NOMOGRAME CU TRANSPARENT ORIENTAT PENTRU ECUAȚII CU PATRU ȘI CINCI VARIABILE

DE

LASCU BAL

Comunicarea prezentată la sesiunea Filialei Cluj a Academiei R.P.R., din 16—18 aprilie 1957.

1. *Generalități*. Se știe că pentru o ecuație cu mai mult de trei variabile nu este posibil, în general, să se găsească o nomogramă care să o rezolve. Există însă un mare număr de ecuații de acest fel care sînt nomografabile.

Astfel, pentru ecuațiile cu patru variabile de forma

$$F_{12}=G_{34}$$

se pot construi nomograme compuse, care în cazuri particulare pot fi nomograme cu dublă aliniere, nomograme cu transparent cruciform sau nomograme cu transparent paralel.

Pentru ecuațiile de forma

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_{34} & g_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

se pot construi nomograme cu puncte aliniate, formate din două scări și o rețea cotată. Ecuațiile de forma

$$z_4=F(f_{12}+f_3, g_{12})$$

se rezolvă prin nomograme simple, numite *nomograme romboidale*, iar ecuațiile de forma

$$f_1 f_4 + g_1 g_4 + f_1 f_{23} + g_1 g_{23} + f_{23}^2 + g_{23}^2 = 0$$

se rezolvă cu ajutorul unor nomograme cu transparent cu unghi drept. Există de asemenea nomograme cu compas, cu cazurile lor particulare simple la mînuire.

2

La ecuațiile cu cinci variabile se cunosc de asemenea multe tipuri care admit nomograme cu utilizare simplă. Așa sînt nomogramele ecuațiilor de forma

$$z_5 = F(f_{12}, g_{34}); \qquad z_5 = F[\varphi(f_{12}, g_3), \psi_4]$$

nomograme compuse; nomogramele obținute din cele corespunzătoare ecuațiilor cu patru variabile, în care s-a înlocuit o scară cu o rețea cotată, și alte tipuri particulare.

Toate aceste nomograme apar ca niște cazuri particulare din teoria morfologică a lui M. d'Ocagne. Întrucît cunoașterea a cît mai multe forme canonice pentru ecuațiile cu patru și cinci variabile (cele mai întîlnite în practică) este necesară unui laborator de calcul grafic, ne-am propus să căutăm cît mai multe tipuri de ecuații de acest fel (nomografabile).

Pentru a obține nomograme la ecuațiile cu număr mare de variabile, M. d'Ocagne a imaginat mișcarea unuia sau a mai multor plane mobile pe un plan fix, planele fiind prevăzute cu elemente geometrice gradate și constante. În fixarea pozițiilor între aceste plane și planul mobil intervin anumite relații între elementele cotate. Eliminînd între aceste relații variabilele auxiliare, ajungem la niște relații între un anumit număr de variabile, pe care le numim *forme canonice*. Configurațiile geometrice corespunzătoare lor le numim *nomogramele ecuațiilor*. Simplu de mînuit și destul de precise sînt nomogramele cu un singur plan mobil, care poate fi materializat printr-un transparent.

Planul mobil are trei grade de libertate. Legătura dintre plane care micșorează cu *unu* numărul de grade de libertate, o numim *contact*. Se pot concepe două tipuri de contacte utilizabile: *contactul de întretăiere* și *contactul de tangență*. În contactul de întretăiere un punct al unui plan aparține unei curbe din cel de-al doilea plan. Punctul poate fi intersecția a două curbe cotate sau constante (fig. 1, a).

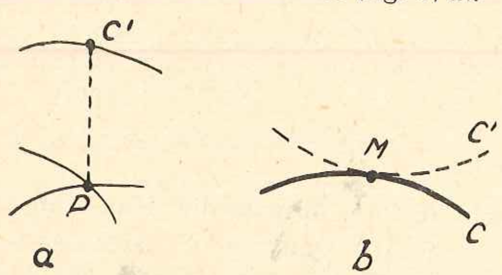


Fig. 1

În contactul de tangență o curbă dintr-un plan este tangentă unei curbe din cel de-al doilea plan. Coincidența unui punct dintr-un plan cu un punct din al doilea plan sau a unei drepte dintr-un plan cu o dreaptă din al doilea plan micșorează cu două unități numărul gradelor de libertate și din acest motiv se numește *contact dublu*.

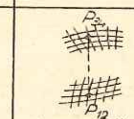
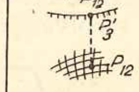
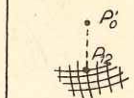
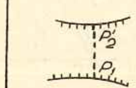
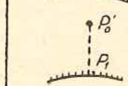
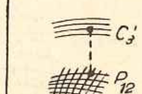
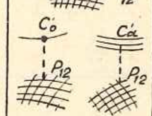
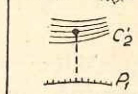
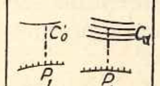
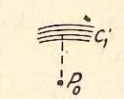
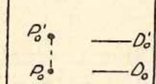
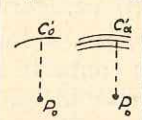
Trei contacte simple determină poziția unui plan și din această cauză aceste contacte se numesc *contacte de poziție*; al patrulea contact dă rezultatul și se numește *contact de rezolvare*. În cazul nomogramei generale cu un plan mobil, succesiunea contactelor se scrie (fig. 2)

$$P_{12} \vdash C'_3 \,;\; P_{4,5} \vdash C'_6 \,;\; P_{7,8} \vdash C'_9 \,;\; P_{10,11} \rightarrow C'_{12} \,,$$

numite *formule de structură*.

3

TABEL

Nr. crt.	Formule de structură	Felul contactului	Figura	Notarea contactului
1	$P_{12} \vDash P'_{34}$	Contact dublu cu patru elemente cotate		(IV)
2	$P_{12} \vDash P'_3$	Contact dublu cu trei elemente cotate		(III)
3	$P_{12} \vDash P'_0$	Contact dublu cu două elemente cotate		(II)
4	$P_1 \vDash P'_2$	Contact dublu cu două elemente cotate		(II')
5	$P_1 \vDash P'_0$	Contact dublu cu un element cotat		(I)
6	$P_{12} \vdash C'_3$	Contact simplu cu trei elemente cotate		(3)
7	$P_{12} \vdash C'_0$ $P_{12} \vdash C'_\alpha$	Contact simplu cu două elemente cotate		(2)
8	$P_1 \vdash C'_2$	Contact simplu cu două elemente cotate		(2')
9	$P_1 \vdash C'_0$ $P_1 \vdash C'_\alpha$	Contact simplu cu un element cotat		(1)
10	$P_0 \vdash C'_1$	Contact simplu cu un element cotat		(1')
11	$P_0 \vDash P'_0$ $D_0 \vDash D'_0$	Contact dublu cu elemente constante		(θ)
12	$P_0 \vdash C'_0$ $P_0 \vdash C'_\alpha$ $P_{0\infty} \vdash D'_C$	Contact simplu cu elemente constante		(0) ρ

Raportînd elementele geometrice la sisteme carteziene ortogonale de referințe, xoy și $x'o'y'$, formula de structură conduce la patru relații între variabilele $z_1, z_2, \ldots, z_{12}$ și α, a, b, definiți prin relațiile

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b$$

Eliminarea parametrilor α, a, b între cele patru relații conduce la ecuația care se rezolvă cu nomograma obținută.

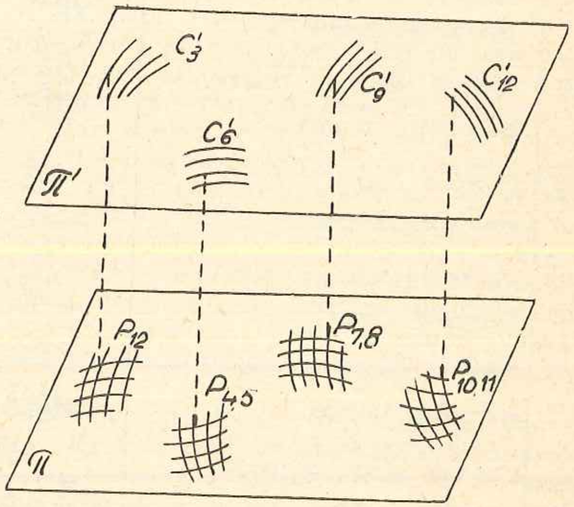


Fig. 2

Forma elementelor geometrice care intră în contact, precum și natura contactelor determină tipul de ecuație care se rezolvă cu nomograma formată. Se vede că nomograma cea mai generală rezolvă o anumită ecuație cu 12 variabile.

În lucrarea de față considerăm numai contactele de intretăiere, un singur plan mobil și deplasarea care se reduce la două translații:

$$x' = x + a\,; \qquad y' = y + b.$$

Pentru a obține ecuații cu patru și cinci variabile, vom introduce un număr convenabil de elemente constante.

2. *Clasificarea contactelor.* Ordonînd contactele după numărul elementelor cotate, rezultă categoriile de contacte din tabelul de pe pagina precedentă.

3. *Nomograme cu transparent orientat.* Grupînd în toate modurile posibile cîte patru contacte simple sau un contact dublu și două simple, astfel ca un contact simplu să fie paralelism și numărul elementelor gradate să fie patru, găsim toate tipurile de nomograme cu *transparent orientat* (deplasarea planului mobil se reduce la două translații) pentru ecuațiile cu patru variabile, pe care le trecem în tabloul următor:

Nr.crt.	Gruparea de contacte	Forma canonică	Observații
1.	IV, 0, p	$F(\varphi_{34}-f_{12}, \psi_{34}-g_{12})=0$	
2.	III, 1, p	$F(f_4+\varphi_3-f_{12}, g_4+g_3-g_{12})=0$	
3.	III, 1′, p	$z_4=F(f_{12}-\varphi_3, g_{12}-\psi_3)$	
4.	3, 1′, 0, p	$z_4=F(f_{12}+g_3, g_{12}+b_3)$	
5.	3, 1, 0, p.	$z_4=F(f_{12}+a_3, g_{12}+b_3)$	
6.	2, 2, 0, p	$F_{12}=G_{34}$	
7.	2, 2′, 0, p	$F_{12}=G_{34}$	
8.	2′, 2′, 0, p.	$F_{12}=G_{34}$	
9.	1′, 1′, 2, p	$F(f_{12}+a_{34}, g_{12}+b_{34})=0$	
10.	2, 1, 1, p	$F(f_{12}+a_{34}, g_{12}+b_{34})=0$	
11.	2′, 1, 1, p	$z_4=F(f_1+a_{23}, g_1+b_{23})$	
12.	2′. 1′, 1′, p	$z_4=F(f_1+a_{23}, g_1+b_{23})$	
13.	2, 1, 1′, p	$z_4=F(f_1+a_{23}, g_1+b_{23})$	
14.	II, 2, p	$F(f_1-f_2+f_{34}, g_1-g_2+g_{34})=0$	**Caz particular la rigla de calcul**
15.	II, 2′, p	$z_4=F(f_1+f_2-f_3, g_1+g_2-g_3)=0$	
16.	II′, 2′, p	$z_4=F(f_{12}+f_3, g_{12}+g_3)$	**Caz particular nomograma romboidală**
17.	II′, 2, p	$F(f_{12}+f_{34}, g_{12}+g_{34})=0$	
18.	I, 3, p	$z_4=F(f_{12}-f_3, g_{12}-g_3)$	

Aceste nomograme rezolvă următoarele forme canonice:

$$F(f_{12}-f_{34}, g_{12}-g_{34})=0 \qquad (A)$$
$$F(f_{12}+f_3, g_{12}+g_3, z_4)=0 \qquad (B)$$
$$F_{12}=G_{34} \qquad (C)$$

cu cazurile particulare

$$F(f_1+f_2-f_3, g_1+g_2-g_3, z_4)=0$$
$$F(f_1+f_2-f_{34}, g_1+g_2-g_{34})=0.$$

Ca niște cazuri particulare apar: nomograma cu index paralel, nomograma hexagonală, nomograma romboidală și unele nomograme compuse cu dublă aliniere, toate fiind foarte răspîndite din cauza simplității utilizării lor.

O problemă care se pune este stabilirea condițiilor necesare și suficiente ca o ecuație cu patru variabile

$$F(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$$

să îmbrace una din formele canonice (A), (B), (C). Pentru forma (C) avem condițiile lui Goursat, iar forma (B) în cazul particular $g_3=0$ a fost studiată atît de colectivul de nomografie din Cluj [2], cît și de J. B e l g r a n o — în moduri diferite și independent [3].

Cele cinci forme prezentate mai sus se pot rezolva prin cîte un grup de nomograme distincte, atît prin compoziția lor cît și prin utilizare. Astfel forma (A) se poate rezolva prin cinci nomograme, forma (B) prin șapte nomograme, forma (C) prin trei nomograme, iar ultimele două forme se pot rezolva respectiv prin cîte o nomogramă sau două nomograme distincte.

Alegerea nomogramei depinde de natura ecuației de rezolvat, a variabilei necunoscute și a preciziei cerute. Particularizînd rețelele și scările, putem obține o foarte mare varietate de nomograme. Există numeroase formule din științele tehnice care se rezolvă cu astfel de nomograme. Formula lui Ganguillet-Kutter

$$U=\frac{23+\dfrac{0{,}00155}{T}+\dfrac{1}{n}}{1+(23+\dfrac{0{,}00155}{T})\dfrac{n}{\sqrt{R}}}\sqrt{R.T}$$

prin notații convenabile

$$f_1=\frac{1}{R}\quad;\qquad f_{23}=(23+\frac{0{,}00155}{T})\,n$$

$$g_1=\sqrt{R}\quad;\qquad g_{23}=(23+\frac{0{,}00155}{T}+\frac{1}{n})\sqrt{T}$$

se poate pune sub forma

$$U(1+e^{\log f_1+\log f_{23}})-e^{\log g_1+\log g_{23}}=0$$

și astfel se poate rezolva cu una din nomogramele formei a doua canonică (B).

Grupînd în mod analog cazului anterior cele patru contacte simple sau un contact dublu și două simple, astfel ca numărul elementelor cotate să fie cinci, găsim nomogramele cu transparent pentru ecuațiile cu cinci variabile :

Nr. crt.	Gruparea de contacte	Forma canonică
1.	IV, 1, p	$z_5=F(f_{34}-f_{12},\ g_{34}-g_{12})$
2.	IV, 1′, p	$F(f_5+f_{12}-f_{34},\ g_5+g_{34}-g_{12})=0$
3.	III, 2, p	$F(f_{45}+f_3-f_{12}, g_{45}+g_3-g_{12})=0$
4.	III, 2′, p	$z_5=F(f_4+f_3-f_{12}, g_4+g_3-g_{12})$
5.	II, 3, p	$z_5=F(f_1+f_{23}-f_4,\ g_1+g_{23}-g_4)$
6.	II′, 3, p	$z_5=F(f_{34}-f_{12},\ g_{34}-g_{12})$
7.	3, 1, 1, p	$z_5=F(f_{12}+a_{45},\ g_{12}+b_{45})$
8.	3, 1, 1′, p	idem
9.	3, 1′, 1′, p	idem

Pentru grupările $2, 2, 1', p$; $2, 2', 1', p$; $2', 2', 1', p$; $2', 2',\ 1, p$ nu se pot găsi forme canonice, din cauză că nu se pot elimina parametrii α, a, b, în general.

Găsim pentru nomogramele cu transparent ale ecuațiilor cu cinci variabile formele canonice

$$z_5=F(f_{34}+f_{12},\ g_{34}+g_{12})\qquad (D)$$

$$F(f_5+f_{34}+f_{12},\ g_5+g_{34}+g_{12})=0\qquad (E)$$

cu un caz particular

$$z_5=F(f_1+f_2+f_{34},\ g_1+g_2+g_{34}).\qquad (F)$$

E de remarcat că nici pentru formele canonice (D), (F) și (F) nu s-au găsit condițiile ca o ecuație cu cinci variabile să se poată scrie sub aceste forme.

În electrotehnică se întrebuințează următoarea formulă pentru măsurarea tensiunii de emisie într-o linie

$$T^2=(T_1\cos\varphi+RI)^2+(T_1\sin\varphi+XI)^2$$

care prin notațiile

$$z_5=T^2$$

$$f_{12}=T_1\sin\varphi\ ;\qquad g_{12}=T_1\cos\varphi$$

$$f_{34}=RI\ ;\qquad g_{34}=XI\qquad (R \text{ fiind dat})$$

devine

$$z_5=(f_{12}+f_{34})^2+(g_{12}+g_{34})^2,$$

care e de prima formă canonică (A) și se poate rezolva printr-una din cele cinci nomograme corespunzătoare acestei forme.

Această lucrare nu epuizează clasele de ecuații cu patru și cinci variabile nomografabile. Se pot căuta forme canonice corespunzătoare unor cazuri particulare din nomograma generală cînd transparentul are trei grade de libertate, sau se pot folosi două plane mobile și uneori — cînd contactul de tangentă e ușor de observat — și nomograme cu contact de tangentă. Această varietate mare de nomograme ajută nomografului să răspundă la cele mai variate formule oferite de disciplinele tehnice.

Academia R.P.R. — Filiala Cluj
Institutul de calcul

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bal și F. Rado, *Lecțiuni de nomografie*. Edit. tehnică, București, 1956.
2. F. Rado, L. Bal, E. Gergely și Gh. Ionescu, *Lucrările consfătuirii de geometrie diferențială din 9—12 iunie 1955*, Acad. R.P.R.-Baza Timișoara, 1955, p. 361—366.
3. T. Belgrano, *Tratado de nomografia*. Inst. tecnico de la construcción y del cemento, Madrid, 1953.
4. W. Margoulis, *Les abaques à transparent orienté ou tournant*. Gauthier-Villars, Paris, 1931.
5. S. G. Hovanski, *Vîcislitelnaia Matematika i vîcisletelnaia Tehnika*. Sb. II, 1955, p. 1—39.

НОМОГРАММЫ С ОРИЕНТИРОВАНЫМ ТРАНСПАРАНТОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧЕТЫРЬМЯ И С ПЯТЬЮ ПЕРЕМЕННЫМИ

(Краткое содержание)

Автор данной работы систематизирует контакты пересечения с целью получения номограммы с ориентированным транспаратом для уравнений с четырьмя и с пятью переменными и дается пересечение этих номограмм, указывая и канонические уравнения (A, B, C, D, E, F).

Даются и несколько примеров, входящих в наиденных канонические формулы.

Работа является частью некоторого более обширного исследования возможностей номографирования уравнений с четырьмя и с пятью переменными.

NOMOGRAMMES À TRANSPARENT ORIENTÉ POUR LES ÉQUATIONS À QUATRE ET À CINQ VARIABLES

(Résumé)

Dans ce travail, l'auteur systématise les contacts d'intersection en vue d'obtenir des nomogrammes à transparent orienté pour les équations à quatre et à cinq variables. Il fait une énumération de ces nomogrammes, en montrant aussi les équations canoniques que l'on obtient (A, B, C, D, E, F). Il donne quelques exemples qui s'encadrent dans les formes canoniques trouvées.

Le présent travail représente une partie d'une étude plus vaste s'occupant de la possibilité de nomographier les équations à quatre et à cinq variables.