VARIETĂȚILE n-DIMENSIONALE ÎN SPAȚIILE LUI HILBERT, CONSIDERATE CA SPAȚII DE DISTANȚĂ

DE

E. GERGELY
(Cluj)

Comunicare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8—13 decembrie 1960, Cluj

În două lucrări anterioare [1], [2] am introdus și am tratat varietățile n-dimensionale V_n ale spațiilor separabile ale lui Hilbert.

În lucrarea prezentată studiem aceste varietăți ca spații de distanță.

În lucrările [1], [2] am introdus curbele în V_n, am stabilit pentru ele noțiunea de lungime de arc, mai departe noțiunile de curbe geodezice și de cele mai scurte curbe, condițiile existenței acestora și în această privință unele probleme ale geometriei intrinseci în aceste varietăți.

Pe baza acestor definiții și teoreme, sîntem în stare să studiem varietățile V_n ca substratul unei geometrii de distanță.

Într-o varietate dată V_n, fie $\{C_r\}$ mulțimea curbelor rectificabile. Să numim cu $I(a, b)$ mulțimea lungimelor acelor curbe din $\{C_r\}$ care trec prin două elemente fixate a și b în V_n. Infimul acestei mulțimi (de numere reale) este o funcțională a perechilor de elemente în V_n; notăm infimul acesta cu $d_{V_n}(a, b)$ și îl numim ,,distanța perechilor de elemente în varietatea V_n".

Distanța astfel definită există și în cazul cînd nu există o astfel de curbă prin elemente a și b care realizează această distanță; adică $d_{V_n}(a, b)$ este determinată pentru orice pereche de elemente ale varietății V_n.

În baza proprietăților tratate și demonstrate în [1] și [2] distanța $d_{V_n}(a, b)$ satisface toate condițiile cerute pentru noțiunea de distanță dintr-o geometrie de distanță. Astfel distanța $d_{V_n}(a, b)$ generează în V_n o geometrie de distanță. Această geometrie o numim geometria de distanță generalizată în V_n.

În cazul cînd pentru orice pereche de elemente $(a, b) \in V_n$ există o curbă, cea mai scurtă, care leagă aceste elemente — sau în general o mulţime de curbe cele mai scurte, adică atunci cînd $d_{V_n}(a, b)$ se realizează, — în acest caz noi numim geometria de distanţă construită prin aceste curbe, geometria de distanţă proprie în V_n. Pentru construirea unei geometrii de distanţă este încă potrivit cazul, dacă între două elemente oarecare $a, b \in V_n$ există numai o singură curbă realizatoare a distanţei $d_{V_n}(a, b)$ În acest caz în V_n se poate construi o geometrie de tip A. D. Alexandrov. În [1] am demonstrat că pentru fiecare n, există varietăţi în spaţiul lui Hilbert în care curba realizatoare a distanţei este unică.

În mulţimea M a curbelor rectificabile care trec prin elementele a şi b — în interesul unui studiu mai adînc al geometriei de distanţă — introducem şi noţiunea de distanţă între două curbe în M. Fie $G_0\left[x_1^0(t), \ldots, x_n^0(t)\right]$ şi $G_1\left[x_1^{(1)}(t), \ldots, x_n^{(1)}(t)\right]$ două curbe care leagă elementele a şi b, $t \in [t_1, t_2]$. (La parametrizarea curbelor putem folosi acelaşi interval $[t_1, t_2]$, făcînd eventuală transformare a parametrului). Distanţa acestor curbe este definită — la o parametrizare dată — ca $\sup\limits_{t \in [t_1, t_2]} \|G_0(t) - G_1(t)\|$. Supremul acestor distanţe pentru toate parametrizările permise, este numit distanţă absolută a curbelor.

Definim şi distanţa slabă sau ε-distanţă între două curbe care leagă elementele a, $b \in V_n$. Distanţa slabă va fi $\sup\limits_{t \in [t_1, t_2]} \|G_0(t) - G(t)\|$, dacă pentru parametrizare impunem condiţia ca distanţa în sensul normei a două elemente pe curbele C_0, respectiv C_1 care aparţin la aceeaşi valoare a parametrului t, să fie mai mică ca ε.

Aceste curbe cu „ε-distanţă" determină în mulţimea curbelor care leagă a şi b anumite familii, fascicole de curbe.

Mulţimea M a curbelor care leagă a şi b este numită continuă, dacă are proprietatea că pentru un $\varepsilon > 0$ oarecare se împarte în aceste fascicole şi pentru fiecare curbă în M există — oricare ar fi $\varepsilon > 0$ — o mulţime de curbe, cu ε-distanţă.

În mulţimea M cu această noţiune de continuitate, ε-distanţa între două curbe, este o funcţie continuă de numărul ε într-o vecinătate a lui 0 şi lungimea de curbă, este o funcţie continuă a distanţei între două curbe. Astfel într-o mulţime M continuă, întotdeauna există curbe, care realizează minimul, adică există curbele cele mai scurte.

Astfel, dacă V_n are o astfel de structură încît mulţimea curbelor care leagă o oarecare pereche de puncte este totdeauna continuă, atunci V_n are o geometrie de distanţă proprie.

În [2] am tratat mai multe V_n speciale. În cazurile de acolo a şi b, cînd funcţiile componente ale varietăţilor respective sînt forme algebrice de grad egal sau de grad mărginit, structura de mai sus — cum se demonstrează uşor — este întodeauna realizată şi astfel, în aceste cazuri, există o geometrie proprie de distanţă în V_n.

Observaţie. Geometria de distanţă definită mai înainte în V_n — cum se vede din cele anterioare — şi geometria intrinsecă a varietăţii V_n sînt în general diferite. Construcţia unei geometrii intrinseci presupune existenţa şi unicitatea unei curbe, cea mai scurtă între două elemente ; în schimb

geometria de distanţă generalizată nu presupune nici una din aceste condiţii. Geometria de distanţă proprie, cere existenţa, dar nu şi unicitatea curbelor celor mai scurte. Geometria de distanţă generalizată există în fiecare V_n, pentru existenţa unei geometrii de distanţă proprii este suficientă — după cum am văzut mai înainte — continuitatea mulţimii de curbe care leagă două elemente, definite în sensul de mai înainte.

În geometria de distanţă introdusă anterior, putem defini pentru trei elemente şi relaţia „între". Spunem că elementul $c \in V_n$ este „între" elementele a şi b, dacă c este situat pe o curbă rectificabilă care leagă a şi b şi dacă $d_{V_n}(a, c) + d_{V_n}(c, b) = d_{V_n}(a, b)$.

Să notăm relaţia „între" cu $a\,c^*b$, unde c^* indică faptul că c este „între" a şi b. Această relaţie are proprietatea de simetrie $a\,c^*\,b \rightarrow b\,c^*a$.

Dacă $d_{V_n}(a, b) = d_H(a, b)$ — unde $d_H(a, b)$ este distanţa în H în sensul normei, atunci varietatea V_n o numim convexă în H şi în acest caz V_n este total scufundată în H în sensul geometriei de distanţă. Dacă relaţia $d_{V_n}(a, b) = d_H(a, b)$ este satisfăcută numai pentru anumite perechi de elemente (a, b), atunci avem o scufundare parţială a lui V_n în H şi dacă astfel de (a, b) nu există, atunci V_n nu este scufundabilă în sensul geometriei de distanţă în H.

Fie $V_n^{(1)}$ şi $V_n^{(2)}$ două varietăţi n-dimensionale într-un spaţiu H al lui Hilbert. Numim $V_n^{(1)}$ şi $V_n^{(2)}$ izometrici, dacă între elementele lor există o relaţie biunivocă, iar pentru orice pereche de elemente corespunzătoare (a, b) şi (a, b) avem îndeplinită egalitatea $d_{V_n^{(1)}}(a, b) = d_{V_n^{(2)}}(a', b')$. Dacă relaţia aceasta este valabilă numai pentru anumite perechi de elemente, atunci izometria este parţială şi în acest caz mulţimea acestor (a, b), respectiv (a', b') formează în $(V_n^{(1)} \times V_n^{(1)})$, respectiv în $(V_n^{(2)} \times V_n^{(2)})$, mulţimea de definiţie a izometriei.

În acest caz cînd în $V_n^{(1)}$, respectiv în $V_n^{(2)}$ componentele de funcţii ale elementelor satisfac condiţia lui Lipschitz

$$|f_i^{(s)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_i^{(s)}(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n)| \leqslant K_i^{(s)} \Delta x_1 \ldots \Delta x_n$$

$(i = 1, 2, \ldots; s = 1, 2)$, atunci şi seriile $\sum\limits_i K_i^{(s)}$ $(s = 1, 2)$ sînt convergente.

Dacă $\sum\limits_i K_i^{(s)} = K_s$ şi $K_1 = K_2$, atunci $V_n^{(1)}$ şi $V_n^{(2)}$ sînt izometrice.

În adevăr, conform definiţiei lungimii de arc date în [1], elementul de arc generalizat este de forma

$$\| \Sigma \{ f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_i(x_2 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) \} e_i \|$$

şi din aceasta, pe baza egalităţii (*), urmează identitatea celor două elemente de arc din $V_n^{(1)}$ respectiv $V_n^{(2)}$, adică izometria acestor varietăţi. Astfel am găsit pentru o clasă importantă a varietăţilor, o condiţie suficientă a izomorfiei.

n-МЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ВЗЯТЫХ В КАЧЕСТВЕ ПРОСТРАНСТВ РАССТОЯНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В многообразии V_n в H [1], [2] определяется расстояние $d_{V_n}(a, b)$ элементов $a, b \in V_n$, как инфимум длин $l(a, b)$ спрямляемых кривых из V_n, соединяющих элементы a и b. $d_{V_n}(a, b)$ определяет в V_n геометрию расстояния и называем её обобщенной геометрией расстояния в V_n. В том случае, когда определеннное таким образом расстояние осуществляется спрямляемыми кривыми в V_n или в подмножестве V_n то говорим о собственной геометрии расстояния в V_n или в соотвествующем подмножестве V_n. Если осуществляющая кривая является единственной в V_n, то можно построить геометрию типа А. Д. Александрова.

Определяя одно расстояние во множестве кривых, связывающих элементы a, b и одновременно слабое расстояние, вводим понятие о непрерывности во множестве этих кривых с ε-расстоянием.

Теорема 1. *Если V_n имеет такую структуру, что множество кривых связывающих некоторую пару точек является непрерывным, то V_n имеет собственную геометрию расстояния. В случаях* a) *и* b) *в* [2] *существует собственная геометрия расстояния.*

Геометрия расстояния и присущая геометрия многообразия V_n вообще различны.

Многообразие V_n является выпуклой (соответственно, частично-выпуклой) если $d_{V_n}(a, b) = d_H(a, b)$ в V_n (или в части V_n).

Два многообразия $V_n^{(1)}$ и $V_n^{(2)}$ изометричны если между ними существует такое взаимно-однозначное соотношение, что все вышеопределенные расстояния идентичны для всех пар соответствующих элементов (a, b) и (a', b').

Теорема 2. *Если в $V_n^{(1)}$ соответственно в $V_n^{(2)}$ компоненты функций элементов удовлетворяют условию Липщица с константами $K_i^{(1)}$, соответственно $K_i^{(2)}$, и $\Sigma K_i^{(1)}$, соответственно $\Sigma K_i^{(2)}$ стремятся к K_1, соответственно к K_2 и $K_1 = K_2$ то $V_n^{(1)}$ и $V_n^{(2)}$ изометричны.*

LES VARIÉTÉS n-DIMENSIONNELLES DANS LES ESPACES HILBERTIENS CONSIDÉRÉS COMMES DES ESPACES DE DISTANCE

RÉSUMÉ

Dans une variété V_n dans H [1], [2], on définit la distance $d_{V_n}(a, b)$ des éléments $a, b \in V_n$ comme l'infimum des longuers $l(a, b)$ des courbes rectifiables de V_n qui joignent les éléments a et b. $d_{V_n}(a, b)$ détermine dans V_n une géometrie de distance que nous appelons géeométrie de distance

généralisée dans V_n. Au cas où la distance définie de cette manière est réalisée par des courbes rectifiables dans V_n ou dans un sous-ensemble de V_n, alors on parle d'une géométrie de distance propre dans V_n ou dans le sous-ensemble respectif de V_n. Si la courbe réalisatrice est unique dans V_n, on peut construire une géométrie du type A. D. Alexandrov.

En déterminant une distance dans l'ensemble des courbes qui relient les éléments a, b et aussi la distance faible, on introduit la notion de continuité dans l'ensemble de ces courbes à ε-distance.

Theorème 1. *Si V_n a une structure telle que l'ensemble des courbes qui relient une paire de points quelconque est continu, alors V_n a une géométrie de distance propre. Dans les cas* a) *et* b) *de* [2], *il existe une géométrie de distance propre.*

La géométrie de distance et la géométrie intrinsèque d'une variété V_n sont généralement différentes.

La variété V_n est convexe (respectivement partiellement convexe) si $d_{V_n}(s, b) = d_H(a, b)$ dans V_n (ou dans une partie de V_n).

Deux variétés $V_n^{(1)}$ et $V_n^{(2)}$ sont isométriques s'il existe entre elles une relation biunivoque telle que les distances définies ci-dessus soient identiques pour toutes les paires d'éléments correspondants (a, b) et (a', b').

Theoreme 2. *Si dans $V_n^{(1)}$ respectivement dans $V_n^{(2)}$ les fonctions composantes des éléments satisfont à la condition de Lipschitz aux constantes $K_i^{(1)}$ respectivement $K_i^{(2)}$ et $\Sigma K_i^{(1)}$ respectivement $\Sigma K_i^{(2)}$ tendent vers K_1 respectivement K_2 et $K_1 = K_2$, alors $V_n^{(1)}$ et $V_n^{(2)}$ sont isométriques.*

BIBLIOGRAFIE

1. E. Gergely, *Probleme din geometria varietăţilor n-dimensionale în spaţiile separabile ale lui Hilbert.* Stud. şi cercet. de mat. (Cluj), **XI**, 15–21 (1960).
2. E. Gergely, *Despre unele clase de varietăţi n-dimensionale în spaţii separabile ale lui Hilbert.* Stud. şi cercet. de mat. (Cluj), **XI**, 267–271 (1960).

Primit la 15. XI. 1960.