GENERALIZAREA ECUAȚIEI FUNCȚIONALE A BISIMETRIEI*)

DE

M. GHERMĂNESCU
(București)

Comunicare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8—13 decembrie 1960, Cluj

I

1. Problema caracterizării funcționale a bisimetriei, a asociativității, a semisimetriei și a transitivității a luat un avînt deosebit în ultimii ani, datorită mai ales cercetărilor lui J. Aczél, M. Hosszú și F. Radó, din cauza aplicațiilor în nomografie.

Astfel, pentru a nu cita momentan decît bisimetria, ecuația funcțională ce o caracterizează

$$f[f(u, x), f(y, v)] = f[f(u, y), f(x, v)] \tag{1}$$

a fost integrată de J. Aczél [2], apoi de F. Radó [10], care au dat mulțimea soluțiilor continue și strict monotone

$$f(X, Y) = H^{-1}[aH(X) + bH(Y) + c], \tag{2}$$

unde a, b, c, sînt constante arbitrare, iar H o funcție arbitrară, continuă și strict monotonă.

Ecuația (1) a fost generalizată de M. Hosszú [illegible], sub forma

$$f[g(u, x), h(y, v)] = \varphi[\lambda(u, y), \mu(x, v)], \tag{3}$$

care a găsit mulțimea soluțiilor

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= H^{-1}[F_1(X) + G_1(Y)], \\ g(X, Y) &= F_1^{-1}[F_2(X) + G_2(Y)], \\ h(X, Y) &= G_1^{-1}[F_3(X) + G_3(Y)], \\ \varphi(X, Y) &= H^{-1}[F_4(X) + G_4(Y)], \\ \lambda(X, Y) &= F_4^{-1}[F_2(X) + F_3(Y)], \\ \mu(X, Y) &= G_4^{-1}[G_2(X) + G_3(Y)], \end{aligned} \tag{4}$$

---

*) Această lucrare se publică și în limba franceză în revista „Mathematica", vol. 3 (26), 1961.

în ipoteza particulară a derivabilității și a monotoniei stricte. În ipoteza în care funcțiile F_i, G_i, H, f, φ, λ, μ sînt arbitrare, continue și strict monotone, rezultatul precedent a fost regăsit de F. Radó [10].

În prima parte a acestei comunicări arătăm că *asociativitatea, asociativitatea generalizată, semisimetria, tranzitivitatea, tranzitivitatea generalizată, sînt forme particulare ale bisimetriei generalitate.*

În partea doua, extindem rezultatele din prima parte la ecuații funcționale satisfăcute de funcții cu mai mult decît două argumente.

2. Asociativitatea. Ecuația funcțională

$$f[f(x, y), z] = f[x, f(y, z)], \tag{5}$$

considerată pentru prima oară de Abel [1], a fost reluată succesiv de J. Aczél, [2], L. E. J. Brouwer [3], precum și de F. Radó [10], în ipoteze din ce în ce mai largi, obținîndu-i-se mulțimea soluțiilor continue și strict monotone

$$f(X, Y) = H^{-1}[H(X) + H(Y)], \tag{6}$$

cu H continuă și strict monotonă arbitrară.

F. Radó a considerat apoi ecuația funcțională mai generală [10],

$$f[g(x, y), z] = \varphi[x, \mu(y, z)], \tag{7}$$

pentru care a dat mulțimea soluțiilor continue și strict monotone

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= H_3^{-1}[H_1(X) + G_2(Y)], \\ \varphi(X, Y) &= H_3^{-1}[F_1(X) + H_2(Y)], \\ g(X, Y) &= H_1^{-1}[F_1(X) + G_1(Y)], \\ \mu(X, Y) &= H_2^{-1}[G_1(X) + G_2(Y)]. \end{aligned} \tag{8}$$

în care F_1, G_1, G_2, H_1, H_2, H_3 sînt funcții continue și strict monotone arbitrare.

Vom arăta că atît asociativitatea cît și asociativitatea generalizată sînt cazuri particulare ale bisimetriei generalizate.

În adevăr, dacă în formulele (4) luăm

$$F_3 \equiv 0, G_3 \equiv G_1, F_4 \equiv F_2$$

acestea devin:

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= H^{-1}[F_1(X) + G_1(Y)], \\ \varphi(X, Y) &= H^{-1}[F_2(X) + G_4(Y)], \\ g(X, Y) &= F_1^{-1}[F_2(X) + G_2(Y)], \\ \mu(X, Y) &= G_4^{-1}[G_2(X) + G_1(Y)], \end{aligned}$$

care coincid cu (8), în afara notațiilor. Acestea la rîndul lor, se reduc la (6), dacă lăum toate funcțiile F_i, G_i, H_i egale cu H.

Accentăum că această observație prin care am încadrat mulțimea sistemelor de soluții ale ecuației asociativității generalizate, în cea a bisimetriei generalizate, se bazează pe cunoașterea mulțimii soluțiilor acestor ecuații. Acest lucru nu poate fi observat direct pe ecuații, căci particularizările făcute corespund la $h(y, v) \equiv v$ și $\lambda(x,y) \equiv u$, prin care ecuația (3) trece formal în ecuația (7), dar despre mulțimea soluțiilor continue și strict monotone ale ecuației (7) nu putem afirma nimic, căci funcțiile $h(y,v) \equiv v$ și $\lambda(u,y) \equiv u$ ne fiind strict monotone, acestea nu sînt cuprinse in mulțimea soluțiilor continue și strict monotone ale ecuației (3).

3. Pseudosimetria. F. Radó a rezolvat ecuația funcțională

$$f[f(u, x), y] = f[f(u, y), x], \tag{9}$$

considerată anterior de A. Schweitzer [11] și apoi de M. Hosszú [9], obținînd mulțimea soluțiilor continue și strict monotone ale acesteia, sub forma :

$$f(X, Y) = H^{-1}[H(X) + G(Y)]. \tag{10}$$

în care H și G sînt funcții continue și strict monotone. F. Radó denumește *semisimetrie* proprietatea caracterizată prin ecuația funcțională (9).

Pentru motive ce le vom arăta mai departe, vom utiliza calificativul de *pseudosimetrie*, în loc de semisimetrie.

Pe ecuația funcțională (1), nu se citește că pseodosimetria este un caz particular al bisimetriei. Este însă vizibil că formal (9) este un caz particular al ecuației funcționale (3) ; particularizarea necesară $h(y, v) \equiv y$, $\mu(x, v) \equiv x$, $f \equiv g \equiv \varphi \equiv \lambda$ cere:

$$H \equiv F_1 \equiv F_2 \equiv F_4 \,;\; G_1 \equiv G_2 \equiv G_4 \equiv F_3,\; G_3 \equiv 0. \tag{11}$$

Ținînd seama de (11), sistemul de funcție (4) trece într-adevăr în (9) și astfel pseodosimetria este un caz particular al bisimetriei generalizate.

4. Tranzitivitatea. Ecuația funcțională a tranzitivității

$$f[f(x, z), f(y, z)] = f(x, y) \tag{12}$$

a fost studiată pentru prima oară de A. R. Schweitzer, în ipoteza derivabilității, [11], apoi de M. Hosszú [9], în ipoteza mai generală a continuității și a monotoniei stricte, dînd mulțimea soluțiilor

$$f(X, Y) = F^{-1}[F(X) - F(Y)]. \tag{13}$$

unde F este o funcție arbitrară, continuă și strict monotonă.

M. Hossz ú a dat în aceeaşi lucrare şi ecuaţia funcţională a *tranzitivităţii generalizate*

$$f[g(x, z), h(y, z] = \varphi(x, y) \tag{14}$$

cu mulţimea soluţiilor

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= H^{-1}[F_1(X) - G_1(Y)], \\ \varphi(X, Y) &= H^{-1}[F_2(X) - G_2(Y)], \\ g(X, Y) &= F_1^{-1}[F_2(X) - G_3(Y)], \\ h(X, Y) &= G_1^{-1}[G_2(X) - G_3(Y)], \end{aligned} \tag{15}$$

unde H, F_i, G_i sînt funcţii arbitrare, continue şi strict monotone.

În ecuaţia funcţională (3), să permutăm x cu u, apoi să facem $v=u=z$; obţinem

$$f[g(x, z), h(y, z)] = \varphi[\lambda(x, y), \mu(z, z)]. \tag{16}$$

Cu ajutorul formelor (4), obţinem

$$f[g(x, z), h(y, z)] = H^{-1}[F_2(x) + G_2(z) + F_3(y) + G_3(z)] \tag{17}$$

$$\varphi[\lambda(x,y), \mu(z, z)] = H^{-1}[F_2(x) + F_3(y) + G_2(z) + G_3(z)] \tag{18}$$

Pentru ca ecuaţia funcţională (16) să concidă cu (14), trebuie mai întîi ca $G_3 = -G_2$, apoi $F_4 = F_2$, $F_3 = G_4$, cu care formulele (4) devin

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= H^{-1}[F_1(X) + G_1(Y)] \\ \varphi(X, Y) &= H^{-1}[F_2(X) + F_3(Y)] \\ g(X, Y) &= F_1^{-1}[F_2(X) - G_3(Y)], \\ h(X, Y) &= G_1^{-1}[F_3(X) + G_3(Y)] \end{aligned} \tag{19}$$

care coincid cu (15), în afara notaţiilor.

Proprietatea enunţată este complet demonstrată.

II

În cele ce urmează considerăm ecuaţia cu $2n$ variabile $x_1, \ldots, x_n$ şi $u_1, \ldots, u_n$,

$$\begin{aligned} & f[f_1(u_2, \ldots, u_n, x_1), \ldots, f_k(u_{k+1}, \ldots, u_n, x_k, u_1, \ldots, u_{k-1}), \ldots] = \\ & = g[g_1(u_2, \ldots, u_n, x_2), \ldots, g_k(u_{k+1}, \ldots, u_n, x_{k+1}, u_1, \ldots, u_{k-1}), \ldots], \end{aligned} \tag{20}$$

în care funcţiile f, f_i, g, g_i, $i = 1, \ldots, n$, sînt continue şi strict monotone.

Vom arăta că

O mulţime de soluţii continue şi strict monotone ale ecuaţiei funcţionale (20) *este dată de*

$$\begin{aligned} f(X_1, \ldots, X_n) &= F^{-1}[F_1(X_1) + \ldots + F_n(X_n)], \\ g(X_1, \ldots, X_n) &= F^{-1}[G_1(X_1) + \ldots + G_n(X_n)], \\ f_i(X_1, \ldots, X_n) &= F_i^{-1}[f_n^i(X_1) + \ldots + f_1^i(X_n)], \\ g_i(X_1, \ldots, X_n) &= G_i^{-1}[g_n^i(X_1) + \ldots + g_1^i(X_n)], \end{aligned} \tag{21}$$

în care funcţiile F, F_i, G_i, f_j sînt arbitrare, iar funcţiile g_j^i sînt de asemenea arbitrare, satisfăcînd însă relaţiilor

$$g_i^i(t) = f_{i+1}^{i+1}(t), \quad \overline{G}_i(t) = \overline{F}_i(t), \tag{22}$$

unde $\overline{F}_i(t)$ şi $\overline{G}_i(t)$ au expresiile (25). *Toate funcţiile considerate sînt continue şi strict monotone.*

Vom căuta o soluţie de forma

$$\begin{aligned} f(X_1, \ldots, X_n) &= F^{-1}[F_1(X_1) + \ldots + F_n(X_n)], \\ g(X_1, \ldots, X_n) &= G^{-1}[G_1(X_1) + \ldots + G_n(X_n)], \\ f_i(X_1, \ldots, X_n) &= \lambda_i^{-1}[f_n^i(X_1) + \ldots + f_1^i(X_n)], \\ g_i(X_1, \ldots, X_n) &= \mu_i^{-1}[g_n^i(X_1) + \ldots + g_1^i(X_n)], \end{aligned} \tag{23}$$

în care funcţiile f, g, F, G, F_i, G_i, f_j^i, g_f^i, λ_i μ_i sînt continue şi strict monotone.

Deducem

$$f(f_1, \ldots, f_n) = F^{-1}[F_1(f_1) + \ldots + F_n(f_n)] = F^{-1}[\Sigma F_i\lambda_i^{-1}(f_n^i + \ldots + f_1^i)]$$

$$g(g_1, \ldots, g_n) = G^{-1}[G_1(g_1) + \ldots + G_n(g_n)] = G^{-1}[\Sigma G_i\mu_i^{-1}(g_n^i + \ldots + g_1^i)].$$

Dacă luăm $\lambda_i = F_i$, $\mu_i = G_i$, rezultă

$$f(f_1, \ldots, f_n) = F^{-1}\left\{\begin{aligned} & f_n^1(u_2) + f_{n-1}^1(u_3) + \ldots + f_2^1(u_n) + f_1^1(x_1) + \\ & + f_n^2(u_3) + f_{n-1}^2(u_4) + \ldots + f_3^2(u_n) + f_2^2(x_2) + f_1^2(u_1) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + f_n^k(u_{k+1}) + \ldots + f_{k+1}^k(u_n) + f_k^k(x_k) + \\ & \qquad\qquad + f_{k-1}^k(u_1) + f_1^k(u_{k-1}) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + f_n^n(x_n) + f_{n-1}^n(u_1) + \ldots + f_n^n(u_{n-1}), \end{aligned}\right.$$

$$g(g_1, \ldots, g_n)=G^{-1}\left\{\begin{array}{l} g_n^1(u_2) + g_{n-1}^1(u_3) + \ldots + g_2^1(u_n) + g_1^1(x_2) + g_n^2(u_3) + \\ + g_{n-1}^2(u_4) + \ldots + g_3^2(u_n) + g_2^2(x_3) + g_1^2(u_1) + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + g_n^k(u_{k+1}) + \ldots + g_{k+1}^k(u_n) + g_k^k(x_{k+1}) + \\ \qquad\qquad + g_{k-1}^k(u_1) + \ldots + g_1^k(u_{k-1}) + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + g_n^n(x_1) + g_{n-1}^n(u_1) + \ldots + g_1^n(u_{n-1}). \end{array}\right.$$

Ecuaţia funcţională (20) trebuind să fie satisfăcută pentru orice x_i şi orice u_j, să luăm $u_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$, $x_j = 0$, $j = 1, \ldots k-1, k+1, \ldots, n$; ecuaţia (20) se reduce la o identitate de forma

$$F^{-1}\,[a_k + f_k^k(x_k)] = G^{-1}\,[b_k + g_{k-1}^{k-1}(x_k)],$$

în care a_k, b_k sînt constante.

Putem înlocui

$$f_k^k(u) + a_k = \bar{f}_k^k(u), \quad g_{k-1}^{k-1}(u) + b_k = \bar{g}_{k-1}^{k-1}(u),$$

ceea ce revine la a presupune $a_k = b_k = 0$, astfel că ecuaţia precedentă devine

$$F^{-1}\,[f_k^k(x_k)] = G^{-1}\,[g_{k-1}^{k-1}(x_k)],$$

din care deducem, mărind pe k cu o unitate

$$g_k^k(u) = GF^{-1}[f_{k+1}^{k+1}(u)], \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{24}$$

în care convenim a înlocui indicii $n+i$ prin i.

Dacă notăm

$$\begin{aligned} \bar{F}_k(u_k)&=f_{n-k+2}^1(u_k)+f_{n-k+3}^2(u_k)+\ldots+f_n^{k-1}(u_k)+f_1^{k+1}(u_k)+\ldots+f_{n-k}^n(u_k), \\ \bar{G}_k(u_k)&=g_{n-k+2}^1(u_k)+g_{n-k+3}^2(u_k)+\ldots+g_n^{k-1}(u_k)+g_1^{k+1}(u_k)+\ldots+g_{n-k}^n(u_k) \end{aligned} \tag{25}$$

atunci ecuaţia funcţională (20) devine

$$\begin{aligned} &F^{-1}\,[f_1^1(x_1) + \ldots + f_n^n(x_n) + \bar{F}_1\,(u_1) + \ldots + \bar{F}_n(u_n)]= \\ &=G^{-1}[g_1^1(x_2) + \ldots + g_{n-1}^{n-1}(x_n) + g_n^n(x_1) + \bar{G}_1(u_1) + \ldots + \bar{G}_n(u_n)]. \end{aligned} \tag{26}$$

Dacă luăm $x_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$, $u_j = 0, j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$, ecuaţia precedentă (24) se reduce la

$$F^{-1}\,[c_k + \bar{F}_k(u_k)] = \bar{G}^{-1}\,[d_k + \bar{G}_k(u_k)],$$

în care c_k şi d_k sînt constante. Inglobîndu-le în funcţiile $\bar{F}_j^i$, $\bar{G}_j^i$, aceasta revine la a lua $c_k = d_k = 0$, astfel că ecuaţia precedentă devine

$$\bar{G}_k(u_k) = GF^{-1}[F_k(u_k)], \quad k = 1, \ldots, n. \tag{27}$$

Abstracţie făcînd de funcţia operator $H=GF^{-1}$, în cele $2n$ ecuaţii (22) şi (25) figurează $2n^2$ funcţii f_j^i şi g_j^i. Rezultă că $2n^2-2n(n-1)$ dintre aceste funcţii le vom lua în mod arbitrar, iar celelalte $2n$ vor fi exprimate cu ajutorul celorlalte, liniar, după (23). Deoarece funcţiile $g_k^k(u)$ sînt deja exprimate cu ajutorul funcţiilor $f_{k+1}^{k+1}(u)$, vom considera funcţiile f_j^i ca arbitrare, iar cu cele n relaţii (25) vom exprima n funcţii $g_j^i(u)$ cu ajutorul funcţiilor f şi al celorlalte funcţii g.

Înlocuind funcţiile g_k^k şi $\bar{G}_k$ date de (24) şi (27), în (26), pe care o scriem sub forma

$$\begin{aligned} &g_1^1(x_2) + \ldots + g_n^n(x_1) + \bar{G}_1(u_1) + \ldots + \bar{G}_n(u_n) = \\ &= GF^{-1}\,[f_1^1(x_1) + \ldots + f_n^n(x_n) + \bar{F}_1(u_1) + \ldots + \bar{F}_n(u_n)], \end{aligned}$$

se obţine

$$\sum_{k=1}^n GF^{-1}\,[f_k^k(x_k)] + \sum_{k=1}^n GF^{-1}\,[\bar{F}_k(u_k)] = GF^{-1}\left[\sum_{k=1}^n f_k^k(x_k) + \bar{F}_k(u_k)\right],$$

care arată că $H = GF^{-1}$ este operaţie liniară, $H(u+v) = H(u) + H(v)$, deci $H(u) = au$, a fiind o constantă pe care o putem lua egală cu unitatea $a=1$, astfel că $G=F$ şi în aceste condiţii obţinem proprietatea enunţată.

Credem că alte soluţii continue şi strict monotone nu mai sînt, dar aceasta va trebui să fie demonstrat.

6. Alte generalizări ale ecuaţiei funcţionale (3). Ecuaţia funcţională (3) a fost generalizată prin (20), pornind de la observaţia că, în (3), variabilele u şi v rămîn pe locurile lor, iar variabilele x şi y suferă o permutare circulară de la membrul unu la membrul doi.

Este clar că ecuaţia (3) se mai poate generaliza şi în alte moduri. Nu vom face aceasta aici; alte cercetări vor semnala asemenea generalizări. Ne vom mărgini numai la a indica o singură generalizare, păstrînd observaţia de mai sus a permutării circulare a variabilelor x şi y, dar completînd-o prin aceea că x este prima, iar y este ultima dintre acestea: în acest caz, putem da ecuaţia funcţională

$$\begin{aligned} &f[f_1(u_2, \ldots, u_n, x_1), \ldots, f_k(u_{k+1}, \ldots, u_n, x_k, u_1, \ldots, u_{k-1}), \ldots] = \\ &=g[g_1(u_2, \ldots, u_n, x_n), \ldots, g_k(u_{k+1}, \ldots, u_n, x_{n-k+1}, u_1, \ldots, u_{k-1}), \ldots]. \end{aligned} \tag{27'}$$

Este evident că, aici, pentru a trece de la primul la al doilea membru al ecuaţiei funcţionale (27'), variabilele $(x_1, \ldots, x_n)$ au efectuat $n-1$ permutări circulare, celelalte rămînînd pe locurile iniţiale.

7. Generalizarea pseudosimetriei, a asociativităţii şi a tranzitivităţii. Acestea se pot obţine în mai multe moduri, din care vom indica numai unele exemple.

Astfel, în ecuaţia funcţională (9) a pseudosimetriei sau în ecuaţia (11) a pseudosimetriei generalizate, observăm că unul din argumente, h, din membrul unu şi unul din argumente, μ, din membrul doi al ecuaţiei (3), s-au contractat, reducîndu-se la o singură variabilă. Această observaţie aplicată ecuaţiei funcţionale (20) duce la

$$f(f_1, \ldots, f_{n-1}, x_n) = g(g_1, \ldots, g_{n-1}, x_1). \tag{28}$$

Mulţimea soluţiilor acestei ecuaţii se obţine deci din (21), contractînd pe f_n şi pe g_n, deci luînd

$$f_k^n = 0,\ k = 2, \ldots, n,\ f_1^n = x_n,\ g_i^n = 0,\ i = 1, \ldots, n-1,\ g_n^n = x_1.$$

Generalizarea se poate obţine, contractînd un număr p de funcţii f_i şi g_i; obţinem ecuaţia funcţională

$$f(f_1, \ldots, f_{n-p}, x_{n-p+1}, \ldots, x_n) = g(g_1, \ldots, g_{n-p}, x_{n-p+2}, \ldots, x_n, x_1) \tag{29}$$

a cărei mulţime de soluţii se obţine din (21) comprimînd ultimele funcţii f_i şi ultimele funcţii g_i.

Vom spune că ecuaţia funcţională (29) caracterizează *pseudosimetria generalizată de ordinul p*. Se înţelege acum de ce am înlocuit denumirea de semisimetrie prin aceea de pseudosimetrie: prima denumire nu ar fi avut sens în cazul general de mai sus.

Analog se pot generaliza ecuaţiile funcţionale ale asociativităţii de n variabile.

8. Este interesant de legat studiul ecuaţiei funcţionale (20) de alte consideraţii, care propunem să fie adîncite.

Să notăm primul membru al acestei ecuaţii prin $\Psi(x_1, \ldots, x_n; u_i)$, iar pe al doilea prin $\Phi(x_2, \ldots, x_n, x_1; u)$; ecuaţia devine

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n; u_i) = \Phi(x_2, \ldots, x_n, x_1; u_i). \tag{30}$$

Permutînd succesiv circular variabilele $x_1, \ldots, x_n$, se obţin relaţiile

$$\Psi(x_2, \ldots, x_n, x_1; u) = \Phi(x_3, \ldots, x_n, x_1, x_2; u),$$

$$\Psi(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}; u) = \Phi(x_1, \ldots, x_n; u).$$

Adunînd aceste n relaţii şi notînd

$$U(x_1, \ldots, x_n; u) = \Psi(x_1, \ldots, x_n; u) - \Phi(x_1, \ldots, x_n; u), \tag{31}$$

se obţine

$$U(x_1, \ldots, x_n; u) + U(x_2, \ldots, x_n, x_1; u) + \ldots + U(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}; u) = 0, \tag{32}$$

care este un caz particular de ecuaţii funcţionale cu argument funcţional n-periodic, de care ne-am ocupat în lucrări anterioare, [4 — 8]. Aici, transformarea $M \to \theta(M)$ este constituită de trecerea de la punctul $M(x_1, \ldots, x_n)$ la punctul $M_1(x_2, \ldots, x_n, x_1)$, obţinut prin permutarea circulară a coordonatelor x_i. Se regăseşte punctul M după n permutări.

În conformitate cu rezultatele noastre anterioare, mulţimea soluţiilor continue ale ecuaţiei funcţionale (32) este dată de

$$U(x_1, \ldots, x_n; u) = A(x_1, \ldots, x_n; u) - A(x_2, \ldots, x_n, x_1; u), \tag{33}$$

în care A este o funcţie continuă arbitrară.

Relaţia (31) devine, cu (33)

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n; u) - \Phi(x_1, \ldots, x_n; u) = A(x_2, \ldots, x_n, x_1; u) - A(x_1, \ldots x_n; u)$$

sau încă, ţinînd seama de (30),

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n; u) - A(x_1, \ldots, x_n; u) = \Phi(x_2, \ldots, x_n, x_i; u) - A(x_2, \ldots, x_n, x_i; u)$$

sau încă, notînd $\Phi - A = C$,

$$C(x_1, \ldots, x_n; u) = C(x_2, \ldots, x_n, x_1; u),$$

care arată că funcţia C rămîne invariantă printr-o permutare circulară a variabilelor x_i. În baza unui alt rezultat anterior al nostru, avem

$$C(x_1, \ldots, x_n; u) = B(x_1, \ldots, x_n; u) + B(x_2, \ldots, x_n, x_1; u) + \ldots + B(x_n, x_1, \ldots, x_n; u),$$

în care B este o funcţie continuă arbitrară. Vom avea deci

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n; u) = A(x_1, \ldots, x_n; u) + B(x_1, \ldots, x_n; u) + \ldots + B(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}; u) \tag{34}$$

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n; u) = A(x_2, \ldots, x_n, x_1; u_i) + B(x_1, \ldots, x_n; u) + \ldots + B(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}; u).$$

Aceste consideraţii pot fi utilizate pentru integrarea ecuaţiei funcţionale (20) şi a celor înrudite, în care intervine permutarea circulară a variabilelor. Pentru acesta, se va observa că dacă Φ este o soluţie a ecuaţiei (20), orice funcţie de Φ este o altă soluţie etc.

ОБОБЩЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДВУСИММЕТРИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В первой части труда показывается, какие обособления необходимо сделать для того, чтобы функциональное уравнение обобщенной двусимметрии перешло в функциональные уравнения простой и обобщенной ассоциативности, псевдосимметрии, простой и обобщенной транзитивности. При помощи этих обособлений множество непрерывных и строго монотонных решений уравнения обобщенной двусимметрии переходит во множество непрерывных и строго монотонных решений соответствующих уравнений. этот факт не является очевидным и основывается на знание решений, так как сделанными обособлениями некоторые функции $f(x, y)$ решения становятся $f(x, y) \equiv x$, которая перестает быть строго монотонной.

Во второй части труда дается для функционального уравнения (20) множество непрерывных и строго монотонных решений формулами (21), где F, F_i, G_i, f_i суть произвольные функции, а g_j^i удовлетворяет соотношениям $g_i^i(t) = f_{i+1}^{i+1}(t)$; $\overline{G}_i(t) = \overline{F}_i(t)$ где $\overline{F}_i(t)$, $\overline{G}_i(t)$ имеют выражения (25). Все эти функци нявляются непрерывными и строго монотонными.

Даются и другие приемы обобщения функционального уравнения двусимметрии, потом вводится понятие об обобщенной псевдосимметрии порядка p, полученной путем сокращением p функций f_i и p функции g_i в уравнении (21), становяющихся функциями одной переменной.

LA GÉNÉRALISATION DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE LA BISSYMÉTRIE

Dans la première partie du travail, on montre quelles particularisations doivent être faites pour que l'équation fonctionnelle de la bissymétrie généralisée se transforme respectivement en les équations fonctionelles de l'associativité simple et généralisée, de la pseudo-symétrie, de la transitivité simple et généralisée. Par ces particularisations, l'ensemble des solutions continues et strictement monotones de l'équation de la bissymétrie généralisée se transforme en l'ensemble des solutions continues et strictement monotones des équations respectives. Ce fait n'est pas évident et se base sur la connaissance des solutions car par les particularisations faites certaines fonctions $f(x, y)$ de la solution deviennent $f(x, y) = x$, qui cesse d'être strictement monotone.

Dans la deuxième partie du travail, on donne pour l'équation fonctionnelle (20) un ensemble de solutions continues et strictement monotones à l'aide des formules (21), où F, F_i, G_i, f_i sont des fonctions arbitraires, et G_j^i satisfont aux relations $g_i^i(t) = f_{i+1}^{i+1}(t)$; $\overline{G}_i = \overline{F}_i(t)$, où $\overline{F}_i(t)$, $\overline{G}_i(t)$ ont les expressions (25). Toutes ces fonctions sont continues et strictement monotones.

On indique aussi d'autres modes de généralisation de l'équation fonctionnelle de la bissymétrie, puis on introduit la notion de pseudo-symétrie généralisée d'ordre p, obtenue par la contraction de p fonctions f_i et de p fonctions g_i dans l'équation (21), lesquelles deviennent des fonctions d'une seule variable.

BIBLIOGRAFIE

1. N. H. Abel, *Untersuchungen der Funktionen zweier unabhängig veränderlichen Grössen x unde y, wie f(x, y), welche die Eigenschaft haben, dass f[z, f(x, y)] eine symetrische Funktion von x, y und z ist.* Journ. f. reine u. angew. Math, **1**, 11–15 (1926). *Oeuvres*, **1**, 61–65.

2. J. Aczél, *On Mean Values*. Bull. of the Amer. Math. Soc., **54**, 392–400 (1948).
3. L. E. J. Brouwer, *Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie*. Math. Ann., **67**, 246–267 (1909).
4. M. Ghermănescu, *Sur une classe d'équations fonctionnelles linéaires*. Bull. Soc. Math. France, 109–128 (1940); *Opérateurs fonctionnels périodiques*. C.R. Ac. Sci., **228**, 1190–1191 (1949).
5. — *Équations fonctionnelles à argument fonctionnel n-périodique*. Idem, **243**, 1593–1595 (1956).
6. — *Équations fonctionnelles à argument fonctionnel n-periodique*. Idem, **244**, 543–544 (1957).
7. — *Ecuații funcționale lineare cu argument funcțional n-periodic*. Bul. științ.-Acad. R.P.R., Secția de științe matematice și fizice, **9**, 43–78 (1957).
8. — *O clasă de ecuații funcționale*. Pozitiva, **1**, 121–123 (1940).
9. M. Hosszú, *A Generalisation of the Functional Equation of Bisymmetry*. Studia Math., **14**, 100–106 (1953).
10. Fr. Radó, *Ecuații funcționale în legătură cu nomografia*. Stud. și cercet. de mat. (Cluj), **9**, 249–319 (1958).
11. A. R. Schweitzer, *Theorems of Functional Equations*. Bull. Amer. Math. Soc., **18**, 192 (1912).
12. — *On a Functional Equation*. Bull. Amer. Math. Soc., **18**, 160–161, 299–302 (1912).
13. — *On the Iterative Properties of an Abstract Group*. Bull. Amer. Math. Soc., **24**, 371 (1918).

Primit la 8. XII. 1960