973, pp. 137–141

MULŢIMI FOARTE NEPROXIMINALE ÎN c_0

de

ŞTEFAN COBZAŞ
(Cluj)

Fie X un spaţiu liniar şi normat, S o submulţime a lui X şi x un element oarecare din X. Numim element de cea mai bună aproximare a lui x prin elemente din S, un element $s_0 \in S$ astfel că:

$$\|x - s_0\| = \inf\{\|x - s\| : s \in S\}. \tag{1}$$

Uneori vom nota $d(x, S) = \inf\{\|x - s\| : s \in S\}$. Spunem că mulţimea S este *foarte neproximinală* dacă nici un element din $X \setminus S$ nu are un element de cea mai bună aproximare în S (vezi [8, *p*. 348]). Pentru o mulţime $S \subseteq X$ vom nota cu Prox (S) mulţimea elementelor din $X \setminus S$ care au un element de cea mai bună aproximare în S. În această notă ne vom ocupa de mulţimile convexe foarte neproximinale din c_0.

Dacă teoria celei mai bune aproximări în spaţii normate prin elemente din subspaţii liniare este destul de bine pusă la punct, se cunosc mult mai puţine lucruri despre cea mai bună aproximare prin elemente din mulţimi convexe. Vom prezenta pe scurt cîteva rezultate obţinute în această direcţie de M. Edelstein. În [2] M. Edelstein a demonstrat că dacă X este un spaţiu Banach uniform convex şi S este o submulţime închisă a lui X, atunci Prox (S) este densă în $X \setminus S$. În [3] se arată că dacă X este un spaţiu Banach separabil şi conjugat (adică $X = E^*$, pentru un E spaţiu liniar şi normat), atunci pentru orice număr real $d \geqslant 0$ există un $x \in X$ şi un $s_0 \in S$ astfel ca $d = \|x - s_0\| = d(x, S)$. Se pune problema ce se întîmplă dacă renunţăm la condiţia ca X să fie un spaţiu conjugat. Luînd $X = c_0$, spaţiul şirurilor de numere reale convergente către zero, cu norma definită prin:

$$\|x\| = \max\{|x(i)| : i \in N\} \tag{2}$$

pentru orice $x = \{x(i)\}_{i \in N} \in c_0$ (cu N am notat mulţimea numerelor naturale), M. EDELSTEIN şi A. C. THOMPSON arată în [4] că există în c_0 un corp convex mărginit, închis şi simetric S, astfel că Prox $(S) = \emptyset$. (Prin corp convex înțelegem o mulțime convexă avînd cel puțin un punct interior). Aceasta ne arată că c_0 este de tip N_2 în clasificarea dată de V. Klee [5], adică un spațiu liniar și normat în care există o mulțime convexă și mărginită care este foarte neproximinală. M. Edelstein arată că se poate construi un corp convex foarte neproximinal care să fie strict convex, și pune problema dacă se poate găsi un corp convex, închis, mărginit, simetric, local uniform convex și foarte neproximinal. (Spunem după A. R. LOVAGLIA [6] că un spațiu normat este local uniform convex, dacă $x_n, x \in X$, $||x_n|| = ||x|| = 1$ și $||x_n + x|| \to 2$, implică $x_n \to x$). Vom răspunde pozitiv la această întrebare.

Folosim notațiile din [3]. Notăm cu δ_i, $i \in N$ funcționalele liniare și continue pe c_0 definite prin:

$$\delta_i(x) = x(i), \quad x \in x_0; \tag{3}$$

cu g_i, $i \in N$, funcționalele liniare și continue definite prin

$$g_i(x) = x(i) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1} x(2^{i-1}(2k+1)). \tag{4}$$

Considerăm operatorul liniar $A: c_0 \to c_0$, definit prin

$$Ax(i) = g_i(x), \quad i \in N, \quad x \in c_0. \tag{5}$$

În [4] se arată că A este un izomorfism topologic al lui c_0 pe c_0, și adjunctul său A^*, care va fi un izomorfism topologic al lui $c_0^* = l_1$ pe c^*, verifică relația

$$A^*\delta_i = g_i, \quad i \in N. \tag{6}$$

Cu l_1 am notat ca de obicei spațiul șirurilor de numere reale absolut sumabile cu norma

$$||x|| = \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|, \quad x \in l_1. \tag{7}$$

M. DAY [1] a construit o normă pe c_0, echivalentă cu (2), în felul următor: pentru orice $x \in c_0$ se rearanjează șirul $\{x(i)\}$ astfel ca

$$|x(i_1)| \geqslant |x(i_2)| \geqslant \ldots$$

Norma se definește prin

$$p(x) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} (2^{-j} x(i_j))^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

J. RAINWATER [7] a arătat că p este o normă local uniform convexă.

Putem enunța acum rezultatul nostru.

TEOREMA. *Există în c_0 un corp convex, mărginit, închis, simetric și local uniform convex care este foarte neproximinal.*

D e m o n s t r a ț i e. Fie p norma lui Day dată de (8) și $A: c_0 \to c_0$ izomorfismul definit de (5). Definim

$$q(x) = p(Ax), \quad x \in c_0. \tag{9}$$

Deoarece A este un izomorfism topologic, q este o normă pe c_0 echivalentă cu p, deci și cu (2). Să arătăm că q este local uniform convexă. Fie x_n, $x \in c_0$, $q(x_n) = q(x) = 1$ și $q(x_n + x) \to 2$. Rezultă $p(Ax_n) = p(Ax) = 1$ și $p(A)x_n + + x)) = p(Ax_n + Ax) \to 2$. Deoarece p este local uniform convexă rezultă $Ax_n \to Ax$, și A fiind un izomorfism topologic, rezultă $x_n \to x$.

Fie

$$S = \{x \in c_0 : q(x) \leqslant 1\}. \tag{10}$$

Deoarece q este o normă pe c_0 echivalentă cu (2), S va fi un corp convex, mărginit, închis și simetric. În plus, după cum am arătat S este și local uniform convex.

Vom arăta acum că S este foarte neproximinal. Să presupunem că ar exista un $x \in X$, $q(x) > 1$ și $s_0 \in S$ astfel că

$$||x - s_0|| = \inf\{||x - s|| : s \in S\}.$$

Din definiția normei lui Day, rezultă că există o bijecție $\sigma: N \to N$ astfel ca

$$|g_{\sigma(i)}(s_0)| \geqslant |g_{\sigma(i+1)}(s_0)|, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

și

$$q(s_0) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (2^{-i} g_{\sigma(i)}(s_0))^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Facem următoarea observație privind bijecțiile $\sigma: N \to N$:

(*) *Nu se poate ca pentru doi indici i diferiți să aibă loc relația*

$$\exists k_0 \forall k > k_0 \quad \sigma(2^i(2k+1)) \leqslant k. \tag{11}$$

Să presupunem contrariul. Atunci vor exista doi indici diferiți $i, j \in N$, $i \neq j$ și va exista un $k_0 \in N$ astfel ca

$$\sigma(2^i(2k+1)) \leqslant k \text{ și } \sigma(2^j(2k+1)) \leqslant k, \; k > k_0.$$

Fie $m > k_0$ și $k = k_0 + m$. Atunci

$$\sigma(2^i(2t+1)) \leqslant t \leqslant k \text{ și } \sigma(2^j(2t+1)) \leqslant t \leqslant k, \quad k_0 < t \leqslant k.$$

Dar mulțimea $M = \{2^i(2t+1),\ 2^j(2t+1) : t = k_0 + 1, \ldots, k_0 + m\}$ conține $2m$ termeni, iar mulțimea $N_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ conține $k = k_0 + m < 2m$ termeni. Deoarece $\sigma(M) \subseteq N_k$ rezultă că aplicația σ nu poate fi bijectivă. Afirmația (*) este demonstrată.

Pe baza acestei afirmații, demonstrația teoremei este analogă cu demonstrația din §3 (ii) [4]. Dacă un singur $g_i(s_0)$ este nenul putem defini bijecția σ prin $\sigma(k) = k + 1$, pentru $k = 1, 2, \ldots, i-1$, $\sigma(i) = 1$ și $\sigma(k) = k$ pentru $k < i$. Dacă există cel puțin doi indici i astfel ca $g_j(s_0) \neq 0$, alegem pe i astfel ca relația (11) să nu fie satisfăcută pentru $i - 1$. Fie $n = 2^{i-1}(2k+1)$, $\varepsilon > 0$ și

$$s_0' = (s_0(1),\ s_0(2), \ldots, s_0(n) - \varepsilon, \ldots).$$

Atunci $g_j(s_0) = g_j(s_0')$ pentru $j \neq i$, $j \neq n$ și

$$g_n(s_0')^2 - g_n(s_0)^2 = \varepsilon^2 - 2\varepsilon g_n(s_0).$$

$$g_i(s_0')^2 - g_i(s_0)^2 = \varepsilon^2 2^{-2k-2} - 2^{-k}\varepsilon g_i(s_0).$$

Deci

$$q(s_0')^2 - q(s_0)^2 = 2^{-2\sigma(n)}\varepsilon^2 + 2^{-2\sigma(i)-2k-2}\varepsilon^2 - \varepsilon 2^{-2\sigma(n)+1} g_n(s_0) - \varepsilon 2^{-2\sigma(i)-k} g_i(s_0). \tag{12}$$

Fără a restrînge generalitatea (luînd eventual $\varepsilon < 0$) putem presupune $g_i(s_0) > 0$.

Fie acum ε ales astfel ca $2\varepsilon < \max\{\|x - s_0\|, \|s_0\|\}$ și k suficient de mare astfel ca:

(i) $\sigma(2^{i-1}(2k+1)) \geqslant k$

(ii) $2^{-k}\varepsilon + 2^{-2\sigma(i)-k-2}\varepsilon + 2^{-k+1}|g_n(s_0)| < 2^{-2\sigma(i)} g_i(s_0)$

(iii) $|x(n) - s_0(n)| < \frac{1}{2}\|x - s_0\|$, $|s_0(n)| < \frac{1}{2}\|s_0\|$.

Atunci din (12), (i) și (ii) avem

$$q(s_0')^2 - q(s_0)^2 \leqslant 2^{-2k}\varepsilon^2 + 2^{-2\sigma(i)-2k-2}\varepsilon^2 + \varepsilon|g_n(s_0)|2^{-2k+1} - 2^{-2\sigma(i)-k}\varepsilon g_i(s_0) =$$

$$= 2^{-k}\varepsilon[2^{-k}\varepsilon + 2^{-2\sigma(i)-k-2}\varepsilon + 2^{-k+1}|g_n(s_0)| - 2^{-2\sigma(i)}g_i(s_0)] < 0.$$

Deci $q(s_0') < q(s_0) = 1$ și din (iii) $\|x - s_0'\| = \|x - s_0\| = d(x, S)$. Dar acest lucru este imposibil deoarece x nu poate avea ca element de cea mai bună aproximare un punct interior lui S. Teorema este demonstrată.

VERY NON-PROXIMINAL SETS IN c_0

SUMMARY

It is proved that in the Banach space c_0 there is a bounded, closed, symmetric, locally uniformly convex and convex body, without nearest points, giving so a positive answer to a question of M. EDELSTEIN and A. C. THOMPSON [4].

BIBLIOGRAFIE

[1] Day, M. *Strict convexity and smoothness of normed spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **78**, 516–528, (1955).
[2] Edelstein, M. *On nearest points of sets in uniformly convex Banach spaces*, J. London Math. Soc., **43**, 375–377, (1968).
[3] — *A note on nearest points*, Quarterly J. Math. (**2**), 21, 403–405, (1970).
[4] — and A. C. Thompson, *Some results on nearest points and support properties of convex sets in c_0*, Pacific J. Math., **40**, 553–560, (1972).
[5] Klee, V. *Remarks on nearest points in normed linear spaces*, Proc. Colloquium on Convexity, Copenhagen, 168–176, (1965).
[6] Lovaglia, A. R. *Locally uniformly convex Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **78**, 225–238, (1955).
[7] Rainwater, J. *Local uniform convexity of Day's norm on c_0 (Γ)*, Proc. Amer. Math. Soc., **22**, 335–339, (1969).
[8] Singer, I. *Cea mai bună aproximare în spații normate prin elemente din subspații liniare*, Ed. Academiei, București, 1967.

Primit la 22. III. 1973.

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România