PROPRIETĂŢI ALE FUNCŢIILOR CONVEXE GENERALIZATE

DE

ELENA MOLDOVAN

Comunicare prezentată la şedinţa din 24 septebrie 1956 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

1. Notăm cu F_n o mulţime ale cărei elemente sînt funcţii reale definite în intervalul finit şi închis $[a, b]$, continue în acest interval şi satisfac condiţiei

(I_n) oricare ar fi punctele distincte

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{1}$$

din intervalul $[a, b]$ şi oricare ar fi numerele

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \tag{2}$$

există în F_n o funcţie şi una singură $\varphi(x)$, care satisface condiţiile

$$\varphi(x_i) = y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Mulţimea F_n astfel definită, spunem că este interpolatoare de ordinul n în $[a, b]$.[1]) Funcţia $\varphi(x) \in F_n$, care pe punctele (1) ia valorile unei funcţii date $f(x)$, $\varphi(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, o vom nota în cele ce urmează prin simbolul $L(x_1, x_2, \ldots, x_n ; f | x)$. Introducem de asemenea notaţia

$$D[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} ; f] = f(x_{n+1}) - L(x_1, x_2, \ldots, x_n ; f | x_{n+1}),$$
$$x_{n+1} \in [a, b]$$

Se observă că $D[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} ; f]$ este o funcţională definită pe mulţimea funcţiilor definite pe punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Intr-o altă lucrare [3] am studiat cîteva proprietăţi ale acestei funcţionale. Reamintim aici

---

[1]) Dacă $\varphi_1(x)$ şi $\varphi_2(x)$ sînt două funcţii distincte din F_n, ele, conform definiţiei lui F_n pot să aibă în $[a, b]$ cel mult $n-1$ puncte de intersecţie. Dacă $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ se anulează în $n-1$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$, atunci diferenţa $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ are semne contrare în două intervale (x_{i-1}, x_i), (x_i, x_{i+1}), $i = 2, 3, \ldots, n-2$. Dacă $n = 1$, e clar că două funcţii distincte din F_1 nu pot avea nici un punct de intersecţie.

TEOREMA 1: *Dacă şirul de funcţii* $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ *tinde în* $[a, b]$ *către funcţia* $f(x)$, *atunci are loc relaţia*

$$\lim_{i \to \infty} D[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f_i] = D[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] \tag{4}$$

punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ *fiind presupuse fixate în intervalul* $[a, b]$.

Pentru unele din demonstraţiile ce urmează vom mai folosi şi

TEOREMA 2: *Dacă* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sînt puncte distincte fixate în intervalul* $[a, b]$ *şi şirurile de numere* $\{y_i^{(k)}\}_{i=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *sînt convergente, avînd respectiv limitele* $y^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *atunci şirul de funcţii* $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_i | x)$, *definite de relaţiile*

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_i \mid x_k) = y^{(k)}, \; k = 1, 2, \ldots, n; \; i = 1, 2, \ldots$$

tinde uniform în intervalul $[a, b]$ *către funcţia* $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; y | x)$ *definită de relaţiile*

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; y \mid x_k) = y^{(k)}, \; k = 1, 2, \ldots, n$$

Această teoremă este un caz particular al unei cunoscute teoreme a lui L. Tornheim [6] (vezi teorema 5). Pe baza acestei teoreme se poate afirma că dacă $\varphi(x) \in F_n$, atunci oricărui număr $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr $\eta > 0$ astfel că dacă în n puncte distincte (1) din $[a, b]$ avem

$$|\varphi(x_i) - \varphi_1(x_i)| < \eta \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

unde $\varphi_1(x) \in F_n$, atunci avem şi

$$\max_{x \in [a,b]} |\varphi(x) - \varphi_1(x)| < \varepsilon$$

Demonstraţia teoremei 1 dată de noi se bazează pe această observaţie.

În lucrarea [3] am demonstrat

TEOREMA 3: *Dacă* $f(x)$ *este o funcţie continuă în* $[a, b]$, *atunci funcţionala* $D[x_1, x_2 \ldots, x_n, x_{n+1}; f]$ *este continuă în raport cu ansamblul variabilelor* $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, *unde se presupune* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$.

Cu ajutorul teoremei 3 putem demonstra imediat

TEOREMA 4: *Dacă* $f(x)$ *este o funcţie continuă în* $[a, b]$ *şi pe două sisteme de cîte* $n+1$ *puncte distincte* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ *şi* $x_1' < x_2' < \ldots < x_n' < x_{n+1}'$ *din* $[a, b]$ *avem*

$$D[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] = A, \; D[x_1', x_2', \ldots, x_n', x_{n+1}'; f] = B, \quad A \neq B,$$

atunci, dacă C *este un număr cuprins între* A *şi* B (*adică avem sau* $A < B < C$ *sau* $C < B < A$) *există în cel mai mic interval care conţine punctele* x_i *şi* x_i', $i = 1, 2, \ldots, n+1$, *un sistem de* $n+1$ *puncte distincte* $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+1}$ *astfel ca* $D[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}; f] = C$.

Pentru demonstraţie[2]) e suficient să notăm $t_i(\lambda) = \lambda x_i + (1 - \lambda) x_i'$,

[2]) Această demonstraţie e inspirată după cea dată de T. Popoviciu [1] unei teoreme analoage, pentru diferenţe divizate. Acolo punctul de plecare este forma diferenţei divizate. Aici ne bazăm pe proprietăţile ce decurg din continuitate şi condiţia (I_n).

$i = 1, 2, \ldots, n+1$. Din cauza teoremei 3, $D[t_1(\lambda), t_2(\lambda), \ldots, t_n(\lambda), t_{n+1}(\lambda); f]$ este o funcţie continuă de λ în intervalul $[0,1]$ (care ne interesează pe noi) şi avem $D[t_1(1), t_2(1), \ldots, t_n(1), t_{n+1}(1); f] = A$, $D[t_1(0), t_2(0), \ldots, t_n(0) t_{n+1}(0); f] = B$. Există prin urmare un număr $\lambda_0 \in (0,1)$ astfel ca $D[t_1(\lambda_0), \ldots, t_n(\lambda_0), t_{n+1}, (\lambda_0); f] = C$ şi n-avem decît să luăm $\xi_i = t_i(\lambda_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Evident, aceste puncte sînt situate în intervalul indicat în teoremă.

Raţionamentul făcut mai sus se putea înlocui cu unul analog făcut asupra funcţionalei continue de $n+1$ variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, $D[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f]$, care e definită într-un hiperparalelipiped din spaţiul obişnuit cu $n+1$ dimensiuni, adică într-un domeniu simplu conex care îndeplineşte condiţiile din teorema lui Cauchy.

TEOREMA 5: *Dacă* $f(x)$ *este o funcţie continuă în* $[a, b]$ *şi pe două sisteme de cîte* $n+1$ *puncte distincte* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ *şi* $x_1' < x_2' < \ldots < x_{n+1}'$ *din* $[a, b]$ *avem* $D[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] = A$, $D[x_1', x_2', \ldots, x_n', x_{n+1}'; f] = B$, *iar* $A \cdot B < 0$, *atunci există în cel mai mic interval care conţine punctele* x_i *şi* x_i', $i = 1, 2, \ldots, n+1$, $n+1$, *puncte distincte* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}$ *astfel ca* $D[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}; f] = 0$.

Demonstraţia e imediată, dacă se interpretează teorema 5 ca un caz particular al teoremei 4.

TEOREMA 6: *Dacă* $f(x)$ *este o functie continuă în* $[a, b]$ *şi pe un sistem de* $n+1$ *puncte* $x_1, < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ *din* $[a, b]$, *avem* $D[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] = A$, *atunci există un punct* $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ *astfel ca în orice vecinătate a lui* ξ *să se găsească* $n+1$ *puncte distincte* $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n < \xi_{n+1}$, *pentru care* $\operatorname{sgn} D[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}; f] = \operatorname{sgn} A$.

În cazul $A = 0$ am tratat direct această teoremă în lucrarea [4].

Pentru cazul A oarecare se pot da mai multe demonstraţii. Una din metodele de demonstraţie aplicabilă aici o vom folosi la demonstrarea lemei 2 şi de aceea nu insistăm mai mult asupra teoremei 6.

2. *Definiţia 1*[3]). Funcţia $f(x)$ definită în intervalul $[a, b]$, o numim convexă, neconcavă, neconvexă sau concavă de ordinul n în $[a, b]$ faţă de mulţimea F_n după cum

$$D[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] >, \geqq, \leqq \text{ sau } < 0,$$

pe orice sistem de $n+1$ puncte

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} \tag{5}$$

din $[a, b]$.

Dacă pe punctele (5), $f(x)$ satisface relaţia de egalitate

$$D[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] = 0 \tag{6}$$

[3]) Această definiţie am mai dat-o în lucrarea [5] şi ea este o generalizare a definiţiei date de T. Popoviciu în [1], în cazul cînd F_n este mulţimea polinoamelor de grad $\leqq n-1$.

atunci spunem că $f(x)$ este F_n - polinomială pe punctele (5). Dacă pe orice sistem de $n+1$ puncte (5), aparţinînd unei mulţimi de puncte E, $f(x)$ satisface relaţia (6), atunci spunem că $f(x)$ este F_n - polinomială pe mulţimea E (această mulţime trebuie să conţină cel puţin $n+1$ puncte). O mulţime de puncte E cu această proprietate o numim mulţime de F_n-polinomialitate a funcţiei $f(x)$.

Funcţiile convexe, neconcave, neconvexe, concave, mai sus definite le numim funcţii de ordinul n faţă de mulţimea F_n.

TEOREMA 7: *Dacă funcţia $f(x)$ este de ordinul n în $[a, b]$ faţă de mulţimea F_n şi este F_n-polinomială pe punctele* (5) *din $[a, b]$, atunci ea este F_n-polinomială în întreg intervalul $[x_1, x_{n+1}]$.*

Pentru demonstraţie să presupunem, în ipotezele teoremei, că există în intervalul (x_1, x_{n+1}) puncte în care valorile funcţiei $f(x)$ nu coincid cu valorile funcţiei interpolatoare $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; f|x)$. Fie x_0 un asemenea punct şi fie $x_k < x_0 < x_{k+1}$. Să considerăm acum funcţiile

$$L\,(x_1, x_2, \ldots, x_k\, x_0, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}; f|x) \tag{7}$$

şi

$$L\,(x_2, x_3, \ldots, x_k, x_0, x_{k+1} \ldots, x_n; f|x) \tag{8}$$

Se observă imediat pe baza proprietăţii (I_n), că punctul $M\,(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ este situat între curbele reprezentative ale funcţiilor (7) şi (8), ceea ce nu poate avea loc, $f(x)$ fiind de ordinul n faţă de F_n în $[a, b]$. Prin urmare în orice punct $x_0 \in (x_1, x_{n+1})$, $f(x)$ trebuie să ia aceeaşi valoare cu $L\,(x_1, x_2, \ldots, x_n; f|x)$ şi teorema este astfel demonstrată (ne-am folosit şi de nota (1) de la pagina 1).

Pe baza teoremei 2 se pot trage următoarele concluzii asupra mulţimilor de F_n-polinomialitate ale unei funcţii $f(x)$ de ordinul n, faţă de F_n în $[a, b]$. Dacă $n \geqq 2$, funcţia $f(x)$ este continuă în intervalul (a, b), deschis (vezi [5]).

Prin urmare, în acest caz, dacă $E \subset (a,b)$ este o mulţime de F_n-polinomialitate a lui $f(x)$ şi x_0 este un punct de acumulare al lui E, diferit de a şi de b, atunci $x_0 \in E$. Prin urmare, dacă $\overline{\lim}\, E \neq b$ şi $\underline{\lim}\, E \neq a$, atunci E este o mulţime închisă. Dacă $a \in E'$ şi $a \in E$, atunci $f(x)$ trebuie să fie continuă în a. Aceeaşi observaţie este valabilă pentru punctul b. Pe baza teoremei 7, dacă x_0 şi x_0', $x_0 < x_0'$, aparţin lui E atunci E conţine toate punctele $x \in (x_0, x_0')$. Rezultă că E este un interval închis sau deschis. Evident, conform definiţiei F_n-polinomialităţii, E nu se poate reduce niciodată la un punct.

Dacă E_1 şi E_2 sînt două mulţimi distincte de F_n-polinomialitate ale lui $f(x)$, reunirea lor este o mulţime de F_n-polinomialitate dacă $E_1 \cap E_2$ nu se reduce la un punct. În acest caz $E_1 \cup E_2$ este un interval deschis sau închis. In caz contrar $E_1 \cup E_2$ poate să nu fie o mulţime de F_n-polinomialitate şi atunci $E_1 \cup E_2$ este reunirea a două intervale care au cel mult un punct comun, unul fiind închis cel puţin la dreapta iar celălalt cel puţin la stînga. Prin urmare reunirea tuturor mulţimilor de F_n-polinomialitate ale lui $f(x)$ este o mulţime de intervale două cîte două, avînd cel mult cîte un punct comun, dintre care cel mult două pot fi deschise. Această mulţime are un număr finit sau o infinitate numărabilă de intervale (pentru că sînt

două cîte două fără puncte interioare comune şi nici unul nu se reduce la un singur punct).

Funcţia $f(x)$ de ordinul n dacă $n=1$, poate să nu fie continuă (de exemplu funcţiile monotone obişnuite, F_1 fiind atunci mulţimea dreptelor paralele cu axa Ox). In acest caz o mulţime E de F_1-polinomialitate conţine cel puţin două puncte. Pe baza teoremei 7, a cărei demonstraţie nu presupune continuitatea lui $f(x)$, dacă $x_0 < x_0'$ sînt două puncte ale lui E, orice punct $x \in (x_0, x_0')$ aparţine lui E. Prin urmare E este un interval despre ale cărui extremităţi nu putem spune în general nimic. Reunirea a două mulţimi E_1, E_2 de F_1-polinomialitate este un interval, dacă E_1 şi E_2 au cel puţin un punct comun. Reunirea mulţimilor de F_1-polinomialitate este o mulţime finită sau numărabilă de intervale, două cîte două disjuncte. Precizarea comportării funcţiei $f(x)$ în extremităţile acestor intervale se poate face pe baza studiului discontinuităţilor funcţiei $f(x)$. De acest studiu nu avem nevoie în cele ce urmează.

TEOREMA 8: *Funcţia limită a unui şir de funcţii convexe de ordinul n faţă de F_n în $[a, b]$, convergent într-un interval $[\alpha, \beta] \leqq [a, b]$, este o funcţie neconcavă de ordinul n faţă de F_n în $[\alpha, \beta]$.*

Demonstraţia teoremei se bazează pe teorema 1, pe care o putem aplica fiecărui sistem de puncte (5) ; şi pe baza teoremei 2 rezultă neconcavitatea funcţiei limită. Aici nu e esenţială convergenţa *uniformă* care figurează în teorema 2, ci convergenţa în fiecare punct din intervalul considerat. De asemenea şi în teorema 8 convergenţa e cea simplă.

Teoreme analoage se pot enunţa pentru toate categoriile de funcţii de ordinul n faţă de F_n (concave, neconvexe şi neconcave).

3. *Definiţia 2.* Funcţia $f(x)$ definită în intervalul $[a, b]$ o numim $n+k$-valentă faţă de mulţimea F_n dacă are cel mult $n+k$ puncte de intersecţie cu orice funcţie din F_n. Aici $k \geqq 0$.

In această lucrare ne preocupă numai proprietăţile funcţiilor n şi $n+1$-valente faţă de mulţimea F_n. Cîteva din proprietăţile funcţiilor n-valente faţă de o mulţime interpolatoare de ordinul n le-am studiat în lucrarea [5].

TEOREMA 9: *Dacă funcţia $f(x)$ este continuă în $[a, b]$ şi $n+1$-valentă faţă de mulţimea F_n şi există efectiv o funcţie $\varphi(x) \in F_n$ care în $n+1$ puncte ia valori egale cu $f(x)$, atunci diferenţa $f(x) - \varphi(x)$ îşi schimbă semnul în fiecare din aceste $n+1$ puncte.*

Pentru demonstraţie fie $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ puncte în care $\varphi(x) \in F_n$ ia valori egale cu $f(x)$, care îndeplineşte ipotezele din teoremă. Să presupunem că într-unul dintre punctele x_k, $k=2,3, \ldots, n$, diferenţa $\varphi(x) - f(x)$ nu schimbă semnul. Fie pentru fixarea ideilor $\varphi(x) - f(x) > 0$, cînd $x \in (x_{k-1}, x_k)$ sau $x \in (x_k, x_{k+1})$.

In baza teoremei 2 e suficient să considerăm funcţia $g(x) \in F_n$, care în punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ ia valori egale cu $f(x)$, iar în x_k să avem $g(x_k) < f(x_k)$. Dacă $g(x_k)$ diferă suficient de puţin de $f(x_k)$, atunci $g(x)$ are $n+2$ puncte de intersecţie cu $f(x)$, pentrucă apare cel puţin un punct de intersecție în intervalul (x_{k-1}, x_k) și cel puțin unul în (x_k, x_{k+1}), ceea ce în ipotezele făcute asupra funcției $f(x)$ nu e permis. Dacă dăm lui k valoarea 1 sau $n+1$, raționamentul este analog. In cazul $k=1$ rolul funcției $g(x)$ îl va avea funcția din F_n, care în $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ia valori egale cu $f(x)$ și în x_1 ia o valoare apropiată de $f(x_1)$ și mai mică decît $f(x_1)$.

In cazul $k=n+1$, rolul lui $g(x)$ îl joacă acea funcție din F_n care în $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ia valori egale cu $f(x)$ iar în x_{n+1} ia o valoare apropiată de $f(x_{n+1})$ și mai mică decît $f(x_{n+1})$. Evident, în aceste două cazuri din urmă nu are sens să ne ocupăm de cazul $x_1=a$ sau $x_{n+1}=b$. In mod analog se tratează cazurile în care $g(x_k)>f(x_k)$.

Proprietatea exprimată prin teorema 9 apropie mult funcțiile $n+1$-valente de funcțiile n-valente față de mulțimea F_n. In cazul funcțiilor n-valente are loc o proprietate analoagă celei de mai sus [5]. Totuși trebuie să observăm că o funcție $n+1$-valentă față de F_n, care se intersectează efectiv în $n+1$ puncte cu o funcție din F_n, nu se poate reduce la o funcție de ordinul n față de F_n, pentru că atunci — pe baza teoremei 9 — n-ar mai putea fi $n+1$-valentă față de F_n. Funcțiile $n+1$-valente față de F_n, continue în $[a,b]$, constituie o clasă de funcții la care se aplică teorema de medie stabilită de noi în [4] și pe care o reamintim aici sub următoarea formulare:

TEOREMA 10: *Dacă funcția continuă în $[a,b]$, $f(x)$, este F_n-polinomială pe punctele* (5), *atunci în intervalul (x_1, x_{n+1}) există un punct ξ, care are proprietatea că în orice vecinătate a sa există $n+1$ puncte distincte pe care $f(x)$ este de asemenea F_n-polinomială.*

Această teoremă ne va folosi în cele ce urmează la studiul structurii mulțimii de definiție a unei funcții de ordinul n, față de mulțimea F_n.

4. *Definiția 3.* Considerăm funcția $f(x)$ definită în intervalul $[a,b]$. Punctul $\xi \in (a,b)$ se numește punct de ordinul n al funcției $f(x)$, față de mulțimea F_n, dacă în orice vecinătate a lui ξ există $n+1$ puncte pe care $f(x)$ este F_n-polinomială.

Înainte de a studia proprietățile funcțiilor $n+1$-valente față de mulțimea F_n, dăm cîteva proprietăți de bază ale funcțiilor n-valente față de F_n.

Se știe [5] că o funcție continuă în $[a,b]$, n-valentă față de mulțimea F_n, este convexă sau concavă de ordinul n față de F_n în $[a,b]$. În cele ce urmează presupunem că mulțimea F_n, $n>1$, are o submulțime F_{n-1}, care este interpolatoare de ordinul $n-1$ în intervalul $[a, b]$. Mai jos urmărim să găsim unele legături care există între funcțiile n-valente față de F_n și cele $n-1$-valente față de F_{n-1}. În cazul cînd F_n este mulțimea polinoamelor de grad $\leqq n-1$ iar F_{n-1} mulțimea polinoamelor de grad $\leqq n-2$, studiul acestor legături a fost făcut de T. Popoviciu [1], cu ajutorul diferențelor divizate. Aici, în cazul unei mulțimi F_n oarecare, nu dispunem de o relație de recurență analoagă celei ce există la diferențele divizate și de aceea toate demonstrațiile ce le dăm utilizează proprietatea (I_n) și continuitatea funcțiilor care intervin.

Lema 1. *Dacă $n=1$ și $x' \in [a, b]$ și $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ este un șir monoton de numere, funcțiile din F_1, care iau respectiv valorile $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ în x', formează un șir monoton de funcții în întreg intervalul $[a, b]$.*

Demonstrația caestei leme se bazează pe definiția mulțimii F_1, conform căreia două funcții distincte din F_1 nu au nici un punct de intersecție. Cum aceste funcții au fost presupuse de la început continue, lama 1 rezultă imediat.

Lema 2. *Dacă $f(x)$ este o funcție convexă* (sau concavă) *de ordinul n față de mulțimea F_n în $[a, b]$, iar $\xi \in (a,b)$ un punct de ordinul $n-1$ al funcției $f(x)$ față de mulțimea F_{n-1}, atunci în orice vecinătate a punctului ξ există n puncte în care $f(x)$ ia valori egale cu o funcție din F_{n-1}, $n-1$ dintre aceste puncte fiind situate la stînga punctului ξ iar unul la dreapta punctului ξ,* $(n \geqq 2)$.

Pentru demonstrația lemei distingem două cazuri: $n=2$ și $n>2$. In primul caz, ξ fiind de ordinul 1, în orice vecinătate a lui există două puncte în care $f(x)$ se intersectează cu o funcție din F_1. Pe baza demonstrației pe care am dat-o în [4] teoremei 10, aceste două puncte sînt separate de punctul ξ și deci nu mai avem nimic de demonstrat (proprietatea aceasta de separație are loc oricare ar fi n). Să studiem cazul $n>2$. Să presupunem că $f(x)$ este *convexă* de ordinul n față de F_n în $[a,b]$. Fie $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ un interval cu centrul în punctul ξ, care figurează în lemă. Fie $x_1^* < x_2^* < \ldots < x_n^*$, n puncte din $[\alpha,\beta]$, în care $f(x)$ ia aceleași valori cu funcția $\varphi^*(x) \in F_{n-1}$ și care satisfac inegalitățile:

$$x_1^* < x_2^* < \ldots < x_m^* < \xi < x_{m+1}^* < \ldots < x_n^*,$$

unde $1 \leqq m \leqq n-2$. Să arătăm că putem construi o funcție $\varphi_1^*(x)$ din mulțimea F_{n-1} care are în $[\alpha,\beta]$ n puncte de intersecție cu $f(x)$, $x_1' < x_2' < \ldots < x_n'$, astfel ca $x_1' < x_2' < \ldots < x_m' < x_{m+1}' < \xi < x_{m+2}' < \ldots < x_n'$. Pentru aceasta considerăm funcțiile din F_{n-1} care în punctele $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{m-1}^*, x_{m+2}^*, \ldots, x_n^*$ iau valori egale cu $f(x)$. In cazul $m=1$, această mulțime e formată din acele funcții din F_{n-1} care în cele $n-2$ puncte $x_{m+2}^*, x_{m+3}^*, \ldots, x_n^*$ iau valori egale cu $f(x)$. Totalitatea acestor funcții formează o mulțime interpolatoare de ordinul 1 în intervalul $[x_m^*, x_{m+1}^*]$, pe care o vom nota simbolic cu F_1. Construim funcția $\varphi_1^*(x) \in F_1^*$, care într-un punct $\bar{x}$ — de altfel arbitrar — situat în (x_m^*, ξ), ia valoarea $f(x)$. Funcțiile $\varphi^*(x)$ și $\varphi_1^*(x)$, avînd $n-2$ puncte de intersecție, diferența lor trebuie să schimbe în aceste puncte semnul și nici nu se mai poate anula în alte puncte. Prin urmare în $\bar{x}$ diferența $\varphi_1^*(x)-f(x)$ sau se anulează schimbînd semnul — și atunci ea se mai anulează o dată în intervalul $(x_m, \bar{x})$ — sau se anulează fără să schimbe semnul și în acest caz, bazîndu-ne pe observația (1) de la pag. 1 și pe *lema* 1, putem construi o altă funcție $\bar{\varphi}_1^* \in F_1^*$, care în $\bar{x}$ să ia o valoare $\bar{y}$ astfel ca $\bar{y}<f(\bar{x})$ sau $\bar{y}<f(\bar{x})$, după cum $f(\bar{x})>\varphi^*(x)$ sau $f(\bar{x})<\varphi^*(x)$.

Dacă diferența $f(\bar{x})-\bar{y}$ este suficient de mică în valoare absolută[4]), atunci $\bar{\varphi}_1^*$ *(x)* (are în intervalul (x_m^*, ξ) două puncte de intersecție cu $f(x)$.

[4]) Aici ne bazăm pe faptul că ordonata într-un punct oarecare diferit de x, a funcțiilor din F_1, este o funcție monotonă de $y \in [f(x), y^*(x)]$ și această funcție trebuie să fie continuă pentru că pe baza proprietății interpolatoare trebuie să ia orice valoare intermediară între două valori ale sale.

Funcția $\overline{\varphi}_1^*(x)$ are efectiv n puncte de intersecție cu $f(x)$, $m+1$ dintre ele fiind la stînga lui ξ iar celelalte la dreapta lui ξ. Funcției $\varphi_1(x)$, respectiv $\overline{\varphi}_1^*(x)$, îi putem aplica raționamentul făcut mai sus pentru a obține o nouă funcție din F_{n-1}, care să se intersecteze în n puncte cu $f(x)$, $m+2$ dintre aceste puncte fiind la stînga iar celelalte la dreapta lui ξ. Procedeul se poate continua pînă cînd la dreapta lui ξ rămîne un singur punct de intersecție. In demonstrația expusă convexitatea intervine prin aceea că, în punctele de intersecție a funcției $f(x)$ cu o funcție $\varphi(x) \epsilon F_n$, diferența $f(x) - \varphi(x)$ trebuie să schimbe semnul dacă numărul punctelor de intersecție este n.

O lemă analoagă cu lema 2 se poate enunța, plasînd 1 punct la stînga lui ξ și $n-1$ puncte la dreapta lui ξ.

O b s e r v a ț i e. Pe baza lemei 2 se observă că dacă $f(x)$ este convexă (sau concavă) de ordinul n față de F_n în $[a,b]$ și ea are în (a,b) un singur punct ξ de ordinul $n-1$ față de F_{n-1}, atunci acest punct împarte intervalul $[a,b]$ în două subintervale $[a,\xi]$ și $[\xi,b]$, în fiecare dintre ele funcția $f(x)$ fiind $n-1$-valentă față de F_{n-1} și deci în $[a,\xi]$ concavă de ordinul $n-1$ și în $[\xi,b]$ convexă de ordinul $n-1$ față de F_{n-1} (sau în $[a,\xi]$ convexă de ordinul $n-1$ și în $[\xi,b]$ concavă de ordinul $n-1$ față de F_{n-1}). De asemenea, dacă despre $f(x)$ presupunem numai n-valență față de F_n și continuitatea în $[a,b]$ — notațiile avînd aceeași semnificație ca mai sus — din ordinea în care se succed caracterul de convexitate și cel de concavitate de ordin $n-1$ față de F_{n-1} în $[a,\xi]$ și $[\xi,b]$, se deduce convexitatea într-un caz și concavitatea în celălalt caz, de ordinul n față de F_n, a funcției $f(x)$ în $[a,b]$.

Pe baza acestei observații, un punct ξ de ordinul $n-1$ față de F_{n-1} al unei funcții $f(x)$, convexe (sau concave) de ordinul n față de F_n în $[a,b]$, îl vom numi de clasa întîia sau de clasa a doua, după cum într-o vecinătate $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ a sa, oricare ar fi sistemul de puncte $x_1<x_2<\ldots<x_n$, pe care $f(x)$ este F_{n-1}-polinomială, și astfel ca $\xi-\delta<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<\xi<x_n<\xi+\delta$, $f(x)$ este concavă sau convexă de ordinul $n-1$ față de F_{n-1} pe cele n puncte $x_1<x_2\ldots<x_{n-1}<\xi$.

Din cauza ipotezelor făcute asupra funcției $f(x)$ și din cauza lemei 2, este clar că un punct ξ nu poate fi în același timp de ambele clase și că aparține cu siguranță uneia din clase. (Aici nu ne bazăm pe teorema 5, în baza căreia, dacă ξ ar aparține la ambele clase, am ajunge în contradicție cu ipoteza de convexitate (sau concavitate) de ordinul n față de F_n a funcției $f(x)$).

Să analizăm mai de aproape mulțimea punctelor de ordinul $n-1$ față de F_{n-1} ale unei funcții $f(x)$ presupusă de exemplu convexă de ordinul n față de F_n în $[a,b]$. Să notăm această mulțime cu M_{n-1}. Mulțimea M_{n-1} este sau finită sau infinită. Dacă e infinită, ea este evident închisă (din cauza proprietăților de continuitate ale funcționalei $D[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; x_n; f]$). Fie $\xi'=\inf M_{n-1}$ și $\xi''=\sup M_{n-1}$. Mulțimea M_{n-1} este peste tot densă în intervalul $[\xi', \xi'']$. Aceasta se vede dacă observăm că toate punctele din M_{n-1} trebuie să fie de aceeași clasă (din cauza convexității lui $f(x)$) și prin urmare, aplicînd lema 2 și teorema 5, înseamnă că dacă ξ_1 și ξ_2 sînt două puncte din M_{n-1} și $\xi_1<\xi_2$, atunci există totdeauna în M_{n-1} un punct ξ_3 astfel ca $\xi_1<\xi_3<\xi_2$. Atunci, din cauza teoremei 3, aplicată în cazul mulțimii F_{n-1}, $f(x)$

trebuie să coincidă în intervalul $[\xi', \xi'']$ cu o funcție din F_{n-1}, ceea ce nu e permis din cauza ipotezei de convexitate de ordin n față de F_n care conține pe F_{n-1}.

Putem deci trage concluzia că M_{n-1}, în ipotezele făcute asupra funcției $f(x)$, este vidă sau conține un singur punct.

5. *Definiția 4.* Două subintervale $[\alpha_1,\beta_1]$, $[\alpha_2,\beta_2]$, ale intervalului $[a,b]$, le numim consecutive dacă $a\leqq\alpha_1<\beta_1=\alpha_2<\beta_2\leqq b$. Dacă aici $a=\alpha_1$ și $\beta_2=b$, atunci spunem că intervalul $[a,b]$ este descompus în două subintervale consecutive.

Presupunem acum că $F_1\subset F_2\subset\ldots\subset F_{n-1}$ sînt submulțimi ale mulțimii F_n, în așa fel ca F_k să fie interpolatoare de ordinul k în $[a,b]$, $k=1,2,\ldots,n-1$.

TEOREMA 11 : — *Dacă $f(x)$ este o funcție convexă (sau concavă) de ordinul n față de* F_n *în $[a,b]$, $n\geqq 2$, atunci intervalul $[a,b]$ se descompune în cel mult $k+1$ subintervale consecutive, în care $F(x)$ este alternativ convexă și concavă de ordinul $n-k$ față de F_{n-k}. Se presupune $1\leqq k\leqq n-1$.*

Demonstrația acestei teoreme se bazează în special pe lema 2 și pe consecințele acesteia. Considerăm întîi cazul $k=1$ și $f(x)$ convexă de ordinul n față de F_n în $[a,b]$. Se pot întîmpla două cazuri : sau există în F_{n-1} o funcție care are cu $f(x)$ n puncte de intersecție, sau o asemenea funcție nu există în F_{n-1}. In cazul al doilea $f(x)$ este $n-1$-valentă față de F_{n-1} în întreg intervalul $[a,b]$ și deci e convexă sau concavă de ordinul $n-1$ față de F_{n-1}. In primul caz există un punct de ordinul $n-1$ față de F_{n-1} și unul singur $\xi_1^{(n-1)}$, care — pe baza observațiilor făcute la sfîrșitul paragrafului 4 — împarte intervalul $[a,b]$ în două intervale consecutive, în care are loc proprietatea din teorema 11, formulată pentru cazul $k=1$.

Observăm că nu există o altă descompunere a intervalului $[a,b]$ în subintervale consecutive, care să respecte condițiile din teorema 11.

Punctul $\xi_1^{(n-1)}$ avînd semnificația de mai sus, să notăm cu $f_1^{(n-1)}(x)$ restrîngerea funcției $f(x)$ pe intervalul $[a, \xi_1^{(n-1)}]$ și cu $f_2^{(n-1)}(x)$ restrîngerea ei pe intervalul $[\xi_1^{(n-1)}, b]$, în cazul cînd există $\xi_1^{(n-1)}$.

Dacă punctul $\xi_1^{(n-1)}$ nu există, atunci $f(x)$ poate avea, pe baza aceluiași raționament de mai sus, cel mult un punct, $\xi_1^{(n-1)}$, de ordinul $n-2$ față de F_{n-2}. In caz contrar, raționînd la fel asupra lui $f_1^{(n-1)}(x)$ și $f_2^{(n-1)}(x)$, observăm că $f(x)$ poate avea în (a,b) cel mult două puncte $\xi_1^{(n-1)}<\xi_2^{(n-2)}$ de ordinul $n-2$ față de F_{n-2}. Dacă aceste două puncte există, atunci în intervalele $[a, \xi_1^{(n-2)}]$, $[\xi_1^{(n-2)}, \xi_2^{(n-2)}]$, $[\xi_2^{(n-2)}, b]$ sînt satisfăcute condițiile cerute în concluzia teoremei 11.

Putem acum afirma că $f(x)$, are cu siguranță numai un număr finit de puncte de orice ordin $k\leqq n-1$.

Extinzînd noțiunea de clasă a unui punct de ordinul $n-1$ față de F_{n-1}, la puncte de un ordin oarecare $n-k$ față de F_{n-k}, $2\leqq k\leqq n-1$, se poate enunța imediat

L e m a 3 : *Intre două puncte de ordinul $n-k$ față de F_{n-k}, $k\leqq n-2$, ale funcției din enunțul teoremei 11, care aparțin la clase diferite, există cel puțin un punct de ordinul $n-k+1$ față de F_{n-k+1}.*

Demonstrația acestei leme e imediată pe baza teoremei 5, aplicată la F_{n-k}.

Demonstrația teoremei 11 rezultă acum imediat. E suficient să presupunem că, în ipotezele teoremei, intervalul $[a,b]$ s-ar putea descompune în $k+2$ subintervale consecutive, pentru un anumit k, $1<k\leqq n-1$, care să satisfacă cerințele din teoremă. Atunci $f(x)$ ar avea cel puțin $k+1$ puncte de ordinul $n-k$ față de F_{n-k} și deci — pe baza lemei 3 — cel puțin două puncte de ordin $n-1$ față de F_{n-1}, ceea ce știm că nu se poate. Prin urmare concluzia din teoremă are loc.

Din cele expuse mai sus, ca o completare rezultă și

TEOREMA 12: *O funcție convexă (sau concavă) de ordinul n față de F_n în $[a,b]$, are cel mult k puncte de ordinul $n-k$ față de F_{n-k}, $k=1,2,\ldots,n-1$ (punctele care aparțin aceluiași ordin sînt alternativ de clasa întîia și a doua).*

Demonstrația teoremei 12 este acum foarte simplă. Să presupunem că în ipotezele teoremei există $k+1$ puncte de ordin $n-k$ față de F_{n-k}, pentru un anumit k, $2\leqq k\leqq n-1$. Dacă aceste puncte sînt alternativ de clasa întîia și a doua, atunci ajungem în contradicție cu faptul că $f(x)$ poate avea cel mult un punct de ordinul $n-1$ față de F_{n-1}. Dacă cele $k+1$ puncte nu sînt alternativ de clasa întîia și a doua, atunci există printre ele cel puțin două, consecutive, care sînt de aceeași clasă. Intre aceste două puncte trebuie să mai existe atunci încă un punct de același ordin, pe baza teoremei 5 aplicată la F_{n-k}. Acest raționament îl putem aplica fiecărei perechi de puncte consecutive dintre cele $k+1$ puncte și ajungem astfel la aceeași contradicție ca mai sus.

Dacă observăm că existența a k puncte de ordin $n-k$ față de F_{n-k}, pentru un k fixat — păstrînd condițiile din teoremele precedente asupra lui $f(x)$ — atrage după sine existența tuturor punctelor posibile de ordine superioare, putem enunța următoarea teoremă, în ipoteza că toate punctele ce intervin în enunț există :

TEOREMA 13 : *Dacă $f(x)$ este convexă (sau concavă) de ordin n față de F_n în $[a,b]$, atunci punctele ei de ordin $n-k$ față de F_{n-k} și cele de ordin $n-k+1$ față de F_{n-k+1} se separă* $(2\leqq k\leqq n-1)$.

Din teorema 12 se pot trage unele concluzii asupra funcțiilor convexe (sau concave) față de mulțimea P_{n+1} a polinoamelor de grad $\leqq n$, care este interpolatoare de ordinul $n+1$ în orice interval. O funcție convexă (sau concavă) de ordin $n+1$ față de P_{n+1} are cel mult n puncte de ordinul 1 față de mulțimea P_1 a paralelelor la axa Ox (acestea sînt puncte în care derivata funcției, dacă există, se anulează). Aceeași concluzie se poate trage dacă în loc de mulțimea paralelelor la axa OX considerăm mulțimea paralelelor cu o direcție dată.

Un studiu analog cu cel făcut asupra funcțiilor convexe (sau concave) de un ordin dat n față de o mulțime F_n se poate face și în cazul funcțiilor neconcave (sau neconvexe). El se bazează pe proprietățile mulțimilor de F_{n-k}-polinomialitate.

6. *Definiția 5*. Spunem că mulțimea F_n, interpolatoare de ordinul n în $[a,b]$ este liniară dacă ea conține n funcții $\varphi_1(x), \varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)$, astfel

ca orice funcție $g(x)$ din F_n să se poată reprezenta în mod unic sub forma

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) \tag{9}$$

unde c_i sînt numere reale.

In baza acestei definiții, dacă F_n este liniară și funcțiile $\varphi_i(x)$, $i=1,2,\ldots,n$, au proprietatea cerută mai sus, atunci determinantul

$$V = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2) \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \tag{10}$$

trebuie să fie diferit de zero, oricare ar fi sistemul de puncte distincte $x_1,x_2,\ldots,x_n$ din $[a,b]$. Aceasta, evident, atrage după sine caracterul funcțiilor $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)$, de a forma un sistem Cebîșev și prin urmare funcția $h(x)=L(x_1,x_2,\ldots,x_n;y|x)$ din F_n, care satisface condițiile $h(x_i)=y_i=0$, $i=1,2,\ldots,n$, este funcția identic nulă în $[a,b]$.

Din cele spuse aici și din rezultatele conținute în [3] rezultă că atunci cînd F_n este liniară, atunci și $D[x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}; f]$ este o funcțională liniară de argumentul f, adică

$$D[x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}; \alpha f_1+\beta f_2]=$$
$$=\alpha D[x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}; f_1]+\beta D[x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}; f_2]$$

oricare ar fi numerele reale α și β și oricare ar fi funcțiile f_1 și f_2, definite pe punctele $x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}$. Prin urmare dacă F_n este liniară și $f(x)$ este o funcție concavă (neconvexă) de ordinul n față de F_n în $[a,b]$, atunci — $f(x)$ este convexă (neconcavă) de ordinul n față de F_n în $[a,b]$ și invers.

In cele ce urmează presupunem că F_n e liniară și că există submulțimile $F_1\subset F_2\subset\ldots\subset F_{n-1}$ ale lui F_n, interpolatoare respectiv de ordinul $1,2,\ldots,n-1$ în $[a,b]$, și că aceste submulțimi sînt toate liniare. Aici trebuie să observăm că cererea cu privire la liniaritatea submulțimilor F_i, $i=1,2,\ldots,n-1$, nu rezultă din liniaritatea lui F_n. O mulțime interpolatoare de un ordin n și liniară, poate să aibă submulțimi interpolatoare de un ordin mai mic decît n, care nu sînt liniare. De exemplu mulțimea polinoamelor $Ax^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, cu coeficientul A fixat și ceilalți coeficienți variabili, este o submulțime interpolatoare de ordinul n, care nu e liniară, a mulțimii polinoamelor de gradul n, care e interpolatoare de ordinul $n+1$ și e liniară. În acest exemplu intervalul $[a,b]$ poate fi orice interval finit.

Dacă funcțiile $\varphi_i(x)$, $i=1,2,\ldots,n$, care figurează în (9), au proprietatea că toți determinanții

$$V_k = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_k(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_k(x_2) \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \varphi_1(x_k) & \varphi_2(x\ ) & \ldots & \varphi_k(x_k) \end{vmatrix}, \quad k=1,2,\ldots,n-1,n, \tag{11}$$

sînt diferiţi de zero, pentru orice sistem de puncte distincte $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, din $[a,b]$, atunci mulţimea funcţiilor $g(x) \in F_n$ de forma

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n-k} b_i \varphi_i(x) \tag{12}$$

formează o submulţime interpolatoare de ordin $n-k$, liniară, a mulţimii F_n, oricare ar fi $k=1, 2, \ldots, n-1$. Să ne plasăm în acest caz şi să presupunem deci că F_{n-1} este mulţimea funcţiilor de forma (12) pentru $k=1, 2, \ldots, n-1$.

Are loc

L e m a 4: *Dacă $f(x)$ este o funcţie concavă (sau convexă) de ordinul 1 faţă de F_1 într-un subinterval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, ea admite o prelungire $f(x)$ în întreg intervalul $[a,b]$, care este neconvexă (sau neconcavă) de ordinul 1 faţă de F_1.*

Pentru demonstraţia lemei, fie $a<\alpha<\beta<b$ şi $f(x)$ o funcţie convexă de ordinul 1 faţă de F_1. Conform formulei (12), F_1 este formată din funcţiile de forma $b_1 \varphi_1(x)$, unde $\varphi_1(x)$ — din cauza condiţiei impuse determinanţilor (9) — păstrează semnul constant (deci nu se anulează nicăieri în $[a, b]$). Funcţia $f(x)$ care figurează în lemă se poate construi în felul următor: se ia

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [\alpha, \beta] \\ b_1' \varphi_1(x), & x \in [\beta, b] \\ b_1'' \varphi_1(x), & x \in [\alpha, a] \end{cases} \tag{13}$$

unde b_1' şi b_1'' se determină astfel ca $b_1' \varphi_1(\beta) = f(\beta)$ şi $b_1'' \varphi_1(\alpha) = f(\alpha)$. Funcţia definită prin (13) este neconcavă de ordinul 1 faţă de F_1 în $[a, b]$, pentru că pe orice sistem de două puncte $x_1<x_2$ avem $D[x_1, x_2; \overline{f}] \geqq 0$, din cauza ipotezei de convexitate impusă lui $f(x)$ şi din cauza definiţiei lui F_1.

Proprietatea exprimată prin lema 4 are loc şi în cazul neliniar, dar noi o folosim numai în cazul liniar.

TEOREMA 14: *Dacă F_n este o mulţime interpolatoare de ordinul n în $[a, b]$, liniară, în care funcţiile $\varphi_i(x)$, $i=1,2,\ldots,n$ din (9) satisfac condiţiile impuse determinanţilor (11) şi $\varphi_1(x)$ ia o valoare constantă în $[a, b]$, atunci o funcţie convexă (sau concavă) de ordinul n faţă de F_n în $[a, b]$ este diferenţa a două funcţii neconcave (sau neconvexe) de ordinul 1 faţă de F_1.*

Conform teoremei 11, intervalul $[a, b]$ se descompune în cel mult n intervale consecutive în care $f(x)$ e alternativ convexă şi concavă de ordinul 1 faţă de F_1. Atunci $f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, unde $\varphi_1(x)$, dacă $f(x)$ e concavă, este majoranta minimă nedescrescătoare [7] (pentru că concavitatea de ordinul 1 faţă de F_1 coincide acuma cu monotonia, şi anume cu noţiunea de crescător). Construcţia lui $f_2(x)$ rezultă atunci imediat, ţinîndu-se seama de lema 4.

Concluzia din teorema 14 are loc şi în cazul cînd asupra lui $\varphi_1(x)$ se face numai ipoteza că e de semn constant.

7. In acest paragraf dăm cîteva teoreme care conţin indicaţii asupra inegalităţilor diferenţiale pe care le satisfac funcţiile de ordinul n faţă de mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale

$$y^{(n)} - G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0 \tag{14}$$

Facem ipoteza că funcţia $G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ este continuă în raport cu ansamblul variabilelor sale într-un anumit domeniu, definit de inegalităţile

$$a \leqq x \leqq b, -\infty < y < +\infty, -\infty < y^{(i)} < +\infty, \; i=1, 2, \ldots, n-1$$

Spunem despre ecuaţia (14) că este de tipul $I_n[a, b]$, dacă mulţimea G_n a soluţiilor sale este interpolatoare de ordinul n în $[a, b]$. Mai presupunem că ecuaţia (14) are, pentru orice punct $x_0 \in [a, b]$, o singură soluţie $y(x)$ care satisface condiţiile

$$y(x_0) = y_0, \; y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \; i=1, 2, \ldots, n-1,$$

unde numerele $y_0, y_0^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots, n-1$ sînt date arbitrar. În aceste ipoteze are loc

TEOREMA 15: *Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă în $[a, b]$ şi de n ori continuu derivabilă în acest interval şi există o integrală a ecuaţiei (14) care ia valori egale cu $f(x)$ în $n+1$ puncte $x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}$ din $[a, b]$, atunci există un punct $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ astfel ca*

$$f^{(n)}(\xi) - G(\xi, f(\xi), f'(\xi), \ldots, f^{(n-1)}(\xi)) = 0 \tag{15}$$

Demonstraţia acestei teoreme am dat-o în [4].

Din teorema 15 rezultă imediat

TEOREMA 16: *Inegalitatea*

$$f^{(n)}(x) - G(x, f(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)) > 0, \; x \in [a, b] \tag{16}$$

este suficientă pentru ca $f(x)$ să fie convexă de ordinul n faţă de mulţimea G_n în $[a, b]$, în ipoteza că $f(x)$ este de n ori continuu derivabilă.

Pentru demonstraţie să observăm de la început că inegalitatea (16) este suficientă pentru ca $f(x)$ să fie n-valentă faţă de G_n în $[a, b]$. Dacă n-ar fi aşa, ar exista cel puţin $n+1$ puncte $x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}$, pe care $f(x)$ să fie G_n-polinomială şi atunci pe baza teoremei 15 ar exista un punct $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ în care am avea îndeplinită egalitatea (15), care e exclusă de (16). În baza unei teoreme din [5] $f(x)$ fiind continuă în $[a, b]$ şi n-valentă faţă de G_n, este convexă sau concavă de ordinul n faţă de G_n. Pentru a putea decide între aceste două cazuri, dăm mai întîi

L e m a 5: *Dacă $f(x)$ este o funcţie convexă de ordinul n faţă de G_n în $[a, b]$ şi e de n ori continuu derivabilă în $[a, b]$ iar $\varphi(x) \in G_n$ satisface condiţiile*

$$\varphi(x_0) = f(x_0), \; \varphi^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), \; i=1, 2, \ldots, n-1; \; x_0 \in (a, b)$$

atunci

$$\varphi(x) < f(x) \text{ pentru orice } x > x_0. \tag{17}$$

Demonstraţia lemei este elementară şi se obţine prin construcţia efectivă a funcţiei $\varphi(x)$, care prin ipoteză e unică. E suficient să considerăm un şir de funcţii din G_n, ale căror puncte de intersecţie cu $f(x)$ să conveargă către x_0.

O proprietate analoagă are loc pentru cazul cînd $f(x)$ e concavă, cu modificarea că în (17) are loc inegalitatea $\varphi(x) < f(x)$.

Trecem acum la demonstrația teoremei 16. Presupunem condițiile din teoremă satisfăcute. Să admitem că $f(x)$ ar fi concavă. Fie $x_0 \in (a, b)$ și $\varphi(x) \in G_n$ să satisfacă condițiile din lema 5. Atunci în vecinătatea lui x_0 are loc egalitatea

$$f(x)-\varphi(x)=f[x_0+(x-x_0)]-\varphi[x_0+(x-x_0)]$$
$$\frac{(x-x_0)^n}{n}[f^{(n)}(x_0)-\varphi^{(n)}(x_0)+R(x)] \tag{18}$$

unde $R(x)\to 0$ o dată cu $|x-x_0|^{n-1}$.

Prin ipoteză $f^{(n)}(x_0)<\varphi^n(x_0)$, iar pentru $x>x_0$ avem $\varphi(x)>f(x)$. Prin urmare dacă $x>x_0$ e suficient de aproape de x_0, egalitatea (18) nu poate avea loc. Deci $f(x)$ trebuie să fie convexă.

În mod analog se stabilește

TEOREMA 17: *Inegalitatea*

$$f^{(n)}(x)-G(x, f(x), f'(x),\dots, f^{(n-1)}(x))<0, x\in[x, b] \tag{19}$$

este suficientă pentru ca $f(x)$ să fie concavă de ordinul n față de G_n în ipotezele puse lui $f(x)$ în teorema 16.

Din ultimele două teoreme rezultă condiții suficiente pentru convexitate și concavitate de ordinul n, față de G_n. Acest rezultat este completat de

TEOREMA 18: *Pentru ca funcția $f(x)$ de n ori continuu derivabilă în $[a, b]$, să fie neconcavă sau neconvexă de ordinul n față de G_n în $[a, b]$, este necesar și suficient să fie îndeplinită inegalitatea*

$$f^{(n)}(x)-G(x, f(x), f'(x),\dots, f^{(n-1)}(x))\geqq 0 \quad x\in[a, b], \tag{20}$$

sau

$$f^{(n)}(x)-G(x, f(x), f'(x),\dots, f^{(n-1)}(x))\leqq 0 \quad x\in[a, b]. \tag{21}$$

Să presupunem că $f(x)$ este neconcavă. Să arătăm că nu putem avea în nici un punct din $[a, b]$ inegalitatea

$$f^{(n)}(x)-G(x, f(x), f'(x),\dots, f^{(n-1)}(x))<0. \tag{22}$$

Să admitem contrariul acestei afirmații: inegalitatea (22) are loc într-un punct $x_0\in(a, b)$. Din cauza neconcavității are loc o lemă analoagă lemei 5, cu semnul $\leqq$ în (17). Aplicînd în vecinătatea lui x_0 formula (18), ajungem în contradicție cu ipoteza făcută asupra lui $f(x)$. Raționamentul rămîne valabil și pentru extremitățile intervalului, din cauza continuității derivatei $f^{(n)}(x)$.

Necesitatea inegalității (21) pentru neconvexitate se stabilește în mod analog.

Pentru a demonstra suficiența condiției din teoremă ne folosim de teorema 6. Să presupunem că (17) e îndeplinit și funcția $f(x)$ nu este neconcavă de ordinul n față de G_n în $[a, b]$. Atunci există $n+1$ puncte $x_1<x_2<$ $<\dots<x_n<x_{n+1}$ pe care $f(x)$ este concavă. In intervalul (x_1, x_{n+1}) există un punct ξ, căruia i se aplică teorema 6. In ξ are loc și proprietatea din lema 5, cu semnul $>$ în (17). Aplicarea formulei (18) în vecinătatea lui ξ ne

conduce la o contradicție cu inegalitatea (20). La fel se raționează asupra inegalității (21).

Inegalitățile diferențiale expuse în acest paragraf sînt analoage celor cunoscute pentru funcțiile convexe obișnuite.

Academia R.P.R. – Filiala Cluj
Institutul de calcul

BIBLIOGRAFIE

1. T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables reélles.* Mathematica, 81–85, 1933.
2. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieure* (2). Mathematica, 12, 227–233, 1936.
3. E. Moldovan, *Proprietăți ale mulțimilor de funcții interpolatoare.* Bul. Univ. „V. Babeș” și „Bolyai” – Cluj, Seria șt. naturii, t. I, 31–42, 1957.
4. — *Asupra unor teoreme de medie.* Comunicările Academiei R.P.R., VI, 1, 7–12, 1956.
5. — *Asupra unei generalizări a noțiunii de convexitate.* Studii și cercetări științifice, Cluj, Seria I, t. VI, nr. 3–4, 65–74, 1955.
6. L. Tornheim, *On n-parameter families of fonctions and associated convex fonctions.* Trans. Am. Math. Soc. 69, 457–467, 1950.
7. G. Ascoli, *Sopra un nuovo algoritmo per la representazione delle funzioni di variabile reale.* Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa, (2), III, 243–253, 1934.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ
(Краткое содержание)

Изучаются некоторые свойства разбиения интервала определения некоторой функции $f(x)$ выпуклой (вогнутой) n-го порядка относительно множества F_n — интерполятивного n-го порядка — в последовательности подинтервалов, в которых $f(x)$ была функцией $(n-k)$-го порядка относительно подмножества F_{n-k} множества F_n — интерполяторное $(n-k)$-го прядка. Наше исследование основывается на введении понятия точки n-го порядка относительно F_n относительно функции $f(x)$. В § 7 даются дифференциальные неравенства, характеризующие некоторый важный класс функций n-го порядка.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONVEXES GÉNÉRALISÉES
(Résumé)

L'ensemble F_n des fonctions continues dans $[a, b]$ est interpolatoire d'ordre n si pour les points (1) et les nombres (2) arbitraires, il y a dans F_n une et une seule fonction $\varphi(x)$ qui remplit les conditions (3). On donne des théorèmes sur F_n. On fait un étude des fonctions convexes dont la définition est donnée dans le § 2 (voir aussi [5]). Il s'agit des propriétés de l'intervalle de définition d'une fonction convexe. Dans le § 7, on donne des inégalités differentielles qui caracterisent les fonctions convexes.