REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMATIEI
Volumul 3, Fascicola 2, 1974, pp. 153—160

# O PROPRIETATE DE MONOTONIE A OPERATORULUI DE CEA MAI BUNĂ APROXIMARE, ÎN SPAŢIUL FUNCŢIILOR LIPSCHITZIENE

de

COSTICĂ MUSTĂŢA

(Cluj)

**1.** Fie $(X,d)$ un spaţiu metric liniar real, cu metrica $d$ invariantă la translaţii şi următoarele mulţimi de funcţii definite pe $X$, ([4], [5]):

$$X_0^{\#} = \{f \mid f: X \to R,\ \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in X}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} < \infty,\ f(\theta) = 0\}, \tag{1}$$

$$C_X = \{f \mid f: X \to R,\ \sup_{\substack{x \neq \theta \\ x \in X}} \frac{|f(x)|}{d(x,\theta)} < \infty,\ f(\theta) = 0 \text{ şi pentru} \tag{2}$$

$$\text{orice } x, y \in X,\ f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)\}.$$

Mulţimea $X_0^{\#}$ se poate înzestra cu o structură de spaţiu vectorial real, în mod obişnuit.

Fie $Y$ un subspaţiu liniar nenul al lui $X$. Definim funcţionala $\|\cdot\|_Y$: $X_0^{\#} \to R$ prin

$$\|f\|_Y = \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in Y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)},\ f \in X_0^{\#}, \tag{3}$$

care, în particular, pentru $Y = X$ este o normă pe $X_0^{\#}$ şi spaţiul normat $(X_0^{\#}, \|\cdot\|_X)$ este izomorf şi izometric cu dualul unui spaţiu Banach ([1], [3]).

Are loc următoarea lemă:

Lema 1. *Mulţimea $C_X$ este un con convex din $X_0^{\#}$. Dacă $f$ este un element din $C_X$, atunci*

(4) $$\sup_{\substack{x \neq \theta \\ x \in X}} \frac{|f(x)|}{d(x,\theta)} = ||f||_X.$$

*Demonstraţie*. Faptul că mulţimea $C_X$ este un con convex este demonstrat în [5]. Să arătăm că $C_X \subset X_0^{\#}$. Fie $f \in C_X$. Atunci, pentru orice $x \in X$, $x \neq \theta$ avem:

$$\frac{|f(x)|}{d(x,\theta)} \leqq \sup_{\substack{x \neq \theta \\ x \in X}} \frac{|f(x)|}{d(x,\theta)} = M(f) < \infty$$

adică $|f(x)| \leqq M(f) \cdot d(x,\theta)$. Deoarece $f(x+y) \leqq f(x) + f(y)$ şi metrica $d$ este invariantă la translaţii avem:

$$f(x) - f(y) \leqq f(x-y) \leqq |f(x-y)| \leqq M(f) \cdot d(x-y,\theta) = M(f) \cdot d(x,y)$$

şi

$$f(x) - f(y) \geqq -f(y-x) \geqq -|f(y-x)| \geqq -M(f) \cdot d(x,y)$$

de unde deducem că $|f(x) - f(y)| \leqq M(f) \cdot d(x,y)$, de unde, pentru $x \neq y$ avem

$$||f||_X = \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in X}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} \leqq M(f)$$

adică $f \in X_0^{\#}$ şi în plus $||f||_X \leqq \sup\limits_{\substack{x \neq \theta \\ x \in X}} \frac{|f(x)|}{d(x,\theta)}$.

Pe de altă parte, pentru orice $x \in X$, $x \neq \theta$ avem

$$\sup_{\substack{x \neq \theta \\ x \in X}} \frac{|f(x)|}{d(x,\theta)} = \sup_{\substack{x \neq \theta \\ x \in X}} \frac{|f(x) - f(\theta)|}{d(x,\theta)} \leqq \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in X}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = ||f||_X$$

şi lema este demonstrată.

2. Vom nota

(5) $$X_0^s = C_X - C_X,$$

spaţiul generat de conul convex $C_X$, iar dacă $Y$ este un subspaţiu liniar nenul al lui $X$ şi $f \in X_0^{\#}$ vom nota cu $f|_Y$ restricţia lui $f$ pe subspaţiul $Y$ şi

(6) $$Y^{\perp}_{X_0^{\#}} = \{f | f \in X_0^{\#},\ f|_Y = 0\},$$

(7) $$Y^{\perp}_{X_0^s} = \{f | f \in X_0^s,\ f|_Y = 0\}.$$

Deoarece $X_0^s \subset X_0^{\#}$ rezultă că $Y^{\perp}_{X_0^s} \subset Y^{\perp}_{X_0^{\#}}$.

În lucrarea [5] este demonstrată următoarea teoremă:



TEOREMA 1. *Fie $Y$ un subspaţiu nenul al lui $X$ şi $f \in X_0^{\#}$. Atunci, pentru $f|_Y$ există $F \in X_0^{\#}$ astfel ca*

a) $f|_Y = F|_Y$

b) $||f||_Y = ||F||_X$.

Două dintre funcţiile care verifică proprietăţile a) şi b) (vezi [2]) sînt:

(8) $$F_i = \inf_{y \in Y} [f(y) + ||f||_Y \cdot d(\cdot, y)],$$
$$F_s = \sup_{y \in Y} [f(y) - ||f||_Y\, d(\cdot, y)].$$

Pentru $f \in X_0^{\#}$ şi $Y$ subspaţiu nenul al lui $X$, vom nota

(9) $$P_L^Y(f) = \{F | F \in X_0^{\#},\ f|_Y = F|_Y \text{ şi } ||f||_Y = ||F||_X\}.$$

L e m a 2. *Fie $f \in X_0^{\#}$ şi $Y$ subspaţiu nenul al lui $X$. Atunci oricare ar fi $F \in P_L^Y(f)$ au loc inegalităţile:*

(10) $$F_s(x) \leqq F(x) \leqq F_i(x) \text{ pentru orice } x \in X.$$

*Demonstraţie*. Fie $F \in P_L^Y(f)$

Vom arăta că $F(x) \leqq F_i(x)$, pentru orice $x \in X$.

Să presupunem contrariul, adică că există $x_0 \in X$ astfel ca $F(x_0) > F_i(x_0)$. Dacă $x_0 \in Y$ atunci, deoarece $F|_Y = F_i|_Y = f|_Y$ rezultă că $F(x_0) = F_i(x_0)$, deci avem o contradicţie. Dacă $x_0 \in \overline{Y}$, aplicînd Teorema 45 din [7] pag. 104 deducem că $F_i(x_0) = F(x_0)$, din nou contradicţie.

Fie $x_0 \in X - \overline{Y}$, aceasta înseamnă că oarecare ar fi $y \in Y$, $d(x_0, y) > 0$. Dacă $F_i(x_0) < F(x_0)$, atunci există $y_0 \in \overline{Y}$ astfel ca

$$f(y_0) + ||f||_Y\, d(x_0, y_0) < F(x_0)$$

de unde deducem că

$$\frac{f(y_0) - F(x_0)}{d(x_0,y_0)} < -||f||_Y$$

sau

$$\frac{F(y_0) - F(x_0)}{d(x_0,y_0)} < -||f||_Y$$

Pe de altă parte $||F||_X = \sup\limits_{\substack{x \neq y \\ x,y \in X}} \frac{|F(x) - F(y)|}{d(x,y)} \geqq \frac{|F(y_0) - F(x_0)|}{d(x_0,y_0)} \geqq \frac{F(x_0) - F(y_0)}{d(x_0,y_0)}$, de unde deducem că

$$-\,||F||_X \leqslant \frac{F(y_0) - F(x_0)}{d(x_0,y_0)} < -\,||f||_Y$$

adică $||F||_X > ||f||_Y$, ceeace contrazice (9).
Analog se arată că $F_s(x) \leqq F(x)$ pentru orice $x \in X$ şi lema e demonstrată.

L e m a 3. *Fie $Y$ un subspaţiu liniar nenul al lui $X$ şi $f \in C_X$, Atunci, pentru $f|_Y$ există $F \in C_X$ astfel ca*

a') $f|_Y = F|_Y$

b') $||f||_Y = ||F||_X$

*Demonstraţie*. Deoarece $C_X \subset X_0^{\#}$ (conform lemei 1) rezultă că pentru $f|_Y$ există cel puţin o prelungire cu proprietăţile $a'$) şi b') (conform Teoremei 1). Să arătăm că există cel puţin o prelungire care este chiar din $C_X$. Intradevăr

$$F_i = \inf_{y \in Y} [f(y) + ||f||_Y \cdot d(.,\, y)]$$

este din $C_X$; pentru orice $x_1,\ x_2 \in X$ şi orice $y_1,\ y_2 \in Y$ avem

$$\begin{aligned} F(x_1 + x_2) &\leqq f(y_1 + y_2) + ||f||_Y \cdot d(x_1 + x_2,\, y_1 + y_2) \leqq \\ & f(y_1) + f(y_2) + ||f||_Y \cdot d(x_1 - y_1,\, y_2 - x_2) \leqq \\ & f(y_1) + f(y_2) + ||f||_Y \cdot (d(x_1 - y_1,\, \theta) + d(\theta, y_2 - x_2)) = \\ & f(y_1) + f(y_2) + ||f||_Y \cdot d(x_1, y_1) + ||f||_Y \cdot d(x_2, y_2), \end{aligned}$$

de unde deducem că

$$F(x_1 + x_2) \leqq F(x_1) + F(x_2).$$

Pentru $f \in X_0^{\#}$ şi $Y$ subspaţiu liniar nenul al lui $X$ vom nota

(11) $$P_S^Y(f) = \{F \mid F \in C_X,\ f|_Y = F|_Y \text{ şi } ||F||_X = ||f||_Y\}.$$

Dacă $f \in C_X$, atunci cu siguranţă că $P_S^Y(f) \neq \emptyset$

În plus, din demonstraţia Lemei 3, se vede că este suficient ca restricţia $f|_Y$ a lui $f \in X_0^{\#}$ să fie subaditivă pe $Y$ şi atunci $P_S^Y(f) \neq \emptyset$. De asemeni avem

(12) $$P_S^Y(f) \subset P_L^Y(f).$$

3. Fie $G$ un subspaţiu liniar nenul al lui $X_0^{\#}$ şi $f \in X_0^{\#}$
Vom nota

(13) $$\inf_{g \in G} ||f - g||_X = d(f, G).$$



Dacă pentru orice $f \in X_0^{\#}$, infimumul din (13) este atins vom spune că $G$ este un subspaţiu proximinal al lui $X_0^{\#}$; dacă $G$ este un subspaţiu proximinal numai pentru elementele unei anumite submulţimi $V$ a lui $X$, vom spune că $G$ este $V$-proximinal. Un element $g \in G$, pentru care infimumul din (13) este atins se numeşte element de cea mai bună aproximare a lui $f$ prin elementele lui $G$.

L e m a 4. *Fie $Y$ un subspaţiu liniar nenul al lui $X$ şi $f \in C_X$. Atunci are loc egalitatea:*

(14) $$d(f, Y^{\perp}_{X_0^{\#}}) = d(f, Y^{\perp}_{X_0^s}).$$

*Demonstraţie*. Dacă $f \in C_X$, atunci oricare ar fi $g \in Y^{\perp}_{X_0^s}$ avem:

$$||f||_Y = \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in Y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in Y}} \frac{|(f-g)(x) - (f-g)(y)|}{d(x,y)} \leqq$$

$$\sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in X}} \frac{|(f-g)(x) - (f-g)(y)|}{d(x,y)} = ||f - g||_X,$$

de unde deducem că

$$||f||_Y \leqq \inf_{g \in Y^{\perp}_{X_0^s}} ||f - g||_X = d(f, Y^{\perp}_{X_0^s}).$$

Pe de altă parte, conform Lemei 3, avem

$$||f||_Y = ||f - (f - F)||_X \geqq \inf_{g \in Y^{\perp}_{X_0^s}} ||f - g||_X = d(f, Y^{\perp}_{X_0^s}),$$

unde $F$ verifică proprietăţile $a'$) şi b') din Lema 3. Un raţionament cu totul analog, folosind teorema 1, conduce la $||f||_Y = d(f, Y^{\perp}_{X_0^{\#}})$ şi lema este demonstrată.

Pentru $Y$ subspaţiu liniar nenul al lui $X$ şi $f \in C_X$, vom nota cu $A_{Y^{\perp}_{X_0^{\#}}}(f)$ şi $A_{Y^{\perp}_{X_0^s}}(f)$ mulţimile elementelor de cea mai bună aproximaţie ale lui $f$ prin elementele subspaţiilor $Y^{\perp}_{X_0^{\#}}$ şi $Y^{\perp}_{X_0^s}$, respectiv.

L e m a 5. *Fie $Y$ un subspaţiu liniar nenul al lui $X$. Atunci subspaţiile $Y^{\perp}_{X_0^{\#}}$ şi $Y^{\perp}_{X_0^s}$ sînt $C_X$ — proximinale. In plus dacă $f \in C_X$, atunci oricare ar fi $g \in A_{Y^{\perp}_{X_0^s}}(f)$, $g$ este de forma $g = f - F$ cu $F \in P_S^Y$ (f) şi oricare ar fi $h \in A_{Y^{\perp}_{X_0^{\#}}}(f)$, $h = f - F$ cu $F \in P_L^Y(f)$.*

*Demonstraţie.* Fie $f \in C_X$. Atunci, din Lema 4 deducem că

$$||f||_Y = ||f - (f - F)||_X = d(f, Y^{\perp}_{X_0^s}) = d(f, Y^{\perp}_{X_0^{\#}}).$$

şi deoarece $f - F \in Y^{\perp}_{X_0^s} \subset Y^{\perp}_{X_0^{\#}}$, rezultă că cele două subspaţii sînt $C_X$— proximinale.

Să presupunem acum că $g \in A_{Y^{\perp}_{X_0^s}}(f)$. Atunci avem

$$||f - g||_X = d(f, Y^{\perp}_{X_0^s}) = ||f||_Y$$

şi

$$f|_Y = (f - g)|_Y$$

ceea ce înseamnă că $f - g$ verifică proprietăţile $a'$) şi $b'$) din Lema 3, deci $f - g = F$, $F \in P_S^Y(f)$ de unde $g = f - F$.

La fel se arată că dacă $h \in A_{Y^{\perp}_{X_0^{\#}}}(f)$, atunci $h = f - F$ cu $F \in P_L^Y(f)$. Pentru aceasta se foloseşte Teorema 1.

TEOREMA 2. *Fie $Y$ un subspaţiu nenul al lui $X$ şi $f \in C_X$. Atunci*

$$A_{Y^{\perp}_{X_0^s}}(f) \subset A_{Y^{\perp}_{X_0^{\#}}}(f). \tag{15}$$

*Demonstraţie.* Dacă $f \in C_X$ atunci are loc inclusiunea

$$P_S^Y(f) \subset P_L^Y(f),$$

şi folosind Lema 5 se deduce (15).

3. Fie acum $(X, |||\cdot|||)$, un spaţiu p-normat real ($p \in (0,1]$) ([5], [6]). Pe $X$ definim aceleaşi mulţimi de funcţii $X_0^{\#}$ şi $C_X$, adică

$$X_0^{\#} = \{f: X \to R,\ \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in X}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|||x - y|||} < \infty,\ f(\theta) = 0\}.$$

$$C_X = \{f: X \to R,\ \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in X}} \frac{|f(x)|}{|||x|||} < \infty,\ f(\theta) = 0 \text{ şi pentru orice } x, y \in X,$$

$$f(x + y) < f(x) + f(y)\}.$$

şi în plus, conul

$$C_X^p = \{f |\ f \in C_X,\ \forall \lambda \in R,\ f(\lambda x) = |\lambda|^p \cdot f(x)\}. \tag{16}$$

Conul $C_X^p$ este numit de W. RUESS ([6]), conul p-seminormelor continue pe spaţiul p-normat $(X, |||\cdot|||)$.



Cu $X_0^{sp} = C_X^p - C_X^p$ vom nota spaţiul generat de conul $C_X^p$, iar dacă $Y$ este un subspaţiu liniar nenul al lui $(X, |||\cdot|||)$ punem

$$Y^{\perp}_{X_0^{sp}} = \{f |\ f \in X_0^{sp},\ f|_Y = 0\}. \tag{17}$$

Lema 6. *Fie $Y$ un subspaţiu liniar nenul al lui $(X, |||\cdot|||)$ şi $f \in C_X^p$. Atunci, pentru $f|_Y$ există $F \in C_X^p$ astfel ca*

a'') $$f|_Y = F|_Y$$

b'') $$||f||_Y = ||f||_X.$$

*Demonstraţie.* Deoarece $C_X^p \subset C_X \subset X_0^{\#}$, existenţa unui $F \in C_X$ cu proprietăţile a''), $b''$) este asigurată prin Lema 3, care rămîne evident adevărată pentru cazul cînd $(X, |||\cdot|||)$ este un spaţiu $p$-normat. Mai mult

$$F_i = \inf\ [f(y) + ||f||_Y \cdot |||\cdot - y|||]$$

este chiar din $C_X^p$. Intr-adevăr

$$F_i(\lambda x) = \inf_{y \in Y} [f(y) + ||f||_Y \cdot |||\lambda x - y|||] =$$

$$= \inf_{y \in Y} [f(\lambda y) + ||f||_Y \cdot |||\lambda x - \lambda y|||] =$$

$$= \inf_{y \in Y} [|\lambda|^p f(y) + ||f||_Y \cdot |\lambda|^p \cdot |||x - y|||] =$$

$$= |\lambda|^p \cdot \inf_{y \in Y} [f(y) + ||f||_Y \cdot |||x - y|||] = |\lambda|^p F_i(x)$$

şi lema e demonstrată.

Evident, avem:

$$Y^{\perp}_{X_0^{sp}} \subset Y^{\perp}_{X_0^s} \subset Y^{\perp}_{X_0^{\#}} \tag{18}$$

deoarece $X_0^{sp} \subset X_0^s \subset X_0^{\#}$.

Are loc următoarea teoremă:

TEOREMA 3. Fie $Y$ un subspaţiu liniar nenul al spaţiului p-normat $(X, |||\cdot|||)$ şi $f \in C_X^p$. Atunci

$$A_{Y^{\perp}_{X_0^{sp}}}(f) \subset A_{Y^{\perp}_{X_0^s}}(f) \subset A_{Y^{\perp}_{X_0^{\#}}}(f). \tag{19}$$

*Demonstraţie.* Este analogă cu demonstraţia teoremei 2.

# A MONOTONY PROPERTY OF THE OPERATOR OF BEST APPROXIMATION IN THE SPACE OF LIPSCHITZ FUNCTIONS


SUMMARY

In the normed space of Lipschitz functions are given subspace $Y_1$, $Y_2$ and a convex cone $C$, such that $Y_1 \subset Y_2$ implies $A_{Y_1}(f) \subset A_{Y_2}(f)$, for every function $f \in C$, where $A_{Y_1}(f)$ and $A_{Y_2}(f)$ are the sets of best approximation of $f$ by elements of $Y_1$ and respectively $Y_2$.


## BIBLIOGRAFIE


[1] Arens, R. F., Eells, J. Jr., *On embedding uniform and topological spaces.* Pacific J. of Math., **6**, *3*, 397–405 (1956).

[2] Czipser, J., Gehér, L., *Extension of functions satisfiyng a Lipschitz condition.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar, **6**, 213–220 (1955).

[3] Johnson, J. A., *Banach spaces of Lipschitz functions and vector-valued Lipschitz functions.* Trans. Amer. Math. Soc., **148**, *1*, 147–171 (1970).

[4] Mustăţa, C., *Asupra unor subspaţii cebişeviene din spaţiul normat al funcţiilor lipschitziene.* Revista de de analiză numerică şi teoria aproximaţiei, **2**, *1*, 81–87 (1973).

[5] Pantelidis, G., *Approximationstheorie für metrische lineare Räume.* Math. Ann., **184**, 30–48 (1969).

[6] Ruess, W., *Ein Dualkegel für p-konvexe topologische lineare Räume.* Gesellschaft für Math. und Datenverarbeitung, Bonn, **60**, (1972).

[7] Schwartz, L., *Analiz. I*, Moskva, (1972).



*Institutul de calcul din Cluj*
*al Academiei Republicii Socialiste România*


Primit la 17. XI. 1974.