REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola 2, 1974, pp. 209—213

NOTĂ PRIVIND DIVIZORII VALORILOR FUNCŢIILOR ARITMETICE OMOGENE

de

IOAN ŞERB

(Cluj)

Fie N mulţimea numerelor naturale. Conform unui rezultat bine cunoscut (vezi de exemplu [1]) orice număr natural admite o descompunere unică în factori primi, abstracţie făcînd de ordinea factorilor.

Fie $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ descompunerea în factori primi a numărului natural n şi fie $n^* = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. Se consideră funcţiile:

$$f_i : \mathop{\times}_{j=1}^{m} N \to N, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad n \geqq 2.$$

şi se presupune că există $q_i \in N$, $i = 1, 2, \ldots, n$, astfel încît:

$$(1) \qquad f_i(kx_1, kx_2, \ldots, kx_m) = k^{q_i} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

oricare ar fi $k, x_1, x_2, \ldots, x_m \in N$, adică f_i este omogenă de ordinul q_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Obiectul acestei note este să se determine toate sistemele $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ de numere naturale pentru care au loc simultan relaţiile:

$$(2) \quad (f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m))^* = (f_j(x_1, x_2, \ldots, x_m))^*, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j.$$

Se notează cu $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ (sau pentru prescurtare cu Δ) cel mai mare divizor comun al numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

TEOREMA 1. *Dacă sistemul* $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ *de numere naturale verifică relaţiile* (2) *atunci există numerele* $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$, $k \in N$ *astfel încît*

$$(3) \qquad (x'_1, x'_2, \ldots, x'_m) = 1 \qquad \text{şi}$$

$$(4) \qquad x_i = x'_i \frac{\left(\dfrac{f'_1 \cdot f'_2 \cdot \ldots \cdot f'_n}{(f'_1, f'_2, \ldots, f'_n)^n}\right)^*}{\left(\left(\dfrac{f'_1 \cdot f'_2 \cdot \ldots \cdot f'_n}{(f'_1, f'_2, \ldots, f'_n)^n}\right)^*, (f'_1, f'_2, \ldots, f'_n)\right)} k, \; i = 1, 2, \ldots, m,$$

unde $f'_i = f_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstraţie. Fie $x'_i = \dfrac{x_i}{\Delta}$, $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$(5) \qquad f'_j = f_j(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m), \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

şi

$$(6) \qquad \Delta' = (f'_1, f'_2, \ldots, f'_n).$$

Atunci din (1) rezultă:

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \Delta^{q_i} f'_i = \Delta^{q_i} \cdot \Delta' \frac{f'_i}{\Delta'}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Deoarece:

$$\left(\frac{f'_1}{\Delta'}, \frac{f'_2}{\Delta'}, \ldots, \frac{f'_n}{\Delta'}\right) = 1$$

şi deoarece are loc (2) rezultă că:

$$\Delta\,\Delta' = k'\left(\frac{f'_1}{\Delta'} \cdot \frac{f'_2}{\Delta'} \cdot \ldots \cdot \frac{f'_n}{\Delta'}\right)^* = k'\left(\frac{f'_1 \cdot f'_2 \cdot \ldots \cdot f'_n}{(\Delta')^n}\right)^*, \quad k' \in N.$$

Fie:

$$(7) \qquad \Delta_1 = \left(\Delta', \left(\frac{f'_1 \cdot f'_2 \cdot \ldots \cdot f'_n}{(\Delta')^n}\right)^*\right),$$

atunci

$$\Delta \frac{\Delta'}{\Delta_1} = k' \frac{\left(\dfrac{f'_1 \cdot f'_2 \cdot \ldots \cdot f'_n}{(\Delta')^n}\right)^*}{\Delta_1}$$

şi deoarece

$$\left(\frac{\Delta'}{\Delta_1}, \frac{\left(\dfrac{f'_1 \cdot f'_2 \cdot \ldots \cdot f'_n}{(\Delta')^n}\right)^*}{\Delta_1}\right) = 1,$$

rezultă:

$$(8) \qquad \Delta = \frac{\left(\dfrac{f'_1 \cdot f'_2 \cdot \ldots \cdot f'_n}{(\Delta')^n}\right)^*}{\Delta_1} k, \text{ unde } k \in N.$$

Aşadar:

$$x_i = x'_i \Delta = x'_i \frac{\left(\dfrac{f'_1 \cdot f'_2 \cdot \ldots \cdot f'_n}{(f'_1, f'_2, \ldots, f'_n)^n}\right)^*}{\left(\left(\dfrac{f'_1 \cdot f'_2 \cdot \ldots \cdot f'_n}{(f'_1, f'_2, \ldots, f'_n)^n}\right)^*, (f'_1, f'_2, \ldots, f'_n)\right)} \cdot k,$$

$i = 1, 2, \ldots, m$, Q.E.D.

TEOREMA 2. *Dacă numerele naturale* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *sînt date de formulele* (4) *unde* $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$, $k \in N$ şi $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m) = 1$, *atunci* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *verifică relaţiile* (2).

Demonstraţie. Pentru prescurtarea scrierii se folosesc notaţiile date de (5), (6), (7), (8).

$$(f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m))^* = (f_i(x'_1 \Delta, x'_2 \Delta, \ldots, x'_m \Delta))^* =$$

$$= (\Delta^{q_i} f'_i)^* = (\Delta f'_i)^* = \left(f'_i \cdot \frac{\left(\dfrac{f'_1 \cdot f'_2 \cdot \ldots \cdot f'_n}{(\Delta')^n}\right)^*}{\Delta_1} k\right)^* =$$

$$= \left(\frac{\Delta'}{\Delta_1} \cdot \frac{f'_i}{\Delta'} \cdot \left(\frac{f'_1}{\Delta'} \cdot \frac{f'_2}{\Delta'} \cdot \ldots \cdot \frac{f'_n}{\Delta'}\right)^* k\right)^* = \left(\frac{\Delta'}{\Delta_1} \cdot \left(\frac{f'_1}{\Delta'} \cdot \frac{f'_2}{\Delta'} \cdot \ldots \cdot \frac{f'_n}{\Delta'}\right)^* k\right)^*.$$

Deci $(f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m))^* = (f_j(x_1 x_2, \ldots, x_m))^*$ oricare ar fi $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$, Q. E. D.

Din teoremele 1 şi 2 rezultă:

TEOREMA 3. *Toate sistemele de m numere naturale* $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ *care satisfac relaţiile* (2) *se obţin din formulele* (4) *pentru* $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$, $k \in N$ *şi* $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m) = 1$.

Observaţie. *Dacă* $m = 3$, $n = 2$, $q_1 = 3$, $q_2 = 1$,

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

problema revine la a determina tripletele $\{x_1, x_2, x_3\}$ *pentru care* $(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^* = (x_1 + x_2 + x_3)^*$, *problemă care sub o formă puţin diferită a fost propusă de acad* T. POPOVICIU.

Conform formulelor (4) în acest caz se găseşte:

$$x_i = x' \frac{\left(\dfrac{x_1' \, x_2' \, x_3' \, (x_1' + x_2' + x_3')}{(x_1' \, x_2' \, x_3',\ x_1' + x_2' + x_3')^2}\right)^*}{\left(\left(\dfrac{x_1' \, x_2' \, x_3' \, (x_1' + x_2' + x_3')}{(x_1' \, x_2' \, x_3',\ x_1' + x_2' + x_3')^2}\right)^*,\ (x_1' \, x_2' \, x_3',\ x_1' + x_2' + x_3')\right)} k, \quad i = 1, 2, 3,$$

unde $(x_1', x_2', x_3') = 1$

C o r o l a r 1. *Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul* $\{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0\}$ *de numere naturale prime între ele* $((x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) = 1)$ *să verifice relaţiile* (2) *este ca:*

$$(f_1^0; f_2^0, \ldots, f_m^0) = k'' \left(\frac{(f_1^0 \cdot f_2^0 \cdot \ldots \cdot f_n^0)}{(f_1^0, f_2^0, \ldots, f_n^0)^n}\right)^*, \qquad k'' \in N, \tag{9}$$

unde $f_i^0 = f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$.

Acest corolar rezultă imediat din (4).

C o r o l a r 2. *Dacă* $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = [(x_1, x_2, \ldots, x_m)]^{q_n}$ *atunci formulele* (4) *devin:*

$$x_i = x_i' \cdot (f_1' \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_{n-1}')^* k, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{10}$$

unde

$$(x_1', x_2', \ldots, x_m') = 1 \text{ şi } f_i' = f_i(x_1', x_2', \ldots, x_m'), \quad i = 1, 2, \ldots, n).$$

C o r o l a r 3. *Dacă* $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = [(x_1, x_2, \ldots, x_m)]^{q_n}$ *atunci condiţia necesară şi suficientă ca relaţia* (2) *să fie verificată pentru orice* $x_1, x_2, \ldots, x_m \in N$ *cu* $(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1$ *este ca:*

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = [(x_1, x_2, \ldots, x_m)]^{q_i} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{11}$$

oricare ar fi $x_1, x_2, \ldots, x_m \in N$.

Intr-adevăr din (10) rezultă că pentru ca (2) să fie verificată pentru $x_1, x_2, \ldots, x_m \in N$ cu $(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1$ este necesar şi suficient ca $(f_1' \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_{n-1}')^* = 1$, adică

$$f_i(x_1', x_2', \ldots, x_m') = 1, \ i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Atunci:

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = [(x_1, x_2, \ldots, x_m)^{q_i}] \cdot f_i(x_1', x_2', \ldots, x_m') = $$
$$= (x_1, x_2, \ldots, x_m)]^{q_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Invers, dacă are loc (11) atunci:

$$(f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m))^* = [(x_1, x_2, \ldots, x_m)]^* = (f_j(x_1, x_2, \ldots, x_m))^*,$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

adică (2) este verificată.

NOTE CONCERNANT LES DIVISEURS DES VALEURS DES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES HOMOGÈNES

RÉSUMÉ

Soit $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs primes du nombre naturel n et soit

$$n^* = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k.$$

On considère les fonctions

$$f_i : \mathop{\times}_{j=1}^{m} N \to N, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad n \geqq 2$$

et on suppose qu'il existe $q_i \in N$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tels que:

$$f_i(kx_1, kx_2, \ldots, kx_m) = k^{q_i} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

quelque soit $k, x_1, x_2, \ldots, x_m \in N$ c'est-à-dire que f_i este homoègne d'ordre q_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Le but de cette note est de déterminer tous les systèmes $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ de nombres naturels tels que les relations:

$$(f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m))^* = (f_j(x_1, x_2, \ldots, x_m))^*, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

soient vérifiées.

BIBLIOGRAFIE

[1] S i e r p i n s k i, W., Elementary theory of numbers, Panstwowe Wydawnistwo Naukowe, Warszawa, 1964.

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România

Primită la 17. XI. 1973.